Ⅱ. 2012학년도 1차 시험 해설

수리 영역

1. ⑤	2. ④	3. ④	4. ②	5. ①
6. ③	7. ②	8. ①	9. ③	10. ④
11. ②	12. ②	13. ①	14. ④	15. ③
16. ②	17. ③	18. ④	19. ⑤	20. ④
21. ①	22. ⑤	23. ③	24. ①	25. ③

1. 식과 그 연산

정답 ⑤

$1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$에서

$\frac{xy+yz+zx}{xyz} = 0 \qquad \therefore\ xy+yz+zx = 0$

$x\ \ + y^2 + z^2 = 2$에서

$(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = 2$

$\therefore\ (x+y+z)^2 = 2$

$\therefore\ (x+y+z)^{12} = \ (x+y+z)^2\}^6$

$= 2^6 = 64$

2. 순열과 조합

정답 ④

집합 $\ \ = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$이라 하면 조건 (나)에서 1,

3, 5는 집합 $A-B$의 원소이므로 나머지 원소 7, 9, 11

은 세 집합 $A\cap B$, $B-A$, $U-(A\cup B)$ 중의 원소가

된다. 따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는 세 원소 7, 9, 11

을 세 집합 $A\cap B$, $B-A$, $U-(A\cup B)$에 배열하는 방

법의 수와 같으므로

$3^3 = 27$(개)

이다.

3. 방정식과 부등식

정답 ④

일차방정식 $a(ax-1)-(x+1)=0$을 정리하면

$(a^2-1)x = a+1$

$(a+1)(a-1)x = a+1$ …… ㉠

㉠에서 $a=1$이면 $0\cdot x = 2$이므로 근을 갖지 않는다.

$\therefore\ a = 1$

따라서 방정식 $x^2-3x-4=0$에서

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$

즉, $\alpha=-1$, $\beta=4$ 또는 $\alpha=4$, $\beta=-1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=17$

이다.

4. 순열과 조합

정답 ②

네 자리의 자연수가 25의 배수가 되려면 마지막 두 자리의

숫자가 25의 배수이어야 한다.

(i) □ 5인 경우,

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 2, 5, 0을 제외한

4가지의 숫자가 올 수 있고,

백의 자리에는 천의 자리에 해당하는 숫자와 2, 5를

제외한 4가지의 숫자가 올 수 있으므로

$4 \times 4 = 16$(가지)

(ii) □□ 5 0인 경우,

천의 자리에는 5, 0을 제외한 5가지의 숫자가 올 수

있고,

백의 자리에는 천의 자리에 해당하는 숫자와 5, 0을

제외한 4가지의 숫자가 올 수 있으므로

$5 \times 4 = 20$(가지)

(iii) □□ 7 5인 경우,

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 7, 5, 0을 제외한

4가지의 숫자가 올 수 있고,

백의 자리에는 천의 자리에 해당하는 숫자와 7, 5를

제외한 4가지의 숫자가 올 수 있으므로

$4 \times 4 = 16$(가지)

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$16 + 20 + 16 = 52$(가지)

이다.

5. 다항함수의 미분법

정답 ①

$$\lim_{\to 0} \frac{f(3x - x^2) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(3x - x^2) - f(0)}{3x - x^2} \cdot (3 - x)\Big\}$$

$$= f'(0) \times 3 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore f'(0) = \frac{1}{9}$$

6. 수와 연산

정답 ③

$(1+i)^2 = 2i$, $(1- \quad 3i)^3 = -8$이므로

$$\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\Big)^6 = \frac{\{(1+i)^2\}^3}{(1-\sqrt{3}i)^3\}^2}$$

$$= \frac{(2i)^3}{(-8)^2} = -\frac{i}{2^3}$$

$$\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\Big)^{13}$$

$$= \left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{12} \times \left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)$$

$$= \left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^6\Big\}^2 \times \frac{(1+i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$

$$= -\frac{i}{2^3}\Big)^2 \times \frac{(1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2^8} - \frac{\sqrt{3}+1}{2^8}i$$

$x = \frac{3-1}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{3}+1}{2^8}$

$\therefore |x|+|y| = \frac{\sqrt{3}-1}{2^8} + \frac{\sqrt{3}+1}{2^8}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2^7}$

