수학 영역

1. ①	2. ③	3. ②	4. ②	5. ①
6. ③	7. ④	8. ①	9. ④	10. ⑤
11. ①	12. ③	13. ⑤	14. ②	15. ⑤
16. ③	17. ⑤	18. ①	19. ③	20. ③
21. 270	22. 19	23. 55	24. 37	25. 125

새 교육과정에 해당하는 문항은 [2009 개정 교육과정]이라고 별도 표시함. 단, 표시하지 않은 문항은 2009 개정 교육과정에서 다루지 않는 문항으로 2017학년도 경찰대학 1차 시험 출제 범위에 해당되지 않음.

1. 행렬과 그래프 정답 ①

$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에서 $A^2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}1 & -9\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이므로 $A^n=\begin{pmatrix}1 & -3n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

따라서 $A+A^2+A^3+\cdots+A^n$의 $(1,2)$의 성분은

$\sum_{k=1}^{n}-3k=-3\times\dfrac{n(n+1)}{2}=-1488$

$n^2+n-496=0,\ (n-31)(n+16)=0$

$\therefore n=31$

2. 행렬과 그래프 정답 ③

$(2+\sqrt{3})^{100}=a+b\sqrt{3}$ 이므로

$(2+\sqrt{3})^{101}=(a+b\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

$=(2a+3b)+(a+2b)\sqrt{3}=x+y\sqrt{3}$

$x=2a+3b,\ \ y=a+2b\,(\because a,\ b,\ x,\ y$가 유리수$)$

위의 $x,\ y$에 대한 연립방정식을 행렬식으로 표현하면

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$이므로 행렬 A는 $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$이다.

[2009 개정 교육과정]

3. 통계 정답 ②

운전면허증 소지자의 10년 간 교통법규 위반 건수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(5,1^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 따라서

$\mathrm{P}(4.85\le\overline{X}\le5.2)=\mathrm{P}\left(\dfrac{4.85-5}{0.1}\le Z\le\dfrac{5.2-5}{0.1}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le2)$

$=0.9104$

[2009 개정 교육과정]

4. 방정식과 부등식 정답 ②

$\alpha+\beta=\alpha\beta=k$($k$는 실수) 로 놓으면

$f(x)=x^2-kx+k$

$f(x-1)=(x-1)^2-k(x-1)+k$

$=x^2-(k+2)x+2k+1$

따라서 이차방정식 $f(x-1)=0$의 두 근 $\gamma,\ \delta$에 대하여

$\gamma+\delta=k+2,\ \ \gamma\delta=2k+1$이므로

$\gamma^2+\delta^2=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta$

$=(k+2)^2-4k-2=k^2+2$

따라서 $k=\alpha+\beta=0$일 때, $\gamma^2+\delta^2$의 최솟값은 2이다.

[2009 개정 교육과정]

5. 방정식과 부등식 정답 ①

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $w^2+w+1=0$

$f(\omega)=\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$f(\omega^2)=\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=-1$ …… ㉡

㉡의 양변을 제곱하여 정리하면

$\left(\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}\right)^2=\omega^4+\dfrac{1}{\omega^4}+2=1$

$f(\omega^{2^2})=\omega^{2^2}+\dfrac{1}{\omega^{2^2}}=-1$

$\vdots$

즉, $f(\omega^{2^n})=f(\omega^{2^{n-1}})^2$ (n은 자연수) 이므로

$f(\omega)f(\omega^2)f(\omega^{2^2})f(\omega^{2^3})\cdots f(\omega^{2^{2016}})=(-1)^{2017}=-1$

6. 지수함수와 로그함수 정답 ③

$\sqrt{2016}\,x^{\log_{2016}x}=x^2$의 양변에 $\log_{2016}$을 취하면

$\log_{2016}\sqrt{2016}+(\log_{2016}x)^2=2\log_{2016}x$

$\dfrac{1}{2}+(\log_{2016}x)^2=2\log_{2016}x$

$\log_{2016}x=t$로 놓으면 $t^2-2t+\dfrac{1}{2}=0$

근과 계수의 관계에서 t에 대한 이차방정식의 두 실근의 합이 2이므로 주어진 방정식의 해를 $\alpha,\ \beta$라 두면

$\log_{2016}\alpha+\log_{2016}\beta=2,\ \log_{2016}\alpha\beta=2$

$N = \alpha\beta = 2016^2 = 4064256$
따라서 N의 마지막 두 자리는 56이다.
[2009 개정 교육과정]

