수리영역 정답

1. ①	2. ③	3. ①	4. ②	5. ⑤
6. ④	7. ②	8. ③	9. ④	10. ②
11. ③	12. ④	13. ④	14. ①	15. ⑤
16. ①	17. ⑤	18. ③	19. ④	20. ⑤
21. ③	22. ②	23. ③	24. ②	25. ⑤

1. 행렬과 그래프 정답 ①

$\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{matrix}\Big)$에서

$A\ =\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$

이므로 $A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$이다.

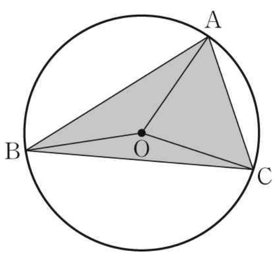
따라서 $A^{2013}=(A^6)^{335}\cdot A^3=A^3=-E$

$A^{2013}\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\Big)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

$\therefore\ a+b=(-1)+(-2)=-3$

2. 삼각함수 정답 ③



삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름을 r이라 하면

(원 O의 넓이) $=\pi r^2=15\pi$ $\quad\therefore\ r^2=15$

(삼각형 ABC의 넓이)

=(삼각형 ABO의 넓이)+(삼각형 BCO의 넓이)

+(삼각형 AOC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times 15\times\sin(\angle AOB)+\frac{1}{2}\times 15\times\sin(\angle BOC)$

$+\frac{1}{2}\times 15\times\sin(\angle AOC)$

$=\frac{15}{2}\{\sin(\angle AOB)+\sin(\angle BOC)+\sin(\angle AOC)\}$

$=12$

$\therefore\ \sin(\angle AOB)+\sin(\angle BOC)+\sin(\angle AOC)$

$=12\times\frac{2}{15}=\frac{24}{15}=\frac{8}{5}$

3. 식의 계산 정답 ①

세균 S의 개체 수는 4시간 마다 두 배로 증가하고, 세균 T의 개체 수는 6시간 마다 두 배로 증가한다.

따라서 12시간 후에는 세균의 개체 수가 S는 $2^3=8$배, T는 $2^2=4$배 증가하여 S는 4×2^3, T는 256×2^2이 된다. 또한 12시간씩 n번이 지나면 세균 S의 개체 수는 $4\times\ 2^3)^n$, 세균 T의 개체 수는 $256\times(2^2)^n$이 되므로 세균 S의 개체 수와 세균 T의 개체 수가

같아지려면$4\times(2^3)^n=256\times(2^2)^n$, $2^{3n+2}=2^{2n+8}$,

$3n+2=2n+8$, $n=6$

따라서 12시간씩 6번, 즉 72시간 후면 두 세균의 개체 수가 같아지고 이때, 세균 S의 개체 수는 2^{20}이 된다.

4. 지수함수와 로그함수

정답 ②

ㄱ.(참) $\ \ , 2)$ 이면, $2^b=6^a$(a는 실수)이므로

$\log_2 6^a=b,\ b=a\log_2 6$가 성립한다.

ㄴ.(참)$(a,\ b)\in G$이면, $b=6^a$이고 a가 실수이므로

양변은 0이 아니다. 따라서 $b^{-1}=6^{-a}$가

성립하므로 $-a,\ \frac{1}{b})\in G$이다.

ㄷ.(거짓)(반례)$a=1,\ b=6,\ c=1,\ d=6$이라 하면

$(a,\ b)\in G$이고 $(c,\ d)\in G$이다.

그러나 $6^{a+c}=6^2=36\neq b+d=6+6=12$

이므로 $(a+c,\ b+d)\notin G$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

5. 방정식과 부등식

정답 ⑤

$$\begin{cases} x^2+2yz+2z=29 \\ y^2+2zx+2x=34 \\ z^2+2xy+2y=36 \end{cases}$$

에서 좌변과 우변을 각각 모두 더하면

$x^2+y^2+z^2+2\ xy+yz+zx)+2(x+y+z)=99,$

$(x+y+z)^2+2(x+y+z)=99$ ……㉠

$x+y+z=A$라 두면,

㉠은 $A^2+2A-99=0,\ (A-9)(A+11)=0$

$\therefore\ A=9$ 또는 $A=-11$

$x,\ y,\ z$가 모두 양수이므로 $A=x+y+z=9$

6. 도형의 방정식

정답 ④

세 점 P, Q, R을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+ax+by+c=0$이라 두면,

