수리영역

1. ①	2. ⑤	3. ②	4. ⑤	5. ②
6. ③	7. ⑤	8. ②	9. ④	10. ①
11. ④	12. ⑤	13. ④	14. ③	15. ⑤
16. ③	17. ③	18. ④	19. ①	20. ①
21. ⑤	22. ④	23. ②	24. ②	25. ③

1. 지수함수와 로그함수 $\boxed{\text{정답 ①}}$

$= \log \quad 7-4 \quad 3\,) = \log_3(\quad 7-4\sqrt{3}\ )$

이므로 로그의 정의에 의해

$3^a = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$\quad = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 2-\sqrt{3}$

$3^{-a} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$

$\therefore\ 3^a + 3^{-a} = 4$

2. 행렬과 그래프 $\boxed{\text{정답 ⑤}}$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b-1 \\ c-1 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

주어진 두 연립방정식의 해가 모두 무수히 많으므로

두 행렬 $\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b-1 \\ c-1 & d \end{pmatrix}$의 역행렬이

모두 존재하지 않는다.

즉, $(a-1)(d-1)-bc=0$

$ad-a-d+1-bc=0 \quad \cdots\cdots$

이고, $ad-(b-1)(c-1)=0$

$ad+b+c-1-bc=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

그러므로 ㉠, ㉡을 연립하면

$a+b+c+d-2=0$

$\therefore\ a+b+c+d=2$

3. 함수 $\boxed{\text{정답 ②}}$

함수 $f(x)$가 분수함수이므로 $c \neq 0$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 점근선의 방정식이

$x=1,\ y=-2$이므로

$y = \dfrac{k}{c(x-1)} - 2$ (단, k는 상수) $\quad \cdots\cdots$ ㉠

또한, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 원점을 지나므로 ㉠에

$x=0,\ y=0$을 대입하여 정리하면 $k=-2c$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{-2}{x-1} - 2 = \dfrac{-2x}{x-1}$

이제, $f^{-1}(-1)=t$라 하면 $f(t)=-1$이므로

$\dfrac{-2t}{t-1} = -1,\ -2t = -t+1$

$\therefore\ t=-1$

$\therefore\ f^{-1}(-1)=-1$

4. 지수함수와 로그함수 $\boxed{\text{정답 ⑤}}$

(ⅰ) $x^2-2x=1$인 경우

$\quad x^2-2x-1=0$에서 $x=1\pm\sqrt{2}$

(ii) $-2x=-1,\ x^2+6x+5=2k$(k는 정수)인 경우

$x^2-2x+1=0$에서 $x=1$이고,

$1^2+6\cdot 1+5=12$(짝수)이므로 $x=1$은 주어진

식을 만족시킨다.

(iii) $x^2+6x+5=0$인 경우

$(x+1)(x+5)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=-5$이고,

두 값 모두 방정식 $x^2-2x=0$의 해가 아니므로

주어진 식을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 x의 개수는 5(개)이다.

5. 순열과 조합 정답 ②

(i) 두 명의 경찰관이 각각 (A, B), (C, D, E, F)로

나누어 순찰하는 방법의 수

$1\times 2!\times 4!\times 2!=96$(가지)

(ii) 두 명의 경찰관이 각각 (A, C, D), (B, E, F)로

나누어 순찰하는 방법의 수

$${}_2\mathrm{C}_1\times {}_4\mathrm{C}_2\times {}_2\mathrm{C}_2\times \frac{1}{2!}\times 3!\times 3!\times 2!=432\text{(가지)}$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 528(가지)이다.

6. 통계 정답 ③

대민 봉사 센터의 전화 상담의 통화 시간을 확률변수

라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 2^2)$을 따른다.