7. 지수함수와 로그함수

정답 ②

주어진 방정식의 양변에 밑이 15인 로그를 취하면

$\log_{15} \sqrt{15} + (\log_{15} x)^2 = \log_{15} x^2$

$2(\log_{15} x)^2 - 4(\log_{15} x) + 1 = 0$

$\log_{15} x =$ 로 치환하면

$2X^2 - 4X + 1 = 0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 실근을 α, β라 하면 ㉠의 두 실근은

$\log_{15}\alpha$, $\log_{15}\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의해
$\log_{15}\alpha + \log_{15}\beta = \log_{15}\alpha\beta = 2$

$\therefore \alpha\beta = 15^2$

따라서 구하는 모든 실근의 곱은 15^2이다.

8. 행렬과 그래프

정답 ①

$A^2 + A + E = O$를 변형하면

$-A(A+E) = E \qquad \therefore A^{-1} = -(A+E)$

즉, 행렬 A의 역행렬이 존재하므로
$A^2 + A + E = O$의

양변의 오른쪽에 행렬 A^{-1}를 곱하면

$A + E + A^{-1} = O$

$\therefore f(A) = A + A^{-1} = -E$

$A^2 + (A^2)^{-1} = A^2 + (A^{-1})^2$

$= (A + A^{-1})^2 - 2E$

$= (-E)^2 - 2E = -E$

$\therefore f(A^2) = -E$

$A^4 + (A^4)^{-1} = A^4 + (A^{-1})^4$

$= A^2 + (A^{-1})^2\}^2 - 2E$

$= (-E)^2 - 2E = -E$

$\therefore f(A^{2^2}) = -E$

$\vdots$

$\therefore f(A^{2^n}) = -E$ (단, n은 음이 아닌 정수)

$\therefore f(A)f(A^{2^1})f(A^{2^2}) \cdots f(A^{2^{13}})$

$= (-E)(-E)\cdots(-E)$

$= (-E)^{14} = E$

9. 다항함수의 적분법

정답 ③

함수 $f(x)$가 열린 구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로

$x = 1$에서 연속이어야 한다.

즉,

$f(1) = a + b = \lim_{x \to 1-0} (4x - 3) = 1$

$a+b=1$ ...... ㉠

또한, 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x)=\begin{cases} 4 & (0\le x<1) \\ 2ax+b & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

이므로

$f'(1)=4=2a+b$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-2$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} 4x-3 & (0\le x<1) \\ 3x^2-2x & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 (4x-3)\,dx+\int_1^2 (3x^2-2x)\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[2x^2-3x\right]_0^1+\left[x^3-x^2\right]_1^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(-1)+4\}$$

$$=\frac{3}{2}$$

정답 ④

10. 다항함수의 미분법

함수 $f(x)=-x^3-x^2+x+1$을 미분하면

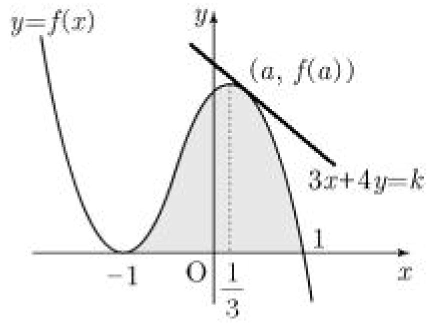
$f'(x)=-3x^2-2x+1=-(x+1)(3x-1)$

따라서 함수 $f(x)$의 증가 또는 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0 (극소)	↗	$\frac{32}{27}$ (극대)	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 대하여 주어진 영역

는 다음 그림의 어두운 부분이다.



이때, $3x+4y=k$라 하면 직선 $3x+4y=k$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, k의 값이 최대가 된다.

따라서 $-1\le x\le 1$에서 접선의 기울기가 $-\frac{3}{4}$이 되는

곡선 $y=f(x)$ 위의 접점의 좌표를 $(\alpha, f(\alpha))$라 하면

$f'(\alpha)=-3\alpha^2-2\alpha+1=-\frac{3}{4}$

$12\alpha^2+8\alpha-7=(2\alpha-1)(6\alpha+7)=0$

$\therefore\ \alpha=\frac{1}{2}\ \ \because\left(\alpha>\frac{1}{3}\right)$

$x=\frac{1}{2}$일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{9}{8}$

그러므로 구하는 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{8}\right)$이다.