$9+1+3a+b+c=0$ ……㉠

$1+9+a-3b+c=0$ ……㉡

$16+4a+c=0$ ……㉢

㉠과 ㉡을 연립하면 $20+5a+2c=0$ ……㉣

㉢과 ㉣을 연립하면 $12+3a=0\quad\therefore\ a=-4$

㉢에서 $c=0$, ㉠에서 $b=2$

따라서 구하려는 원의 방정식은 $x^2+y^2-4x+2y=0$

$(x-2)^2+(y+1)^2=5$이다.

이때, 삼각형의 외심은 삼각형의 외접원의 중심과 같으므로

원 O의 중심 $(2,\ -1)$에서 직선 $3x-4y+10=0$까지

의 거리는 $\frac{|6+4+10|}{9+16}=\frac{20}{5}=4$이다.

7. 수열의 극한

정답 ②

공비가 r인 무한등비급수가 수렴할 조건은 $-1<r<1$

이다. 따라서 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2-\log_2 a)^n$이 수렴할 조건

은 $-1<2-\log_2 a<1$ ……㉠

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2\sin\frac{a-3}{2})^n$가 수렴할 조건은

$-1<2\sin\frac{a-3}{2}<1$ ……㉡

㉠을 만족시키는 정수 a는 $1<\log_2 a<3,\ 2<a<8$에

서 3, 4, 5, 6, 7이고, ㉠을 만족시키는 a값들 중에서

㉡을 만족시키는 정수 a는 $-\frac{1}{2}<\sin\frac{a-3}{2}<\frac{1}{2}$,

$-\frac{\pi}{6}<\frac{a-3}{2}<\frac{\pi}{6}$에서 3, 4이므로 구하고자 하는 정

수 a의 개수는 2개이다.

8. 함수의 극한과 연속

정답 ③

$$\lim_{\to\infty} \left(\quad {}^{4}+2x^3+1-x^2\right)\left(\sqrt{x^2+6}-x\right)\}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x^3+1-x^4)(x^2+6-x^2)}{\left(\sqrt{x^4+2x^3+1}+x^2\right)\left(\sqrt{x^2+6}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{12x^3+6}{\left(\sqrt{x^4+2x^3+1}+x^2\right)\left(\sqrt{x^2+6}+x\right)}$$

분모의 최고 차항인 x^3으로 분모, 분자를 각각 나눠주면

$$\lim_{x\to\infty} \quad \begin{matrix} 12+\frac{6}{x^3} \\ 1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}+1\Big)\Big(\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}+1\Big) \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 12 \\ (1+1)(1+1) \end{matrix} = 3$$

9. 식의 계산

정답 ④

$10+2 \quad 27 + \sqrt[3]{10-2\sqrt{27}} = \quad$ 라 하면

$$A^3 = \quad \sqrt[3]{10+2\sqrt{27}}+\sqrt[3]{10-2\sqrt{27}}\ )^3$$

$$= 20+3\sqrt[3]{\ } \ 10+2\sqrt{27})(10-2\sqrt{27})$$

$$\times\left(\sqrt[3]{10+2\sqrt{27}}+\sqrt[3]{10-2\sqrt{27}}\right)$$

$$= 20+3\sqrt[3]{-8}\left(\sqrt[3]{10+2\sqrt{27}}+\sqrt[3]{10-2\sqrt{27}}\right)$$