상담 전화 중 임의로 선택한 4통의 통화 시간의 평균을

X 라 하면 표본평균 $\overline{X}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}\ 8,\ \frac{2^2}{4}\Big)$

즉, $\mathrm{N}(8,\ 1^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

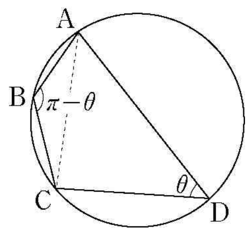
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(4\overline{X}\geq 30)&=\mathrm{P}(\overline{X}\geq 7.5)\\&=\mathrm{P}\ Z\geq \frac{7.5-8}{1}\Big)\\&=\mathrm{P}(Z\geq -0.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)\\&=0.5+0.192\\&=0.692\end{aligned}$$

7. 삼각함수 정답 ⑤

사각형 ABCD의 네 변의 길이 AB, BC, $\overline{\mathrm{CD}}$, DA가

이 순서대로 공비가 2 인 등비수열을 이루므로 네 변의

길이를 각각 $a,\ \sqrt{2}\,a,\ 2a,\ 2\sqrt{2}\,a$라 하자.



위의 그림과 같이 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle\mathrm{ADC}=\theta$라 두면, $\angle\mathrm{ABC}=\pi-\theta$이다.

그러므로 삼각형 ABC에서 제이코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AC}}^2&=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\cos(\pi-\theta)\\&=a^2+2a^2+2\sqrt{2}\,a^2\cos\theta\quad\cdots\cdots\end{aligned}$$

또, 삼각형 ADC에서 제이코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AC}}^2&=\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{DA}}^2-2\overline{\mathrm{CD}}\cdot\overline{\mathrm{DA}}\cdot\cos\theta\\&=4a^2+8a^2-8\sqrt{2}\,a^2\cos\theta\quad\cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

따라서 ㉡을 연립하면

$a\,(10\quad 2\cos\theta-9)=0$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{9\sqrt{2}}{20}$

8. 수와 연산 $\boxed{\text{정답 ②}}$

$z=a+bi\,(a,\,b$는 실수)라 하면

$\frac{z-z}{i}=\frac{a+bi-(a-bi)}{i}=2b<0$

이므로 $b<0$이다.

그러므로 $z\neq\overline{z}$이다.

조건에서 $\frac{z}{1+z^2}$가 실수이므로 $\frac{z}{1+z^2}=\frac{z}{1+z^2}$

즉, $\frac{z}{1+z^2}=\frac{\overline{z}}{1+(\overline{z})^2}$

$z+z(\overline{z})^2=\overline{z}+\overline{z}z^2,\ (z-\overline{z})(1-z\overline{z})=0$

$\therefore\ z\overline{z}=1\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $\frac{z^2}{1+z}$이 실수이므로 $\frac{z^2}{1+z}=\frac{z^2}{1+z}$

즉, $\frac{z^2}{1+z}=\frac{(\overline{z})^2}{1+\overline{z}}$

$z^2+z^2\,\overline{z}=(\overline{z})^2+(\overline{z})^2z,\ (z-\overline{z})(z+\overline{z}+\overline{z}z)=0$

$\therefore\ z+\overline{z}=-1\,(\because$ ㉠$)\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $z,\,\overline{z}$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2+x+1=0$

$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$\therefore\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\,(\because\ b<0)$

9. 식과 그 연산 $\boxed{\text{정답 ④}}$

$\omega^2+\omega+1=0$이므로

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=\omega^3-1=0$

$\therefore\ \omega^3=1$

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$이고,

$x+y+z=(\alpha-\beta)+(\alpha\omega-\beta\omega^2)+(\alpha\omega^2-\beta\omega)$

$\quad=\alpha(1+\omega+\omega^2)-\beta(1+\omega+\omega^2)$

$\quad=(\alpha-\beta)(1+\omega+\omega^2)=0$

$xyz=(\alpha-\beta)(\alpha\omega-\beta\omega^2)(\alpha\omega^2-\beta\omega)$

$\quad=(\alpha-\beta)(\alpha^2\omega^3-\alpha\beta\omega^2-\alpha\beta\omega^4+\beta^2\omega^3)$

$(\because\ \omega^2+\omega=-1,\ \omega^3=1)$

$\quad=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

$\quad=\alpha^3+a^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3$

$\quad=\alpha^3-\beta^3$

$\therefore\ x^3+y^3+z^3=3xyz=3(\alpha^3-\beta^3)$

[알아두기!]