따라서 $x+4y$는 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{9}{8}$일 때 최대가 되고,

최댓값은

$$3\times\frac{1}{2}+4\times\frac{9}{8}=6$$

이다.

11. 방정식과 부등식

정답 ②

이차방정식 $ax\ \ -bx+3c=0$의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha+\beta=\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{3c}{a}$$

그런데 조건 (나)에서 $1<\alpha<2$, $5<\beta<6$이므로

$$6<\alpha+\beta=\frac{b}{a}<8,\ 6a<b<8a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$5<\alpha\beta=\frac{3c}{a}<12,\ 5a<3c<12a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때, a, b, c는 한 자리의 자연수이므로 ㉠에서

$a=1$, $b=7$

$a=1$을 ㉡에 대입하면

$c=2$ 또는 $c=3$

그런데 $c=2$이면 주어진 이차방정식이 $x^2-7x+6=0$

이 되므로

$(x-1)(x-6)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=6$

이는 조건 (나)에 모순이다.

$\therefore\ c=3$

$\therefore\ a+2b+3c=1+2\times7+3\times3=24$

12. 통계

정답 ②

이산확률변수 X가 1, 2, 3, …, 90의 값을 가지므로

$\displaystyle\ \ _{x=1}^{90}\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=1$을 만족시켜야 한다. 그런데

$\cos^2(x^\circ)+\cos^2(90^\circ-x^\circ)$

$=\cos^2(x^\circ)+\sin^2(x^\circ)=1$

이므로 이를 이용하면

$$\sum_{x=1}^{90}\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$$

$$=a\sum_{x=1}^{90}\cos^2(x^\circ)$$

$$=a(\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cos^2 3^\circ+\cdots+\cos^2 90^\circ)$$

$$=a\ (\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\cos^2 88^\circ)$$

$$+\cdots+(\cos 44^\circ+\cos^2 46^\circ)$$

$$+\cos^2 45^\circ+\cos^2 90^\circ\}$$

$$=a\ (1+1+\cdots+1)+\ \ \frac{2}{2}\Big)^2+0^2\Big\}$$

$$=a\ 44+\frac{1}{2}\Big)$$

$$=\frac{89}{2}a=1$$

$$\therefore\ a=\frac{2}{89}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(30\le\mathrm{X}\le60)$

$$=\sum_{x=30}^{60}\frac{2}{89}\cos^2(x^\circ)$$

$\frac{2}{89}\left(\cos^2 30^\circ + \cos^2 31^\circ + \cdots + \cos^2 60^\circ\right)$

$= \frac{2}{89}\{(\cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ)$

$+ (\cos^2 31^\circ + \cos^2 59^\circ) + \cdots$

$+ (\cos^2 44^\circ + \cos^2 46^\circ) + \cos^2 45^\circ\}$

$= \frac{2}{89}\left\{(1+1+\cdots+1) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}$

$= \frac{2}{89}\left(15 + \frac{1}{2}\right) = \frac{31}{89}$

13. 수열의 극한

정답 ①

점 A_n 의 좌표가 $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n \cos\frac{n\pi}{3}, \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin\frac{n\pi}{3}\right)$이므로

$\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n \cos\frac{n\pi}{3}\right\}^2 + \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n \sin\frac{n\pi}{3}\right\}^2$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{2n}\left(\cos^2\frac{n\pi}{3} + \sin^2\frac{n\pi}{3}\right)$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

따라서 점 A_n은 중심의 좌표가 $(0, 0)$이고, 반지름의 길이가 $\left(\frac{3}{4}\right)^n$인 원 위의 점이다.

즉, $\overline{\mathrm{OA}_n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$이다.