$$= 20+3(-2A)$$

$A^3+6A-20=0,\ (A-2)(A^2+2A+10)=0$

$\therefore \sqrt[3]{10+2\sqrt{27}}+\sqrt[3]{10-2\sqrt{27}} = A = 2$

10. 지수함수와 로그함수

정답 ②

$\log_2 2^6 < \log_2 77 < \log_2 2^7,\ 6 < \log_2 77 < 7$이므로

$\log_2 77$의 정수 부분은 6이다. 따라서 $a = \log_2 77 - 6$

$\log_5 5^2 < \log_5 77 < \log_5 5^3,\ 2 < \log_5 77 < 3$이므로

$\log_5 77$의 정수 부분은 2이다. 따라서 $b = \log_5 77 - 2$

$$2^{p+a}5^{q+b} = 2^{p+\log\,77-6}5^{q+\log_5 77-2}$$

$$= \frac{77}{64}2^p \times \frac{77}{25}5^q$$

이때, $2^{p+a}5^{q+b}$이 250의 배수이므로 2^p5^q은 64와 25를 인수로 갖고 분모를 약분 할 수 있어야 하며, 77이 $2,\ 5$와 서로소 이므로 약분한 후 $250 = 2\times5^3$을 포함하고 있어야 한다. 따라서 $2^p5^q = 2^{6+1}5^{2+3} = 2^7 5^5$이므로

$p+q$의 최솟값은 $7+5=12$이다.

11. 확률

정답 ③

문제의 조건을 만족시키는 경우를 구하면

$(1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 4),\ (1,\ 4,\ 5),$

$(1,\ 5,\ 6),\ (2,\ 2,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5),\ (2,\ 4,\ 6),$

$(3,\ 3,\ 6)$인 총 9가지이다.

위 각 경우가 일어날 수 있는 경우의 수를 구하면

$(1,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 4),\ (3,\ 3,\ 6)$은 각각 $\frac{3!}{2!} = 3$

$(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 4),\ (1,\ 4,\ 5),\ (1,\ 5,\ 6),$

$(2,\ 3,\ 5),\ (2,\ 4,\ 6)$은 각각 $3! = 6$이다.

따라서 모든 경우의 수는 $3\times3+6\times6=45$

또한 세 개의 주사위를 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 $6^3=216$이므로 구하고자 하는 확률은

$\frac{45}{216} = \frac{5}{24}$이다.

12. 순열과 조합 [정답 ④]

학생 5명 중에서 적어도 한 명의 남학생과 적어도 한 명의 여학생이 포함되도록 3명의 대표를 선출하는 경우의 수는 학생 15명 중에서 세 명의 대표를 뽑는 모든 경우의 수에서 남학생만 뽑거나 여학생만 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

남학생의 수를 x이라 하면 여학생의 수는 $15-x$이므로

$_{5}\mathrm{C}_{3}-{}_{x}\mathrm{C}_{3}-{}_{15-x}\mathrm{C}_{3}$

$=\dfrac{15\times14\times13}{6}-\dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}$

$-\dfrac{(15-x)(14-x)(13-x)}{6}$

$=286$,

$\dfrac{x(x-1)(x-2)+(15-x)(14-x)(13-x)}{6}=169$,

$39x^2-585x+1716=0$,

$x^2-15x+44=0$, $(x-11)(x-4)=0$

$\therefore\ x=11$ 또는 $x=4$

그러므로 남학생 11명, 여학생 4명 또는 남학생 4명, 여학생 11명이다.

따라서 남학생 수와 여학생 수의 차이는 7이다.

13. 함수 [정답 ④]

$f(x)$가 이차식이므로 $f(x)=ax^2+bx+c\ \ a\neq0)$라 두면 $f(x^2)=f(x)f(-x)$

$ax^4+bx^2+c=\ \ ax^2+bx+c)(ax^2-bx+c)$

$=a^2x^4+(2ac-b^2)x^2+c^2$

이므로 $a=a^2$, $2ac-b^2=b$, $c=c^2$이다.

이때, $a\neq0$이므로 $a=1$

따라서 조건을 만족하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하면

$(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ -2,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 0)$, $(1,\ -1,\ 0)$인 4이다.