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

10. 순열과 조합 $\boxed{\text{정답 ①}}$

(i) (삼차항)×(삼차항)×(일차항)×(상수항)일 때의 계수는

$\frac{4!}{2!}\times3\times a=36a$

(ii) (삼차항) (이차항)×(이차항)×(상수항)일 때의

계수는

$$\frac{4!}{2!}\times 3 \ \times a = 108a$$

(iii) (삼차항)×(이차항)×(일차항)×(일차항)일 때의 계수는

$$\frac{4!}{2!}\times 3\times 3^2 = 324$$

(iv) (이차항)×(이차항)×(이차항)×(일차항)일 때의 계수는

$$\frac{4!}{3!}\times 3^3\times 3 = 324$$

(i), (ii), (iii), (iv)에서

$36a+108a+324+324=2^3\times 3^5$

$2^4\times 3^2\times a+2^3\times 3^4=2^3\times 3^5$

$2a+3^2=3^3$

$\therefore\ a=9$

11. 지수함수와 로그함수

정답 ④

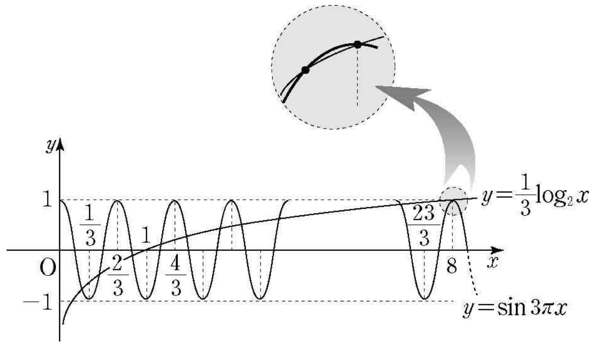
방정식 $\frac{1}{3}\log_2 x=\cos 3\pi x$를 만족시키는 실수 x의 개수는 함수 $y=\frac{1}{3}\log_2 x$와 $y=\cos 3\pi x$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

$\frac{1}{3}\log_2 x=1$에서 $x=8$, $\frac{1}{3}\log_2 x=-1$에서 $x=\frac{1}{8}$,

$\frac{1}{3}\log_2 x=0$에서 $x=1$이고, 함수 $y=\cos 3\pi x$의

주기가 $\frac{2}{3}$이므로 함수 $y=\frac{1}{3}\log_2 x$와 $y=\cos 3\pi x$의

그래프는 다음과 같다.



따라서 위의 그림과 같이 $n=1, 2, 3, \cdots, 24$일 때,

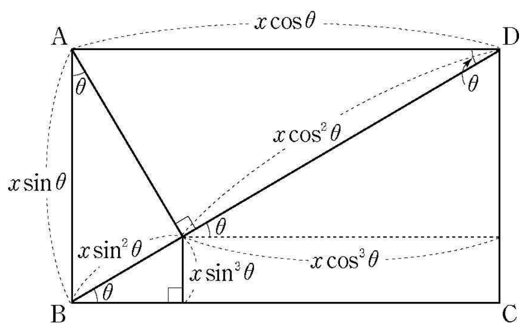
구간 $\frac{n-1}{3},\ \frac{n}{3})$에서 하나의 교점이 생기고,

점 $(8, 1)$에서 두 그래프가 만나므로 구하는 실근 x의

개수는 $12\times 2+1=25$(개)이다.

12. 삼각함수

정답 ⑤



$\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{BAE}=\angle \mathrm{EBF}=\angle \mathrm{DEG}=\theta$라 하고

$\mathrm{BD}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=x\sin\theta$, $\mathrm{BE}=\overline{\mathrm{AB}}\sin\theta=x\sin^2\theta$,

$\mathrm{EF}=\overline{\mathrm{BE}}\sin\theta=x\sin^3\theta$

$\mathrm{AD}=x\cos\theta$, $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AD}}\cos\theta=x\cos^2\theta$,

$\overline{\mathrm{EG}}=\overline{\mathrm{DE}}\cos\theta=x\cos^3\theta$

$a = x\sin\ \theta,\ b = x\cos^3\theta$

$\therefore\ a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}\sin^2\theta + x^{\frac{2}{3}}\cos^2\theta$

$= x^{\frac{2}{3}}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = x^{\frac{2}{3}}$

$\therefore\ x = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

13. 삼각함수 　　정답 ④

중심이 D 인 원의 반지름의 길이를 r라 하고, $\angle\mathrm{DBC} = \theta$ 라 하자.