7. 확률 [정답 ④]

범행을 저지른 사람을 선택할 확률은 0.2
따라서 범행을 저지르지 않은 사람을 선택할 확률은 0.8
범행을 저지른 사람을 선택하였을 때, 범인으로 판단할 확률은 $0.2 \times 0.99 = 0.198$
범행을 저지르지 않은 사람을 선택하였을 때, 범인으로 판단할 확률은 $0.8 \times 0.04 = 0.032$
따라서 구하는 확률은 $0.198 + 0.032 = 0.23$

[2009 개정 교육과정]

8. 통계 [정답 ①]

$\mathrm{E}(3X+1) = 3\mathrm{E}(\mathrm{X}) + 1 = 19$이므로 $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 6$
$\mathrm{E}(X^2) = 40$이므로
$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 40 - 36 = 4$
이항분포 $\mathrm{B}(\mathrm{n},\ \mathrm{p})$에서
$\mathrm{E}(X) = np = 6$
$\mathrm{V}(X) = np(1-p) = 6(1-p) = 6 - 6p = 4$
이므로 $p = \dfrac{1}{3}$, $n = 18$

$$\therefore \frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X=2)} = \frac{{}_{18}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{17}}{{}_{18}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{16}} = \frac{4}{17}$$

9. 수열의 극한 [정답 ④]

ㄱ. (참) $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}|a_n| - 1$, $a_1 = 1$이므로 $\dfrac{1}{2}|a_n| < 1$
따라서 $n \geq 2$이면 $a_n < 0$
ㄴ. (거짓) $n \geq 2$이면 $a_n < 0$이므로
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}|a_n| - 1 = -\frac{1}{2}a_n - 1$$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$로 놓으면 $\alpha = -\dfrac{1}{2}\alpha - 1$이므로
$$\alpha = -\frac{2}{3}$$
ㄷ. (참) $n \geq 2$이면 $a_n < 0$이므로
$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}|a_n| - 1 = -\dfrac{1}{2}a_n - 1$에서
$$a_{n+1} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{3}\right)$$
$b_n = a_{n+1} + \dfrac{2}{3}$이므로 $b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}b_n$
따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이
$b_1 = a_2 + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로 $b_n = \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}$$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

[2009 개정 교육과정]

10. 수열 [정답 ⑤]

함수 $f(x)$는 $f(x) = f(x+2)$를 만족시키므로 주기가 2인 주기함수이다.
곡선 $y = \log_n x$는 세 점 $(1,\ 0)$, $(n,\ 1)$, $(n^2,\ 2)$를 지나므로 닫힌 구간 $[n,\ n^2]$에서 함수 $f(x)$의 그래프와 만나고 각각의 닫힌 구간 $[n,\ n+1]$에서 모두 한 번씩 만난다.
따라서 $a_n = n^2 - n$이므로
$$\sum_{n=2}^{10} a_n = \sum_{n=2}^{10}(n^2 - n) = \sum_{n=2}^{10} n^2 - \sum_{n=2}^{10} n$$
$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2}$$
$$= 385 - 55 = 330$$

[2009 개정 교육과정]

11. 함수의 극한과 연속 [정답 ①]

$f(-x) = -f(x)$이고, $f(-1) = 2$이므로
$f(1) = -2$
$$\lim_{x\to-1}\frac{f(1) - f(-x)}{x^2 - 1} = \lim_{x\to-1}\frac{f(x) - 2}{x - (-1)} \times \frac{1}{x-1}$$
$$= f'(-1) \times -\frac{1}{2} = 3$$
따라서 $f'(-1) = -6$ 이므로
$$\lim_{x\to-1}\frac{\{f(x)\}^2 - 4}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to-1}\frac{\{f(x)-2\}\{f(x)+2\}}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\{f(x)-f(-1)\}\{f(x)+2\}}{x+1}$$

$= f'(-1) \times \{f(-1)+2\}$

$= -6 \times 4 = -24$

[2009 개정 교육과정]

12. 다항함수의 미분법 정답 ③

$f(x) = (a-4)x^3 + 3(b-2)x^2 - 3ax + 2$

$f'(x) = 3(a-4)x^2 + 6(b-2)x - 3a$

$3(a-4)x^2 + 6(b-2)x - 3a = 0$에서

판별식을 D로 놓으면 함수 $f(x)$가 극값을 가지지 않으므로 $\frac{D}{4} = 9(b-2)^2 + 9a(a-4) \le 0$ 따라서 집합 A는

$A = \{(a,\ b) \mid (a-2)^2 + (b-2)^2 \le 2^2\}$이고

$B = \{(x,\ y) \mid y = m(x+1)\}$이므로

$A \cap B \ne \varnothing$이기 위해서는 직선 $y = m(x+1)$가

원 $(a-2)^2 + (b-2^2) \le 4$와 접하거나 내부를 지나야

하므로 $\frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}} \le 2$이어야 한다.