14. 다항함수의 적분법 [정답 ①]

$\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^4+ax^2-10x+6$

위의 식에 $x=1$을 대입하면,

$\int_{1}^{1}(1-t)f(t)dt=1+a-10+6=0$

$\therefore\ a=3$

따라서 준식은 $\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^4+3x^2-10x+6$

$x\int_{1}^{x}f(t)dt-\int_{1}^{x}tf(t)dt=x^4+3x^2-10x+6$

위 식의 양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$\int_{1}^{x}f(t)dt=4x^3+6x-10$

양변을 다시 한 번 각각 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2+6$

$\therefore\ f(1)=12+6=18$

15. 확률 [정답 ⑤]

$(x+1)^{24}$의 전개식에서 x^{22}의 계수는 $_{24}\mathrm{C}_{22}$

$x(x+1)^{23}$의 전개식에서 x^{22}의 계수는 $(x+1)^{23}$의

전개식에서 ^{1}의 계수와 같으므로 ${}_{23}\mathrm{C}_{21}$

$x^2\ x+1)^{22}$의 전개식에서 x^{22}의 계수는 $(x+1)^{22}$의

전개식에서 x^{20}의 계수와 같으므로 ${}_{22}\mathrm{C}_{20}$

$$\vdots$$

$x^{22}(x+1)^2$의 전개식에서 x^{22}의 계수는 $(x+1)^2$의

전개식에서 상수항과 같으므로 ${}_{2}\mathrm{C}_{0}$

따라서 $(x+1)^{24}+x(x+1)^{23}+\ \cdots\ +x^{22}(x+1)^2$

에서 x^{22}의 계수는

$${}_{24}\mathrm{C}_{22}+{}_{23}\mathrm{C}_{21}+{}_{22}\mathrm{C}_{20}+\ \cdots\ +{}_{2}\mathrm{C}_{0}$$

$$={}_{24}\mathrm{C}_{2}+{}_{23}\mathrm{C}_{2}+{}_{22}\mathrm{C}_{2}+\ \cdots+{}_{2}\mathrm{C}_{2}$$

$$=\frac{24\times23}{2}+\frac{23\times22}{2}+\frac{22\times21}{2}+\ \cdots\ +\frac{2\times1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{23}k(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{23}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{23}k$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{23\times24\times47}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{23\times24}{2}$$

$$=2162+138=2300$$

따라서 주어진 다항식에서 x^{22}의 계수는 2300이다.

16. 수열

정답 ①

$$\sum_{k=1}^{20}(2k+1)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ \cdots\ +\frac{1}{20}\right)=\text{ 라}$$

하면

S

$$=3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{20}\right)+5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$$

$$+7\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{20}\right)+\cdots+41\times\frac{1}{20}$$

위 식을 분모가 같은 항끼리 다시 정리하면

$$S=3+\frac{3+5}{2}+\frac{3+5+7}{3}+\cdots$$

$$+\frac{3+5+7+\cdots+41}{20}$$

이때, 분모가 n(n은 자연수)인 각 항의 합이 $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{n}$

이다.

$$\therefore\ S=\sum_{n=1}^{20}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2k+1\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{n}\left(2\times\frac{n(n+1)}{2}+n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{n}(n^2+2n)$$

$$=\sum_{n=1}^{20}(n+2)=\frac{20\times21}{2}+40$$

$$=250$$

17. 함수

정답 ⑤

$2x^2+y^2-2x+\dfrac{4}{x^2+y^2+1}$ 에서

$x^2+y^2=t(t>0)$으로 치환하여 정리하면

$$t+x^2-2x+\frac{4}{t+1}$$

$$=t+(x^2-2x+1)-1+\frac{4}{t+1}$$

$t-1+\frac{4}{t+1}+\ x-1)$

$=t+1+\frac{4}{t+1}+(x-1)^2-2$

이때, $f(t)=t+1+\frac{4}{t+1}$라 하면 $t+1>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$t+1+\frac{4}{t+1}\geq 2\quad (t+1)\ \frac{4}{t+1}\Big)=4$

(단, 등호는 $t+1=\frac{4}{t+1}$일 때, 성립한다.)

따라서 $t+1=\frac{4}{t+1}$, $t=x^2+y^2=1$일 때,

$f(t)$는 최솟값 4를 갖는다.

또한 $g(x)=(x-1)^2-2$라 하면 $g(x)$는 $x=1$일 때,

최솟값 -2를 갖는다.

$x^2+y^2=1$에서 $x=1$이면 $y=0$이므로

$2x^2+y^2-2x+\frac{4}{x^2+y^2+1}$는 $x=1,\ y=0$일 때,

최솟값 $4-2=2$를 갖는다.

