수리영역정답

1. ⑤	2. ③	3. ①	4. ④	5. ④
6. ②	7. ③	8. ④	9. ①	10. ③
11. ③	12. ①	13. ②	14. ④	15. ①
16. ③	17. ②	18. ②	19. ②	20. ⑤
21. ⑤	22. ④	23. ④	24. ⑤	25. ②

1. 수열 정답 ⑤

공차가 인 등차수열 a }의 일반항 a_n은

$a_n = a_1 + (n-1)d$이고,

$(a_1 + a_2) : a_3 = 2 : 3$에서

$2a_3 = 3(a_1 + a_2)$이므로

$2(a_1 + 2d) = 3(a_1 + a_1 + d)$

$2a_1 + 4d = 6a_1 + 3d$

$d = 4a_1$ …… ㉠

$$\therefore \frac{a_7}{a_4 + a_6} = \frac{a_1 + 6d}{a_1 + 3d + a_1 + 5d}$$
$$= \frac{a_1 + 24a_1}{2a_1 + 32a_1} \quad (\because ㉠)$$
$$= \frac{25a_1}{34a_1}$$
$$= \frac{25}{34}$$

2. 지수와 로그 정답 ③

$abc \neq 0$이므로 $ab + bc + ca = abc$의 양변을 abc로 나누면

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ …… ㉠

한편, $\log_2 x = a$에서 $\log_x 2 = \frac{1}{a}$ …… ㉡

$\log_3 x = b$에서 $\log_x 3 = \frac{1}{b}$ …… ㉢

$\log_5 x = c$에서 $\log_x 5 = \frac{1}{c}$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣을 변끼리 더하면

$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 5 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

이때, $\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 5$

$= \log_x (2 \cdot 3 \cdot 5) = \log_x 30$

이고, ㉠에서 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$이므로

$\log_x 30 = 1$

$\therefore \ x = 30$

3. 행렬 정답 ①

$^2 + A + E$의 역행렬이 $A^2 - A + E$이므로

$(A^2 + A + E)(A^2 - A + E) = E$

$A^4 - A^3 + A^2 + A^3 - A^2 + A + A^2 - A + E = E$

$A^4 + A^2 + E = E$

$A^2 = -E \ (\because \ A^4 = E)$

$A(-A) = E$

$\therefore \ A^{-1} = -A$ …… ㉠

또한 $A^4 = A^3 A = E$에서 $(A^3)^{-1} = A$이므로

$(A^{-1})^3 = (A^3)^{-1} = A$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$(A^{-1})^3 + A^{-1} = A + (-A) = O$

4. 식과 그 연산

정답 ④

$(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=-3$에서

$f(\alpha)+3=f(\beta)+3=f(\gamma)+3=0$

이므로 α, β, γ는 방정식 $f(x)+3=0$의 근이다.

이때, $f(x)+3=0 \Leftrightarrow x \quad -6x^2+3x+10=0$이므로

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=6$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

$$=6^2-2\times3=36-6=30$$

5. 수열의 극한

정답 ④

$\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{4^n}-3\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{4^n}-3\right)=0$$

$$\left(\because \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 수렴 } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4\cdot2^n}{a_n-2\cdot4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a_n-4\cdot2^n}{4^n}}{\dfrac{a_n-2\cdot4^n}{4^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a_n}{4^n}-4\cdot\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{a_n}{4^n}-2}$$

$$=\frac{3-0}{3-2} \quad \left(\because ㉠,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0\right)$$

$$=3$$

6. 수열

정답 ②

직선 $y=ax$가 원 $(x-4)^2+y^2=\dfrac{4}{n^2}$에 접하므로 원의

중심 $(4,\ 0)$에서 직선 $ax-y=0$에 이르는 거리와 원의

반지름의 길이 $\dfrac{2}{n}$가 같다.