$n = 1, 2, 3, \cdots$으로 변할 때 점 A_n은 원의 둘레를 따라 $\frac{\pi}{3}$ 만큼 이동하므로

$\angle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{OA}_n = \frac{\pi}{3}$ (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$)

따라서 삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{OA}_n$에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}^2$

$= \overline{\mathrm{OA}_n}^2 + \overline{\mathrm{OA}_{n+1}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{OA}_n}\times\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}\times\cos\frac{\pi}{3}$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2n+2} - 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{2n+1}\times\frac{1}{2}$

$= \frac{13}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

$\therefore \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}} = \frac{\sqrt{13}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{4}\times\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3\sqrt{13}}{16}}{\frac{1}{4}}$

$= \frac{3\sqrt{13}}{4}$

《다른 풀이》

점 $\mathrm{A}_n\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$의 좌표를 구해 보면

$n = 1$일 때,

$\frac{3}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$\therefore \mathrm{A}_1\left(\frac{3}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$

$n = 2$일 때,

$\left(\frac{3}{4}\right)^2\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{9}{16}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{32}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{9}{16}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{32}$

$\therefore \mathrm{A}_2\left(-\frac{9}{32}, \frac{9\sqrt{3}}{32}\right)$

$$\mathrm{A}\ \ \mathrm{A}_2 = \quad \frac{3}{8} - \left(-\frac{9}{32}\right)\Big\}^2 + \quad \frac{3\ \ 3}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{32}\Big)^2$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

따라서 주어진 무한등비급수는 첫째항이 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 이고, 공비가 $\frac{3}{4}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = \frac{\frac{3\sqrt{13}}{16}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{13}}{4}$$

14. 수열

정답 ④

$a_{n+1} = n \cdot (-1)^n - 3a_n$에 $n = 1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면

$a_2 = -1 - 3a_1$

$a_3 = 2 - 3a_2$

$a_4 = -3 - 3a_3$

$\vdots$

$a_{2012} = -2011 - 3a_{2011}$

위의 식을 각 변끼리 더하면

$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2012}$

$= (-1 + 2 - 3 + \cdots - 2011)$

$\qquad - 3(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2011})$

$= -1006 - 3(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2011})$

그런데 $a_1 = a_{2012} + 2$이므로 $a_{2012} = a_1 - 2$를 대입하면

$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2012}$

$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2011} - 2$

$= -1006 - 3(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2011})$

$4(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2011}) = -1004$

$\therefore \sum_{n=1}^{2011} a_n = -\frac{1004}{4} = -251$

15. 수학적 기초

정답 ③

전체 참가자의 수를 n이라 하고, 이중에서 정해진 기준을 만족시킨 참가자의 수를 x라 하면 오차의 한계가 0.5%이므로

$0.935 \times n \le x < 0.945 \times n$

$\Leftrightarrow\ 0.935 \le \frac{x}{n} < 0.945 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때, $n - x = k$라 하면 $k \ge 1$이고, $\frac{x}{n} = 1 - \frac{k}{n}$ 이므로

㉠에서

$0.935 \le 1 - \frac{k}{n} < 0.945$

$\therefore 0.055 < \frac{k}{n} \le 0.065$

그런데 $\frac{k}{n}$ 의 값이 일정하므로 위의 식에서 k의 값이 증가하면 n의 값도 증가하여야 한다. 따라서 n의 최솟값을 구하려면 $k = 1$인 경우를 생각하여야 한다.

즉, $0.055 < \frac{1}{n} \le 0.065$에서

$15.3\times\times\times \le n < 18.1\times\times\times$

$\therefore n = 16$ 또는 $n = 17$ 또는 $n = 18$

따라서 가능한 참가자 수의 최솟값은 6이다.

16. 지수함수와 로그함수

정답 ②

$2 \ = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32, \cdots$

$5^1 = 5,\ 5^2 = 25,\ 5^3 = 125,\ 5^4 = 625,\ 5^5 = 3125, \cdots$

ㄱ. (참) $n = 5,\ a = 3$일 때,

$3 \cdot 10^p < 2^5 < 4 \cdot 10^p$에서 $p = 1$

그러므로 $a \cdot 10^p < 2^n < (a+1) \cdot 10^p$인 자연수 p가

있다.

ㄴ. (참) $a = 3$일 때,

$3^2 < 10^r < 4^2$에서 $r = 1$
그러므로 $a^2 < 10^r < (a+1)^2$인 자연수 r가 있다.