$\mathrm{AB} = 1,\ \mathrm{BC} = 3,\ \overline{\mathrm{CD}} = r+1,\ \mathrm{AD} = 3+r,$

$\overline{\mathrm{BD}} = 4-r$이고, $\angle\mathrm{ABD} = \pi - \theta$이므로

삼각형 DAB에서 제이코사인법칙에 의하여

$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$

$= \frac{1^2 + (4-r)^2 - (3+r)^2}{2\cdot 1\cdot(4-r)}$

$= \frac{8-14r}{8-2r}$ ……

또, 삼각형 DBC에서 제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \frac{3^2 + (4-r)^2 - (r+1)^2}{2\cdot 3\cdot(4-r)}$

$= \frac{24-10r}{24-6r}$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서

$\frac{7r-4}{4-r} = \frac{12-5r}{12-3r}$

$(7r-4)(12-3r) = (4-r)(12-5r)$

$13r^2 - 64r + 48 = 0,\ (r-4)(13r-12) = 0$

$\therefore\ r = \frac{12}{13}\ \ (\because\ 0 < r < 4)$

14. 지수함수와 로그함수 　　정답 ③

일평균상대습도가 72 %이고, 일평균기온이 30 ℃일 때의 부패지수는

$\left(\frac{72-65}{14}\right)\times 1.05^{30} = \frac{1}{2}\times 1.05^{30}$

일평균상대습도가 h %이고, 일평균기온이 5 ℃일 때의 부패지수는

$\left(\frac{h-65}{14}\right)\times 1.05^{5}$

이므로 $\frac{1}{2}\times 1.05^{30} = \left(\frac{h-65}{14}\right)\times 1.05^{5}$

$h = 65 + 7\times 1.05^{25}$

이때,

$\log 1.05^{25} = 25\log 1.05$

$= 25\times 0.021 = 0.525 = \log 3.35$

이므로 $1.05^{25} = 3.35$

$\therefore\ h = 65 + 7\times 3.35 = 88.45$

따라서 h의 값의 범위로 알맞은 것은 ③이다.

15. 수와 연산 　　정답 ⑤

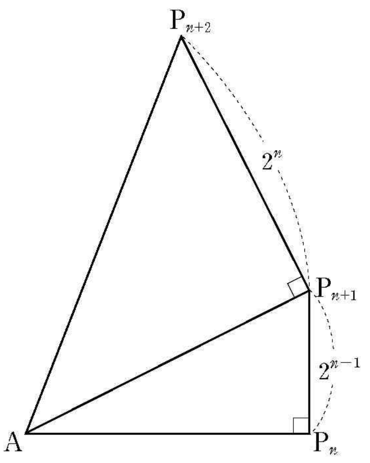
507 이하의 자연수 중에서 5로 나눈 나머지가 0, 1, 2, 3, 4인 자연수들의 집합을 각각 R_0, R_1, R_2, R_3, R_4라 하자.

집합 S가 조건 (나)를 만족하기 위해서는 집합 R_0의 원소를 2개 이상 포함해서는 안되고, 집합 R_1과 집합 R_4의 원소와 집합 R_2와 집합 R_3의 원소를 같이 포함해서도 안된다.

그런데, $(\quad) = 101$, $n(R_1) = 102$, $n(R_2) = 102$, $n(R_3) = 101$, $n(R_4) = 101$이므로 집합 S는 집합 $R_1 \cup R_2$의 원소와 집합 R_0의 원소 1개를 포함할 때 원소의 개수가 최대가 된다.

따라서 집합 S의 원소의 개수의 최댓값은 205이다.