즉, $\dfrac{|4a|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{2}{n}$이므로

$$\frac{16a^2}{a^2+1}=\frac{4}{n^2}$$

$$16a^2n^2=4a^2+4$$

$$16a^2n^2-4a^2=4$$

$$a^2(16n^2-4)=4$$

$$a^2=\frac{4}{16n^2-4}=\frac{1}{4n^2-1}$$

이때, $a=f(n)$이므로

$$a^2=\{f(n)\}^2$$

$$=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}\{f(n)\}^2=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)$$

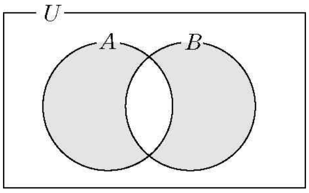
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{21}$$

$$=\frac{10}{21}$$

7. 수와 연산

정답 ③

집합 $\triangle B$ $(A-B)\cup(B-A)$를 벤 다이어그램에 나타내면 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



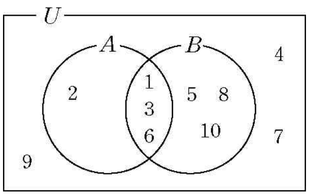
$A=\{x|x$ 6의 약수$\}=$ $1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이고,

$A\triangle B=\{\underline{2},\ 5,\ 8,\ 10\}$이므로

$A-B=$ $2\},\ A\cap B=\{1,\ 3,\ 6\},$

$B-A=\{5,\ 8,\ 10\}$

또, $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 10\}$ 이므로 벤 다이어그램에 나타내면



따라서 $n(B)=6$이므로 집합 B의 부분집합의 개수는 $2\ \ =64$이다.

8. 행렬

정답 ④

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하면

$A+2E=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2&b\\c&d+2\end{pmatrix}$

$A-2E=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-2&b\\c&d-2\end{pmatrix}$

이고, $A+2E,\ A-2E$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(a+2)(d+2)-bc=0,\ (a-2)(d-2)-bc=0$

즉, $ad+2(a+d)-bc=-4,\ ad-2(a+d)-bc=-4$

두 식을 변끼리 빼면 $4(a+d)=0$

$\therefore\ a+d=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 변끼리 더하면 $2ad-2bc=-8$

$\therefore\ ad-bc=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

한편, $A+4E=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a+4&b\\c&d+4\end{pmatrix}$

이므로

$(A+4E)^{-1}$

$=\dfrac{1}{(a+4)(d+4)-bc}\begin{pmatrix}d+4&-b\\-c&a+4\end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{ad-bc+4(a+d)+16}\begin{pmatrix}-a+4&-b\\-c&-d+4\end{pmatrix}$ ($\because$ ㉠)

$=\dfrac{1}{12}\left\{-\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=\dfrac{1}{12}(-A+4E)$

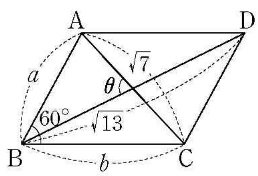
$=-\dfrac{1}{12}A+\dfrac{1}{3}E$

따라서 $p=-\dfrac{1}{12},\ q=\dfrac{1}{3}$이므로

$p+q=-\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}$

9. 삼각함수

정답 ①



$\mathrm{AB}=a,\ \mathrm{BC}=b$라 하면 평행사변형 ABCD의 넓이는

ABCD $\quad \triangle \mathrm{ABC}+\triangle \mathrm{ACD}$

$$=2\triangle \mathrm{ABC}$$

$$=2\times \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

$$=ab\sin 60^\circ$$

$$=\frac{3}{2}ab$$

이고

$$\square \mathrm{ABCD}=\frac{1}{2}\times \mathrm{AC}\times \overline{\mathrm{BD}}\times \sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times \sqrt{7}\times \sqrt{13}\times \sin\theta$$

$$=\frac{\sqrt{91}}{2}\sin\theta$$

이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}ab=\frac{\sqrt{91}}{2}\sin\theta$

$\sqrt{3}\,ab=\sqrt{91}\sin\theta \qquad \cdots\cdots$ ㉠

삼각형 ABC 에서 제이코사인법칙을 적용하면

$(\sqrt{7})\ =a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$

$7=a^2+b^2-ab \qquad \cdots\cdots$ ㉡

또, 삼각형 BCD 에서 제이코사인법칙을 적용하면

$(\sqrt{13})^2=a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ$

$13=a^2+b^2+ab \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢ − ㉡을 하면

$2ab=6 \qquad \therefore\ ab=3$

이를 ㉠에 대입하면

$3\sqrt{3}=\sqrt{91}\sin\theta$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$

$\therefore\ \sin^2\theta=\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}\right)^2=\frac{27}{91}$

10. 수와 연산 **정답 ③**

(나)에 의해 $5*3=3*5$이므로 $3*5$를 구해 보자.