$5m^2 - 12m \le 0,\ m(5m-12) \le 0$

따라서 $0 \le m \le \frac{12}{5}$이므로 m의 최댓값과 최솟값의

합은 $0 + \frac{12}{5} = \frac{12}{5}$

13. 수열 정답 ⑤

$\left[\frac{x}{n}\right] = 2$이면 $2 \le \frac{x}{n} < 3,\ 2n \le x < 3n$ ……㉠

$\left[\frac{x}{n+1}\right] = 1$이면 $1 \le \frac{x}{n+1} < 2$

$n+1 \le x < 2n+2$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 자연수는 $2n$ 또는 $2n+1$이므로

$a_n = 2n+1(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$

따라서 $a_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ 2n+1 & (n \ge 2) \end{cases}$이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{30} a_n = 2 + \sum_{n=2}^{30} (2n+1)$$

$$= 2 + 2 \times \frac{30 \times 31}{2} + 30 - 3 = 959$$

[2009 개정 교육과정]

14. 확률 정답 ②

세 구역을 순찰하는 순찰 인원수를 각각 $x,\ y,\ z$라 하면

$x + y + z = 10(1 \le x,\ y,\ z \le 5)$

$x' = x+1,\ y' = y+1,\ z' = z+1$이라 하면

$x' + y' + z' = 7(0 \le x',\ y',\ z' \le 4)$

${}_3\mathrm{H}_7 - 3 \times ({}_2\mathrm{H}_2 + {}_2\mathrm{H}_1 + {}_2\mathrm{H}_0)$

$= {}_9\mathrm{C}_2 - 3 \times ({}_3\mathrm{C}_2 + {}_2\mathrm{C}_1 + {}_1\mathrm{C}_0)$

$= \frac{9 \times 8}{2 \times 1} - 3 \times (3+2+1) = 36 - 18 = 18$

[2009 개정 교육과정]

15. 다항함수의 적분법 정답 ⑤

$f(xy) = f(x)f(y) - x - y$ ……㉠

㉠에 $x = 1,\ y = 1$을 각각 대입하여 정리하면

$f(1) = \{f(1)\}^2 - 2,\ \{f(1)-2\}\{f(1)+2\} = 0$

이때, $f(1) > 0$이므로 $f(1) = 2$

㉠에 $y = 1$을 대입하면 $f(x) = x+1$ 따라서

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{6}{\sqrt{n}} f\left(2 + \frac{4k}{n}\right) \right\}^2$$

$$= 9\int_2^6 \{f(x)\}^2 dx = 9\int_2^6 (x^2 + 2x + 1)dx$$

$$= 9\left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_2^6 = 9\left\{(72+36+6) - \left(\frac{8}{3} + 4 + 2\right)\right\}$$

$= 948$

[2009 개정 교육과정]

16. 수열 정답 ③

50행까지 놓인 바둑돌의 총 개수는 $\frac{50 \times 51}{2} = 1275$

검은 바둑돌이 3개마다 2개씩 존재하므로 검은 바둑돌의 총 개수는 $\frac{2}{3} \times 1275 = 850$

[2009 개정 교육과정]

17. 통계 정답 ⑤

중지할 때까지 던진 주사위 횟수에 따라 받는 돈을 확률변수 X라 하면

X	1000	2000	3000	$\cdots$
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\cdots$

확률질량함수는 $\mathrm{P}(X=x) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$\mathrm{E}(X) = 1000 \times \frac{1}{3} + 2000 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + 3000 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots$$

$$= \frac{1000}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\mathrm{E}(X) - \frac{2}{3}\mathrm{E}(X) = \frac{1}{3}\mathrm{E}(X) = \frac{1000}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