16. 수열의 극한 $\boxed{\text{정답 ③}}$



$P_1P_2 = 1$이고 $P_nP_{n+1} = 2\overline{P_{n-1}P_n}$이므로

$\overline{P_nP_{n+1}} = 2^{n-1}$

$\therefore\ \overline{P_nP_{n+1}}^2 = 4^{n-1}$

또, $AP_{n+1}^{\ 2} = AP_n^{\ 2} + \overline{P_nP_{n+1}}^2$

$$= \overline{AP_n}^2 + 4^{n-1}$$

이므로 $n = 2, 3, 4, \cdots$일 때,

$$\overline{AP_n}^2 = AP_1^{\ 2} + \ {}_{k=1}^{n-1} 4^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{4^{n-1} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{n-1} + 2}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\overline{P_nP_{n+1}}}{AP_n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n-1}}{\frac{4^{n-1}+2}{3}}$$

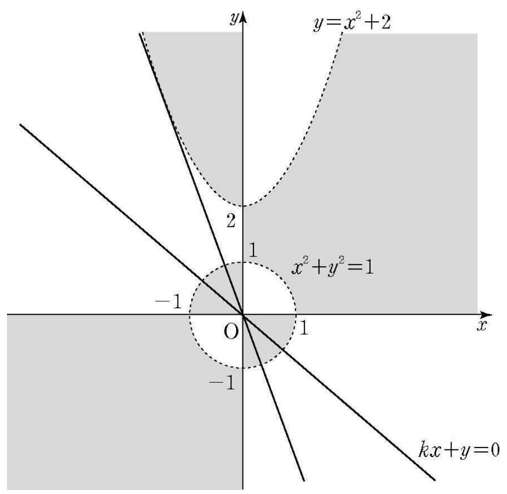
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3 \cdot 4^{n-1}}{4^{n-1}+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{1 + \frac{2}{4^{n-1}}} = 3$$

17. 도형의 방정식 $\boxed{\text{정답 ③}}$

영역 A를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

(단, 경계선은 제외한다.)



또, 집합 B가 나타내는 도형은 원점을 지나며 기울기가 $-k$인 직선이므로 위의 그림과 같이 직선 $kx + y = 0$이 곡선 $y = x^2 + 2$에 접할 때 상수 k의 값이 최대가 된다.

따라서 방정식 $x^2 + kx + 2 = 0$이 중근을 가지므로

판별식 $D = k^2 - 8 = 0$에서 $k = 2\quad 2$ 이다.

18. 수열 $\boxed{\text{정답 ④}}$

$$S_n^{\ 2} - T_n^{\ 2} = (S_n + T_n)(S_n - T_n)$$

$$= n^2(n+1) \quad \cdots\cdots$$

등차수열의 공차가 이 아닐 때, 수열의 합은 n에 대한 이차식이다. 그런데, $+ T_n$, $S_n - T_n$을 곱한 값이 $n^2(n+1)$ 즉, n에 대한 삼차식이고, 수열 $\{a_n\}$의 공차는 양수, 수열 $\{b_n\}$의 공차는 음수이므로 수열 $\{a_n + b_n\}$의 공차는 0이다.

그러므로 $a_n + b_n =$(상수)이다.

의 양변에 $n=1$을 대입하면

$(S_1 + T_1)(S_1 - T_1) = (a_1 + b_1)(a_1 - b_1) = 2$이고,

$a_1 - b_1 = 1$이므로 $a_1 + b_1 = 2$

$\therefore\ a_n + b_n = 2,\ S_n + T_n = 2n \quad \cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 연립하면

$$S_n - T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore\ a_n - b_n = (S_n - T_n) - (S_{n-1} - T_{n-1})$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n \text{ (단, } n \ge 2\text{)}$$