18. 수열의 극한 정답 ③

$\cup B=A_{k+2}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k+2\}$에서

$n(A)=2$를 만족시키는 집합 A의 개수는 ${}_{k+2}\mathrm{C}_2$와 같고, $A\cup B=A_{k+2}$가 되려면 집합 B가 집합 A_{k+2}에서 집합 A의 원소를 제외한 나머지 원소 k개를 반드시 포함해야 하므로 집합 B의 개수는 $2^2=4$이다.

따라서 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수를 a_k라 할 때,

$a_k={}_{k+2}\mathrm{C}_2\times 4=\frac{(k+2)(k+1)}{2}\times 4$

$=2(k+1)(k+2)$

$\therefore\ {}^{\infty}_{k=1}\frac{1}{a_k}$

$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}$

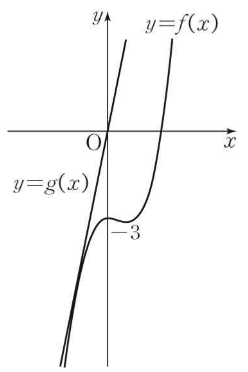
19. 다항함수의 미분법 정답 ④

$x^3-x^2-ax-3=0$에서 $x^3-x^2-3=ax$이므로

$f(x)=x^3-x^2-3,\ g(x)=ax$라 하면

$x^3-x^2-ax-3=0$의 실근은 $f(x)$의 그래프와

$g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 된다.



위 그림에서 $f(x)$의 그래프와 $g(x)$의 그래프가 접하는

접점을 $\ t,\ t^3-t^2-3)$라 할 때, 접선의 기울기는

$'(t)=3t\quad-2t$이고, $(0,\ 0)$과 접점사이의 기울기와 같다.

따라서 $3t^2-2t=\dfrac{t^3-t^2-3}{t}$,

$2t^3-t^2+3=0,\ (t+1)(2t^2-3t+3)=0$

$\therefore\ t=-1,\ f(-1)=5$

그러므로 직선 $y=ax$가 곡선 $y=x^3-x^2-3$과 접할 때,

기울기 $a=5$이다.

또한, a는 한자리 자연수 이므로 주어진 조건을 만족시키는

a의 개수는 $6,\ 7,\ 8,\ 9$인 4이다.

20. 방정식과 부등식

정답 ⑤

$x=n+\alpha(n\quad$ 정수, $0\le\alpha<1)$이라 하면

$x[x]+187=[x^2]+[x]$

$n(n+\alpha)+187=\quad n+\alpha)^2]+n,$

$n^2+n\alpha+187=[n^2+2n\alpha+\alpha^2]+n\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$0\le\alpha<1$이므로

$n^2\le[n^2+2n\alpha+\alpha^2]<n^2+2n+1$

㉠에서 $[n^2+2n\alpha+\alpha^2]=n^2+n(\alpha-1)+187$이므로

$n^2\le n^2+n(\alpha-1)+187<n^2+2n+1,$

$0\le n(\alpha-1)+187<2n+1,$

$\dfrac{186}{3-\alpha}<n\le\dfrac{187}{1-\alpha},$

$93<n\le187\,(\because 0\le\alpha<1)$

$n=94,\ 95,\ \cdots,\ 187$이므로 주어진 방정식의 근의

개수는 $187-93=94$이다.

21. 함수

정답 ③

$f(x+g(y))=(x+y^2-1)^2-1$에 $y=7$을 대입하면

$f(x+g(7))=(x+7^2-1)^2-1=(x+48)^2-1$

$g(7)=-x$라 하면

$f(x-x)=f(0)=(x+48)^2-1=3$

$(x+48)^2=4,\ x+48=\pm2$

$\therefore\ x=-46$ 또는 $x=-50$

따라서 $g(7)=46$ 또는 $g(7)=50$이다.