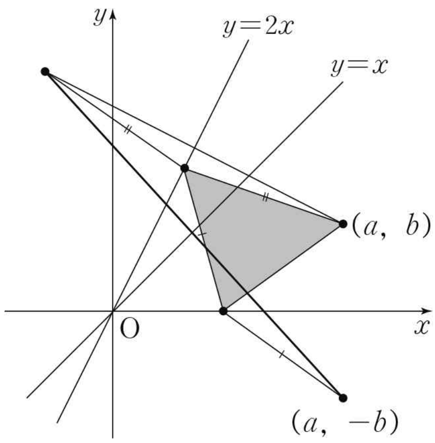
$$= \frac{1000}{3} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1000$$

따라서 $\mathrm{E}(X) = 3000$

[2009 개정 교육과정]

18. 도형의 방정식
정답 ①

다음 그림과 같이 삼각형의 둘레의 길이의 최솟값은 점 $(a,\ b)$를 두 직선 $y=0$, $y=2x$에 각각 대칭시킨 두 점을 이은 선분의 길이와 같다.



직선 $y=0$에 대칭인 점이 $(a,\ -b)$

직선 $y=2x$에 대칭인 점이 $\left(-\frac{3}{5}a+\frac{4}{5}b,\ \frac{4}{5}a+\frac{3}{5}b\right)$

따라서 삼각형의 둘레의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{\left(a-\frac{-3a+4b}{5}\right)^2+\left(-b-\frac{4a+3b}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{a^2+b^2}$$

19. 삼각함수
정답 ③

사인법칙에 의하여 $\frac{x}{\sin\theta} = \frac{x+2}{\sin 2\theta} = \frac{x+1}{\sin 3\theta}$

$$\frac{x}{\sin\theta} = \frac{x+2}{\sin 2\theta}$$

$$x\sin 2\theta = (x+2)\sin\theta$$

$$x \times 2\sin\theta cos\theta = (x+2)\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x+2}{2x} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{x}{\sin\theta} = \frac{x+1}{\sin 3\theta}$$

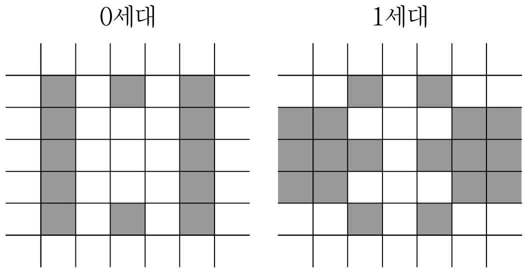
$$x\sin 3\theta = (x+1)\sin\theta$$

$$4\cos^2\theta = \frac{2x+1}{x} \quad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=4$이므로 $\cos\theta = \frac{3}{4}$

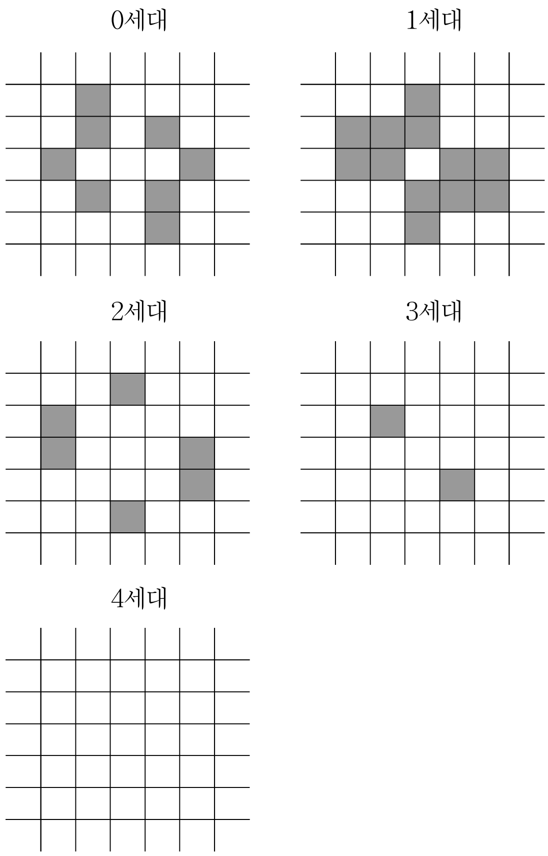
20. 수열
정답 ③

ㄱ. (참)



따라서 (가)의 1세대에 살아남은 정사각형의 개수는 18

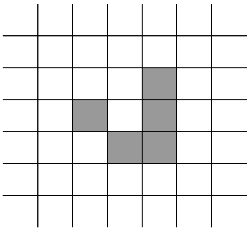
ㄴ. (참)



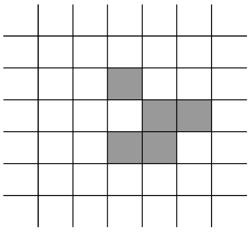
따라서 (나)는 4세대 모든 정사각형이 죽는다.