ㄷ. (거짓) $a = 7$이라면 ㄴ에서 $7^2 < 10^r < 8^2$인 자연수

r가 존재하여야 한다.

그런데 이를 만족시키는 자연수 r가 존재하지 않으므로

$a \neq 7$이다. 즉, a의 값이 7이 되도록 하는 n이 존재하

지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17. 다항함수의 적분법

정답 ③

$y \geq 4x^2 + 2px - 9$가 나타내는 영역 를 원점에 대하여

대칭이동하면

$(-y) \geq 4(-x)^2 + 2p(-x) - 9$

$\therefore\ y \leq -4x^2 + 2px + 9$

따라서 영역 $A \cap B$는 두 곡선

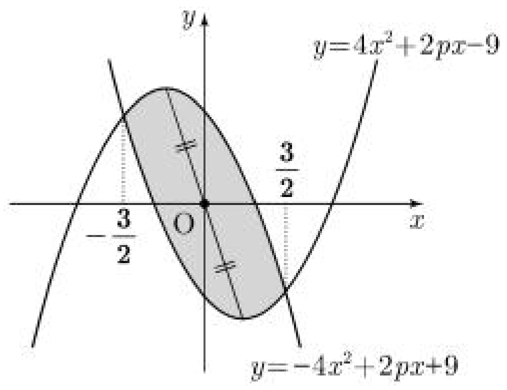
$y = 4x^2 + 2px - 9,\ y = -4x^2 + 2px + 9$

로 둘러싸인 부분이다.

$4x^2 + 2px - 9 = -4x^2 + 2px + 9$에서

$8x^2 - 18 = 0,\ 2(2x+3)(2x-3) = 0$

$\therefore\ x = -\frac{3}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$



따라서 구하는 넓이는

$$^{\frac{3}{2}}_{-\frac{3}{2}}\ (-4x^2 + 2px + 9) - (4x^2 + 2px - 9)\}dx$$

$$= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} (-8x^2 + 18)dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{3}{2}} (-8x^2 + 18)dx$$

$$2\left[-\frac{8}{3}x\ \ +18x\right]_{0}^{\frac{3}{2}}$$

$=36$

$$=1+2+6+18=27$$

(i)~(iv)에서

$$\sum_{n=1}^{80} b_n=1+3+9+27=40$$

18. 수열

정답 ④

$80=2222_{(3)}$이므로 1부터 80까지의 자연수를 삼진법으로 나타내면 네 자리 이하의 수가 된다.

(i) $\ _{(3)}$일 때, $n=1$ 또는 $n=2$이므로

$$\ {}^{2}_{n=1}\ b_n=\frac{1}{3}(1+2)=1$$

(ii) $\square\square_{(3)}$일 때, $3\le n\le 8$이므로

$$\sum_{n=3}^{8} b_n=\frac{1}{3^2}(1+2)\cdot 3+\frac{1}{3}(0+1+2)\cdot 2$$

$$=1+2=3$$

(iii) $\square\square\square_{(3)}$일 때, $9\le n\le 26$이므로

$$\sum_{n=9}^{26} b_n=\frac{1}{3^3}(1+2)\cdot 9+\frac{1}{3^2}(0+1+2)\cdot 6$$

$$+\frac{1}{3}(0+1+2)\cdot 6$$

$$=1+2+6=9$$

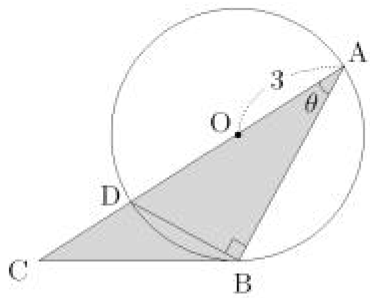
(iv) $\square\square\square\square_{(3)}$일 때, $27\le n\le 80$이므로

$$\sum_{n=27}^{80} b_n=\frac{1}{3^4}(1+2)\cdot 27+\frac{1}{3^3}(0+1+2)\cdot 18$$

$$+\frac{1}{3^2}(0+1+2)\cdot 18+\frac{1}{3}(0+1+2)\cdot 18$$

19. 삼각함수

정답 ⑤



그림과 같이 선분 AC가 원 O와 만나는 점을 D라 하면

$\angle\mathrm{ABD}=\frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 ABD는 직각삼각형이고,

$\angle\mathrm{OAB}=\theta$라 하면

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{6}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=2$

피타고라스의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{AB}}=\ \ 6^2-2^2=\ \ 32=4\sqrt{2}$

또, $\angle\mathrm{OBA}=\angle\mathrm{CBD}=\theta$이므로 삼각형 BCD와 삼각형 ACB는 닮음이다.