$3*5=3*(3+2)$이므로

(다)에 $a=3,\ b=2$를 대입하면

$\frac{3*(3+2)}{3*2}=\frac{5}{2}$

$3*5=\frac{5}{2}\times(3*2) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

여기서 $3*2=2*3$이므로 $2*3$을 구해 보자.

$2*3=2*(2+1)$이므로

(다)에 $a=2,\ b=1$을 대입하면

$\frac{2*(2+1)}{2*1}=3$

$2*3=3\times(2*1) \qquad \cdots\cdots$ ㉡

여기서 $2*1=1*2$이므로 $1*2$를 구해 보자.

$1*2=1*(1+1)$이므로

(다)에 $a=1,\ b=1$을 대입하면

$\frac{1*(1+1)}{1*1}=2$

$1*2=2\times(1*1)$

여기서 (가)에 의해

$1*1=1+2=3$

이므로

$1*2=2\times 3=6$

즉, $2*1=6$이므로 ㉡에 대입하면

$2*3=3\times 6=18$

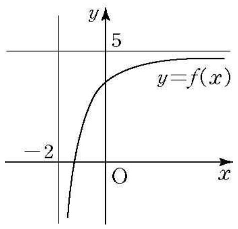
즉, $3*2=18$이므로 ㉠에 대입하면

$3*5=\frac{5}{2}\times 18=45$

$\therefore\ 5*3=45$

11. 함수 $\boxed{\text{정답 ③}}$

함수 $(x)=\dfrac{ax-d}{cx+d}$가 $x>-2$, $y<5$에서 일대일 대응이려면 그래프가 다음 그림과 같아야 하므로 직선 $x=-2$, $y=5$가 점근선이어야 한다.



$$f(x)=\frac{ax-b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\dfrac{d}{c}\right)-\dfrac{ad}{c}-b}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}$$

$$=\frac{-\dfrac{ad}{c}-b}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}+\frac{a}{c}$$

에서 직선 $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$가 함수 $f(x)$의 그래프의 점근선이므로

$x=-\dfrac{d}{c}=-2$, $y=\dfrac{a}{c}=5$

$\dfrac{d}{c}=2$, $\dfrac{a}{c}=5$를 만족하는 자연수 a, c, d는

$c=1$일 때, $a=5$, $d=2$

$c=2$일 때, $a=10$, $d=4$

$c=3$일 때, $a=15$, $d=6$

$c\geq 4$일 때는 $a\geq 20$이므로 조건을 만족하지 않는다.

이때, $a+b+c+d$가 최소이려면

$a=5$, $c=1$, $d=2$이고, $b=1$이어야 한다.

또, $a+b+c+d$가 최대이려면

$a=15$, $c=3$, $d=6$이고, $b=19$이어야 한다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은

$(5+1+1+2)+(15+19+3+6)=9+43=52$

12. 도형의 방정식 $\boxed{\text{정답 ①}}$

$|x+y|+|x-y|=1$의 그래프를 그려 보자.

(ⅰ) $x+y\geq 0$, $x-y\geq 0$일 때,

$x+y+x-y=1$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $x+y\geq 0$, $x-y<0$일 때,

$x+y-x+y=1$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{2}$

(ⅲ) $x+y<0$, $x-y\geq 0$일 때,

$-x-y+x-y=1$

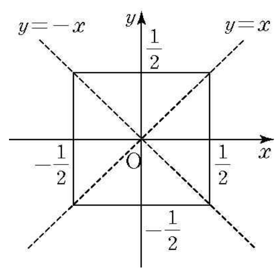
$\therefore\ y=-\dfrac{1}{2}$

(ⅳ) $x+y<0$, $x-y<0$일 때,

$-x-y-x+y=1$

$\therefore\ x=-\dfrac{1}{2}$

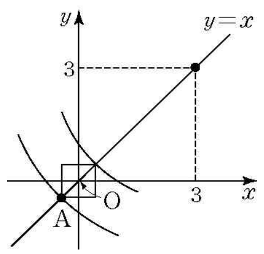
좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형이다.