ㄷ. (거짓)

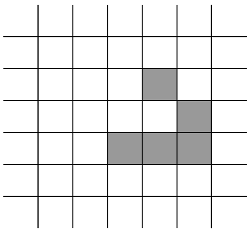
0세대



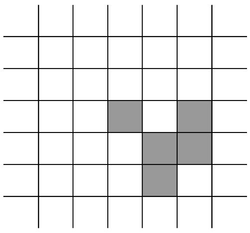
1세대



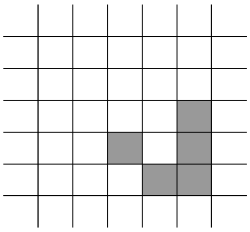
2세대



3세대



4세대



따라서 (다)는 4세대가 0세대와 같은 모양이므로 4가지 모양이 반복된다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

[2009 개정 교육과정]

21. 수열 정답 270

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공차를 d라 하면

$a_1+a_3+a_{13}+a_{15}=4a_1+28d=72$이므로

$2a_1+14d=36$ 따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{15} a_n &= a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{15}\\ &=(a_1+a_{15})+(a_2+a_{14})+\cdots+(a_7+a_9)+a_8\\ &=7\times36+18=270\end{aligned}$$

[2009 개정 교육과정]

22. 다항함수의 적분법 정답 19

$2|x-t|$가 최소일 때, 함수 $f(x)=x^2-2|x-t|$는 최대이다.

$t<-1$이면 $x=-1$일 때 최대이므로 $g(t)=2t+3$

$-1\le t\le 1$이면 $x=t$일 때 최대이므로 $g(t)=t^2$

$t>1$이면 $x=1$일 때 최대이므로 $g(t)=3-2t$

따라서 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} g(t)dt=\int_0^1 t^2dt+\int_1^{\frac{3}{2}} 3-2t\,dt=\frac{7}{12}$

이므로 $p+q=12+7=19$

23. 지수함수와 로그함수 정답 55

$\left|\log_3\frac{m}{15}\right|+\log_3\frac{n}{3}\le 0$에서

$\left|\log_3\frac{m}{15}\right|\le-\log_3\frac{n}{3}$, $\left|\log_3\frac{m}{15}\right|\le \log_3\frac{3}{n}$

$\left|\log_3\frac{m}{15}\right|>0$이고, n, m은 자연수이므로 $n=1$, 2, 3

(ⅰ) $n=1$인 경우, $\left|\log_3\frac{m}{15}\right|\le 1$을 만족시키는 자연수 m은 $5\le m\le 45$이므로 41개이다.

(ⅱ) $n=2$인 경우, $\left|\log_3\frac{m}{15}\right|\le \log_3\frac{3}{2}$을 만족시키는 자연수 m은 $10\le m\le 22$이므로 13개이다.

(ⅲ) $n=3$인 경우, $\left|\log_3\frac{m}{15}\right|\le 0$을 만족시키는 자연수 m은 15이므로 1개이다.

따라서 구하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$41+13+1=55$

[2009 개정 교육과정]

24. 다항함수의 미분법 정답 37

$x=-1$일 때, $x^3+1=0$이므로

$f'(-1)=3\times(-1)\times(1)\times(2)=-6=a$

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3(x^3+1)(x^3+2)(x^3+3)\\ &=(x^6+3x^3)(x^6+3x^3+2)\end{aligned}$$

$t=x^6+3x^3$이라 하면 $f(t)=t^2+2t=(t+1)^2-1$이므로 $t=-1$일 때, 최솟값 -1을 가진다.

즉, $x^6+3x^3=-1$일 때, $f(x)$가 최솟값 $b=-1$을 갖는다. 따라서 $a^2+b^2=36+1=37$

[2009 개정 교육과정]

25. 확률 $\boxed{\text{정답 } 125}$

삼각형의 개수 a_n은

$a_n = $ (3개의 선분을 고르는 경우의 수) $-$

(점 B와 점 C 중 한 점에서 선분 3개를 고르는 경우의 수)

$$= {}_{2n+1}\mathrm{C}_3 - 2 \times {}_{n+1}\mathrm{C}_3$$

$$= \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3!} - 2 \times \frac{(n+1)n(n-1)}{3!}$$

$$= n^3$$

$\therefore a_5 = 5^3 = 125$