즉, $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{AB}}=2:4\sqrt{2}=1:2\sqrt{2}$이므로

CD x, BC $= y$라 하면

$\overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{AC}} = y : (6+x) = 1:2 \quad 2$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{CD}} : \overline{\mathrm{CB}} = x : y = 1 : 2\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x = \overline{\mathrm{CD}} = \frac{6}{7},\ y = \overline{\mathrm{BC}} = \frac{12}{7}\sqrt{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}} = \frac{48}{7}$이고 $\overline{\mathrm{AB}} = 4\sqrt{2}$이므로 삼각형

ACB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \sin\theta = \frac{1}{2} \times \frac{48}{7} \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{32}{7}\sqrt{2}$

20. 방정식과 부등식

정답 ④

$x \quad - 10x - 5 = ax + b$를 정리하면

$x^2 - (a+10)x - (b+5) = 0$ …… ㉠

이때, ㉠이 두 양의 실근 α, β를 가지므로 근과 계수의 관

계에 의해

$\alpha + \beta = a + 10 > 0$에서 $a > -10$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a의 최솟값은 -9이다.

$\therefore\ p = -9$

$\alpha\beta = -(b+5) > 0$에서 $b < -5$

또, ㉠에서 $a = -9$일 때, 이차방정식

$x^2 - x - (b+5) = 0$의 판별식을 라 하면 $D \geq 0$이어

야 하므로

$D = 1 + 4(b+5) \geq 0,\ b+5 \geq -\frac{1}{4}$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= 1 + 2(b+5)$

$\geq 1 + 2 \times \ -\frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{2}$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

$\therefore\ q = \frac{1}{2}$

$\therefore\ pq = -9 \times \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$

21. 도형의 방정식

정답 ①

주어진 집합이 공집합이 되지 않으려면 방정식

$4x^2 - 2ax + a = -4x^2 + 3a$의 실근이 존재하여야 한다.

$4x^2 - 2ax + a = -4x^2 + 3a$를 정리하면

$8x^2 - 2ax - 2a = 0$

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 + 16a \geq 0,\ a(a+16) \geq 0$

$\therefore\ a \leq -16$ 또는 $a \geq 0$

22. 순열과 조합

정답 ⑤

ㄱ. (참) $! = 1\times2\times3\times4\times5 = 120 > 99$

이므로 두 자리의 자연수가 집합   의 원소가 되려면

각 자릿수가 5 미만이어야 한다.

또, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$이므로 각 자릿수의 계승의

합이 두 자리의 자연수가 되려면 33 이상이어야 한다.

34일 때, $3!+4! = 6+24 = 30 \neq 34$

40일 때, $4!+0! = 24+1 = 25 \neq 40$

41일 때, $4!+1! = 24+1 = 25 \neq 41$

42일 때, $4!+2! = 24+2 = 26 \neq 42$

43일 때, $4!+3! = 24+6 = 30 \neq 43$

44일 때, $4!+4! = 24+24 = 48 \neq 44$

그러므로 두 자리의 자연수는 집합 M의 원소가 될 수

없다.

ㄴ. (참) $7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5040 > 999$

이므로 세 자리의 자연수가 집합 M의 원소가 되려면

각 자릿수는 7 미만이어야 한다.

ㄷ. (참) 8자리 이상의 자연수의 최댓값은 99999999

이고 이때, 각 자릿수의 계승의 합은

$9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!$

$= 8\times9! = 2903040$

그런데 8자리 자연수의 최솟값은 10000000이므로

$8\times9! < 10$

그러므로 집합 M의 원소 중에서는 8자리 이상의 자연

수가 존재하지 않는다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

23. 확률

정답 ③

네 자리 자연수 a, b를 만드는 방법의 수는 각각 ${}_5\mathrm{P}_4 = 120$(가지)이므로 전체 경우의 수는

$120\times120 = 14400$(가지)

(ⅰ) a, b를 이루는 자연수의 조합이 같은 경우,

a를 만드는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{P}_4 = 120$(가지)

예를 들어 $a = 1234$일 때, 주어진 조건을 만족시키는

b는 다음과 같이 9가지를 생각할 수 있다.