$\therefore\ a_{20} - b_{20} = 20,\ a_{20} + b_{20} = 2$

$$\therefore\ a_{20}b_{20} = \frac{(a_{20}+b_{20})^2 - (a_{20}-b_{20})^2}{4}$$

$$= \frac{4-400}{4} = -99$$

19. 지수함수와 로그함수 $\boxed{\text{정답 ①}}$

$$|\log_x n \le 2 \Leftrightarrow -2 \le \log_x n \le 2$$

$$\Leftrightarrow \log_x \frac{1}{x^2} \le \log_x n \le \log_x x^2$$

(ⅰ) $x > 1$일 때, $\frac{1}{x^2} \le n \le x^2$

(ⅱ) $0 < x < 1$일 때, $x^2 \le n \le \frac{1}{x^2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$f(x) = \begin{cases} [x^2] & (x > 1) \\ \left[\dfrac{1}{x^2}\right] & (0 < x < 1) \end{cases}$$

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

ㄱ. (참) $f(2) = [2^2] = 4$

ㄴ. (거짓) $1 < x < y$이면 $x^2 < y^2$이므로

$f(x) \le f(y)$

$0 < x < y < 1$이면 $\frac{1}{y^2} < \frac{1}{x^2}$이므로

$f(x) \ge f(y)$

ㄷ. (거짓) 자연수 x에 대하여 $0 < \frac{1}{x} < 1$이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right) = [x^2] \le 30$에서 $x^2 < 31$이다.

그러므로 $f\left(\frac{1}{x}\right) \le 30$을 만족하는 자연수 x는 $2, 3, 4, 5$의 4개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

20. 수열의 극한 $\boxed{\text{정답 ①}}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 각각 a, r라 하자.

(ⅰ) $r = 1$일 때,

$$\frac{S_n - a_n^{\ 2}}{a_n} = \frac{na - a^2}{a} = n - a\text{이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - a_n^{\ 2}}{a_n} = \infty$$

(ⅱ) $r \ne 1$일 때,

$$\frac{S_n - a_n^{\ 2}}{a_n} = \frac{\dfrac{a(1-r^n)}{1-r} - a^2 r^{2n-2}}{ar^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} - \frac{r}{1-r} - ar^{n-1}$$

그런데, $r| < 1$, $r \neq 0$일 때, $\lim\limits_{\to\infty} \left. \begin{matrix} 1 \\ r \end{matrix} \right)^{n-1}$이 발산

하고, $|r| > 1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n-1}$이 발산하므로

$\lim\limits_{n\to\infty} \begin{matrix} {}_n - a_n{}^2 \\ a_n \end{matrix}$ 은 수렴하지 않는다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n - a_n{}^2}{a_n}$이 수렴하기 위해서는 $r = -1$

이다. 즉, $\dfrac{S_n - a_n{}^2}{a_n} = \dfrac{1}{2}(-1)^{n-1} + \dfrac{1}{2} - a(-1)^{n-1}$

① n이 홀수일 때,

$$\frac{S_n - a_n{}^2}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - a = 1 - a$$

② n이 짝수일 때,

$$\frac{S_n - a_n{}^2}{a_n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + a = a$$

①, ② 에서 $1 - a = a$

$\therefore\ a = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a_n = \dfrac{1}{2}(-1)^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = \dfrac{1}{2}(-1)^9 = -\dfrac{1}{2}$

21. 행렬과 그래프 정답 ⑤

ㄱ. (참) $P = \left. \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right)$이라 두면

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad M$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \in M$$

$P^4 = -P \in M$

$P^5 = -P^2 \in M$

$P^6 = E \in M$

$\vdots$

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $P^n \in M$ 이다.

ㄴ. (참) 제 1행의 성분의 합이 0인 경우는 (a, b)가 $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$인 세 가지뿐이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(B) = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$

ㄷ. (참) (ⅰ) $(a, b) = (0, 0)$인 경우

c, d의 값에 관계없이 항상 역행렬이 존재하지 않는다.

(ⅱ) $(a, b) = (1, -1)$인 경우

(c, d)가 $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$일 때, 역행렬이 존재하지 않는다.