(i) $g(7)=46$일 때,

$f(x+g(y))=f(x+46)=(x+48)^2-1\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $x=-39$를 대입하면

$f(7)=(-39+48)^2-1=9^2-1=80$

$\therefore\ f(7)+g(7)=80+46=126$

(ii) $g(7)=50$일 때,

$f(x+g(y))=f(x+50)=(x+48)^2-1\cdots\cdots$ ㉡

㉡에 $x=-43$을 대입하면

$f(7)=(-43+48)^2-1=5^2-1=24$

$\therefore f(7)+g(7)=24+50=74$

따라서 (i), (ii)에서 $f(7)+g(7)$의 값 중에서 가장 큰

값은 126이다.

22. 수열의 극한

정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\ _{k=1}^{2n}\frac{k^2(5k^2+3)}{n^3(n^2+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{5k^4+3k^2}{n^3(n^2+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left\{\frac{5k^4}{n^3(n^2+1)}+\frac{3k^2}{n^3(n^2+1)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left\{5\times\left(\frac{k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}\times\frac{n^2}{n^2+1}\right\}$$

$$+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left\{3\times\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{n^2+1}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left\{5\times\left(\frac{k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}\right\}$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left\{3\times\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}\times\int_0^2 5x^4+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}\times\int_0^2 3x^2$$

$$=1\times\left[x^5\right]_0^2+0\times\left[x^3\right]_0^2$$

$$=2^5=32$$

23. 다항함수의 적분법 정답 ③

함수 $f(x)=x^3$ 의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ a^3)$ 에서

접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+a^3=3a^2x-2a^3$

위의 접선이 곡선 $y=x^3$ 과 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^3=3a^2x-2a^3$$

$$x^3-3a^2x-2a^3=0,\quad (x-a)^2(x+2a)=0$$

$$\therefore x=a \text{ 또는 } x=-2a$$

따라서 $\mathrm{B}(-2a,\ -8a^3)$

함수 $f(x)=x^3$ 의 그래프의 점 B 에서 접선의 방정식은

$$y=f'(-2a)(x+2a)-8a^3=12a^2x+16a^3$$

따라서 같은 방법으로 점 C 의 좌표를 구하면

$$\mathrm{C}(4a,\ 64a^3)$$

그러므로 선분 BC 와 곡선 $y=x^3$ 사이의 넓이는

$$\int_{-2a}^{4a}-x^3+12a^2x+16a^3dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+6a^2x^2+16a^3x\right]_{-2a}^{4a}$$

$$=(-64a^4+96a^4+64a^4)-(-4a^4+24a^4-32a^4)$$

$$=108a^4$$

선분 AB 와 곡선 $y=x^3$ 사이의 넓이는

$$\int_{-2a}^{a}x^3-3a^2x+2a^3\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}a^2x^2+2a^3x\right]_{-2a}^{a}$$

$$=\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{3}{2}a^4+2a^4\right)-(4a^4-6a^4-4a^4)=\frac{27}{4}a^4$$

이므로 구하고자 하는 값은 $\dfrac{108a^4}{\frac{27}{4}a^4}=\dfrac{108}{\frac{27}{4}}=16$

24. 수열의 극한 정답 ②

$A=\begin{pmatrix}0&4\\5&1\end{pmatrix}$ 일 때, A^n 의 $(1,\ 1)$ 성분을 x_n 이라 하고

$(1,\ 2)$ 성분을 y_n 이라 하면,

$x_n=5y_{n-1},\ y_{n+1}=4x_n+y_n$ 이 성립한다.

따라서 $y_{n+1}=20y_{n-1}+y_n$ ……㉠

㉠을 변형하면 $y_{n+1}+4y_n=5(y_n+4y_{n-1})$ 이고,

$y_1=4,\ y_2=4$ 이므로 수열 $\{y_{n+1}+4y_n\}$ 은 첫째항이

$y_2+4y_1=20$, 공비가 5 인 등비수열이다.

따라서 $y_{n+1}+4y_n=20\cdot5^{n-1}$ ……㉡

㉡의 양변을 5^{n+1} 로 나누면 $\dfrac{y_{n+1}}{5^{n+1}}+\dfrac{4y_n}{5^{n+1}}=\dfrac{20}{25}$ 이고

$$\lim_{\to\infty} \frac{y_{n+1}}{\ {}^{n+1}} + \frac{4y_n}{5^{n+1}}\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_{n+1}}{5^{n+1}} + \frac{4}{5}\cdot\frac{y_n}{5^n}\right) = \frac{20}{25} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

이 성립한다.