	천	백	십	일
a	1	2	3	4
b	2	1	4	3
		3	4	1
		4	1	3
	3	1	4	2
		4	1	2
			2	1
	4	1	2	3
		3	1	2
			2	1

$\therefore\ {}_5\mathrm{P}_4\times9 = 1080$(가지)

(ⅱ) a, b를 이루는 자연수의 조합이 같지 않은 경우,

a, b 각각을 이루는 자연수 중 단 하나의 숫자만 다르

게 조합된다.

예를 들어 $a = 1234$일 때, b를 이루는 자연수가 1,

2, 3, 5인 경우 다음과 같이 11가지를 생각할 수

있다.

	천	백	십	일
	1	2	3	4
b	2	1	5	3
		3	1	5
			5	1
		5	1	3
	3	1	2	5
			5	2
		5	1	2
			2	1
	5	1	2	3
		3	1	2
			2	1

이때, b를 이루는 자연수를 선택하는 방법의 수는

4(가지)이므로 $4 \times 11 = 44$(가지)

$\therefore\ \mathrm{P}_4 \times 44 = 5280$(가지)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{1080 + 5280}{14400} = \frac{53}{120}$$

이다.

$f(x) - g(x)$

$= x^4 - 3x^2 + (6-m)x + (1-n)$

$= x^4 - 2(\alpha+\beta)x^3 + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)x^2$

$- 2\alpha\beta(\alpha+\beta)x + \alpha^2\beta^2$

위의 식에서 각 항의 계수를 비교하면

$\alpha + \beta = 0$ …… ㉠

$\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta$에 ㉠을 대입하면

$2\alpha\beta = -3,\ \alpha\beta = -\dfrac{3}{2}$

$6 - m = -2\alpha\beta(\alpha+\beta) = 0$($\because$ ㉠)

$\therefore\ m = 6$

$1 - n = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \dfrac{9}{4}$

$\therefore\ n = -\dfrac{5}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y = 6x - \dfrac{5}{4}$이다.

24. 방정식과 부등식

정답 ①

구하는 직선의 방정식을 $g(x) = mx + n$이라 하면 직선

$y = g(x)$가 곡선 $y = f(x)$와 서로 다른 두 점에서 접하

므로 방정식 $y = f(x) - g(x)$는 서로 다른 두 개의 중근

을 가진다. 이때, 서로 다른 두 중근을 α, β라 하면

$f(x) - g(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

이므로

25. 수열의 극한

정답 ③

조건 (나)에서

$x_{n+2} = (1-t)x_{n+1} + t x_n$

이므로

$x_{n+2} - x_{n+1} = -t(x_{n+1} - x_n)$

즉, 수열 $x_n\}$의 계차수열을 $y_n\}$이라 하면 수열 $\{y_n\}$

은 공비가 $-t$인 등비수열이고,

$y_1 = x_2 - x_1 = a - 1$이므로

$$= x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} y_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a-1)(-t)^{k-1}$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} x_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a-1)(-t)^{n-1}$$

$$= 1 + \frac{a-1}{1+t}$$

그런데 a는 자연수이고, $0 < t < 1$이므로

$$\frac{a+1}{2} < 1 + \frac{a-1}{1+t} < a$$

즉, $\frac{a+1}{2} < \lim_{n \to \infty} x_n < a$이다. 조건 (다)에서 $\lim_{n \to \infty} x_n$
의 값이 정수가 되게 하는 실수 t의

개수가 11이므로

(i) a가 홀수일 때,

$$a - \frac{a+1}{2} - 1 = 11 \therefore a = 25$$

(ii) a가 짝수일 때,

$$a - \frac{a}{2} - 1 = 11$$

$$\therefore a = 24$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 a의 값의 합은

$25 + 24 = 49$