(ⅲ) $(a, b) = (-1, 1)$인 경우

(c, d)가 $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$일 때, 역행렬이 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{5}{27}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{5}{27}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{9}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. 방정식과 부등식 정답 ④

삼차방정식 $(x)=0$의 정수근을 n이라 하면,

$f(x)=(x-n)(x\ \ +ax+b)$ (단, a, b는 정수)

$f(7)=(7-n)(49+7a+b)=-3$ ……

$f(11)=(11-n)(121+11a+b)=73$ …… ㉡

그런데, $49+7a+b$, $121+11a+b$는 모두 정수이므로

$7-n$, $11-n$은 각각 3, 73의 약수이어야 한다.

즉, $7-n=1$ 또는 $7-n=-1$ 또는 $7-n=3$ 또는

$7-n=-3$이므로 $n=6$ 또는 $n=8$ 또는 $n=4$ 또는

$n=10$이다.

또, $11-n$은 73의 약수이어야 하므로 $n=10$일 때,

조건을 만족한다.

따라서 삼차방정식 $f(x)=0$의 정수근은 10이다.

23. 수열의 극한 정답 ②

주어진 귀납적 정의에 의해

$y_{n+1}=f(y_n)=f(x_{n+1})$

ㄱ. (참) $1-2x_{n+1}=1-2y_n$

$$=1-2f(x_n)$$

$$=1-4x_n(1-x_n)=(1-2x_n)^2$$

$\log|1-2x_{n+1}|=2\log|1-2x_n|$에서 $a_{n+1}=2a_n$

$\therefore\ a_n=a_1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}\cdot\log|1-2x_1|$

ㄴ. (참) $0<x_1<1$일 때, $0<|1-2x_1|<1$이므로

$\log|1-2x_1|<0$

그런데, ㄱ에서 $a_n=2^{n-1}\cdot\log|1-2x_1|$이므로

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$

또, $a_n=\log|1-2x_n|$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$이려면

$\lim\limits_{n\to\infty}|1-2x_n|=0$이다.

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f\ \dfrac{1}{2}\Big)=\dfrac{1}{2}$$

그러므로 $0<x_1<1$, $x\neq\dfrac{1}{2}$일 때, n의 값이 커짐

에 따라 점 P_n은 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$에 한없이 가까워진다.

ㄷ. (거짓) $x_1<0$일 때, $1-2x_1>1$이므로

$\log|1-2x_1|>0$

그런데, ㄱ에서 $a_n=2^{n-1}\cdot\log|1-2x_1|$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

또, $a_n=\log|1-2x_n|$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$이려면

$\lim\limits_{n\to\infty}|1-2x_n|=\infty$이다.

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=\infty$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

24. 수열 정답 ②

$\log_2 n$은 자연수 n이 $n=2^k$(k는 음이 아닌 정수)일 때,

정수이고, 이때 점 $n,\ \log_2 n)$과 점 $(\log_2 n,\ n)$을 잇는

선분 위의 점 중에서 좌표와 y좌표 모두가 정수인 점의

개수는 $n-\log\ \ n+1=2^k-k+1$이다.

즉, $n=2^k$(k는 음이 아닌 정수)일 때,

$a_n=2^k-k+1$이고,

$n\neq 2^k$일 때, $a_n=0$이다.

$$\therefore \ {}_{n=1}^{2011} a_n=\sum_{k=0}^{10}(2^k-k+1)$$

$$=\frac{2^{11}-1}{2-1}-\frac{10\cdot 11}{2}+11=2003$$

25. 수열의 극한 정답 ③

(i) $\dfrac{1}{2}<x<1$일 때,

$1<\dfrac{1}{x}<2$이므로 $\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{1}{3}$

그러므로 구간 $\dfrac{1}{2},\,1\Big)$에서 영역 (g)의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$이다.

(ii) $\dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}$ $(n=2,\,3,\,4,\,\cdots)$일 때,

$n\le\dfrac{1}{x}<n+1$이므로 $\left[\dfrac{1}{x}\right]=n$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{1}{n+2}$

그러므로 구간 $\left(\dfrac{1}{n+1},\,\dfrac{1}{n}\right]$에서 영역 $R(g)$의

넓이는

$$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\times\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

(i), (ii)에서 영역 $R(g)$의 넓이는

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}$$

외국어(영어) 영역