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{5^n}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{5^n} = k$라 하면 ㉢에서

$k + \frac{4}{5}k = \frac{20}{25} \qquad \therefore\ k = \frac{4}{9}$

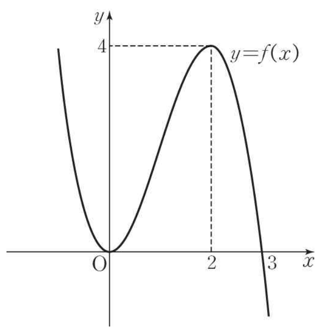
이때, $\frac{x_n}{5^n} = \frac{5y_{n-1}}{5^n} = \frac{y_{n-1}}{5^{n-1}}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{5^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_{n-1}}{5^{n-1}} = \frac{4}{9}$이다.

25. 도형의 방정식

정답 ⑤

ㄱ.(참) $f(x) = x^2(3-x)$라 두면 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(2) = 4,\ f(3) = 0$이므로

$2 < a \le 3$이면 $f(3) \le f(a) < f(2)$,

즉 $a^2(3-a) < 4$가 성립한다.

ㄴ.(참) a를 고정된 상수라 하고, 를 b에 대한 함수

$f(b) = a^2b + b^2\ 3 - a - b) + (3-a-b)^2a$라

하면

$f'(b) = a^2 + 2b(3-a-b) - b^2 - 2(3-a-b)a$

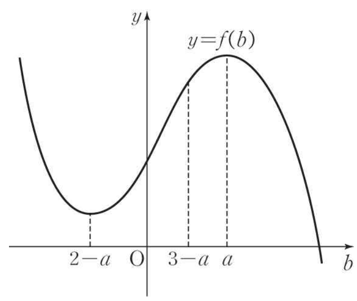
$= -3\ b^2 - 2b + a(2-a)\}$

$= -3(b-a)(b+a-2)$

조건에서 $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 3$의 영역에 점 $(a,\ b)$가 있고, a를 고정된 상수라 했으므로,

$a \ge 0,\ b \ge 0,\ a+b \le 3$에서 $0 \le b \le 3-a$

이다. $2 < a \le 3$일 때, $2-a < 0,\ 3-a < a$이므로 함수 $f(b)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $0 \le b \le 3-a$에서 $2 < a \le 3$일 때,

함수 $f(b)$는 $b = 3-a$일 때, 최댓값을 갖는다.

따라서 $2 < a \le 3$일 때, A의 최댓값은 주어진 식 A에 $b = 3-a$을 대입한 값이므로 $a^2(3-a)$이 된다.

$a^2(3-a) - A = a^2(3-a) - a^2(3-a) \ge 0$

즉 $a^2(3-a)$에서 A의 최댓값을 빼도

$a^2(3-a) - A \ge 0$이므로 항상 성립한다

ㄷ.(참) ㄴ에서 $0 \le b \le 3-a$이므로

$10a \le 10a + b \le 9a + 3$이다. 따라서 $10a + b$의

최댓값은 의 값에 따라 결정되어지고, a값이 커질

수록 $10a+b$의 최댓값도 커지게 된다.

조건에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 3$의 영역에

점 $(a,\ b)$가 있으므로 $0 \leq a \leq 3$이고 ㄱ, ㄴ에서

$2 < a \leq 3$이면, $\leq a\ (3-a) < 4$이므로

$A < 4$가 되어 $A = 4$를 만족시키는 점 $(a,\ b)$가

존재하지 않는다. 따라서 $a = 2$이고, $A = 4$일 때,

$10a+b$는 최댓값을 갖는다.

$A = a^2 b + b^2\ 3-a-b) + (3-a-b)^2 a = 4$에

$a = 2$를 대입하면,

$4b + b^2(1-b) + 2(1-b)^2 = 4$

$b^3 - 3b^2 + 2 = 0$, $(b-1)(-b^2+2b+2) = 0$

따라서 $a = 2$, $b = 1$일 때, $10a+b$는 최댓값

21을 갖는다.

외국어(영어) 영역