$-6x+y^2-6y=k$라 하면

$(x-3)^2+(y-3)^2=18+k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠은 중심이 점 $(3,\ 3)$이고 반지름의 길이가 $18+k$ 인 원이고, 이 원이 다음 그림과 같이 점 A$\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$을 지날 때 반지름의 길이가 최대가 된다.



$x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}-3\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-3\right)^2=18+k$$

$$\frac{49}{4}+\frac{49}{4}-18=k$$

$$\therefore\ k=\frac{49}{2}-\frac{36}{2}=\frac{13}{2}$$

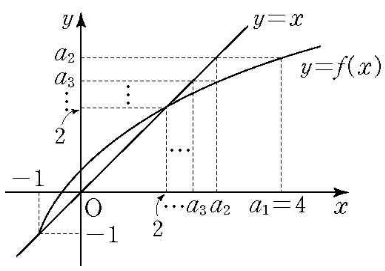
13. 수열의 극한

정답 ②

$f(x)=\sqrt{3x+3}-1$이라 하면

$f(a_1)=a_2,\ f(a_2)=a_3,\ \cdots,\ f(a_n)=a_{n+1}$이므로

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$를 그려서 수열 $\{a_n\}$의 특징을 알아낼 수 있다.



㉠ 위의 그림에서 $a_1>a_2>a_3>\cdots$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>a_{n+1}$이다. (참)

㉡ 위의 그림에서 $a_1=4$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$이므로 ㉠에 해 모든 자연수 n에 대하여 $2<a_n<5$이다. (참)

㉢ $\lim_{n\to\infty}\left(3^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}\cdot 5^{\frac{1}{2^n}}\right)$에서

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}\text{ 이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}\cdot 5^{\frac{1}{2^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3^{1-\frac{1}{2^n}}\cdot 5^{\frac{1}{2^n}}\right)$$

$$=3\cdot 5^0=3$$

이고, $\lim_{n\to\infty}a_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq\lim_{n\to\infty}\left(3^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}\cdot 5^{\frac{1}{2^n}}\right)\text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

14. 지수와 로그

정답 ④

$f(r)=\frac{1}{1-r}$ 이므로

$$\left|f(-0.1)-1-\sum_{k=1}^{n}(-0.1)^k\right|<10^{-7}$$

$$\left|\frac{1}{1-(-0.1)}-1-\frac{(-0.1)\{1-(-0.1)^n\}}{1-(-0.1)}\right|<10^{-7}$$

$$\left|\frac{1-1.1+0.1+(-0.1)^{n+1}}{1.1}\right|<10^{-7}$$

$$\left|\frac{(-0.1)^{n+1}}{1.1}\right|<(0.1)^7$$

$-0.1)^{\ +1}\Big| < 1.1\times(0.1)^7$

$\therefore\ n+1 \geq 7$

따라서 $n \geq 6$이므로 가장 작은 자연수 n의 값은 6이다.

15. 함수

정답 ①

㉠ $f(x)=ax+b,\ g(x)=mx+n$

$a \neq m$이면 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프는

기울기가 다른 두 직선이므로 한 점에서 만난다.

$\therefore\ d(f,\ g)=0$ (참)

㉡ 【반례】 $f(x)=1,\ g(x)=x,\ h(x)=-x$라 하면

$g(x)+h(x)=0$이므로

직선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)+h(x)$는 평행하고,

직선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$, 직선 $y=f(x)$와

직선 $y=h(x)$는 각각 한 점에서 만난다.

즉, $d(f,\ g+h)=1,\ d(f,\ g)=0,$

$d(f,\ h)=0$이므로

$d(f,\ g+h)>d(f,\ g)+d(f,\ h)$ (거짓)

㉢ 【반례】 $f(x)=x+2,\ g(x)=x,\ h(x)=1$이라

하면

$d(f,\ h)=0$이므로

$d(f,\ g)\cdot d(f,\ h)=0$이고,

$g(x)h(x)=x$이므로 그래프는 직선 $y=f(x)$와

평행하다.

이때, $d(f,\ gh)=\quad 2$ 이므로

$d(f,\ gh)>d(f,\ g)\cdot d(f,\ h)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㉠이다.

16. 수와 연산

정답 ③

$$(A,\ B)=\ \ i^m+\ \ \frac{1}{i}\Big)^k\ \Big|\ m\quad A,\ k\in B\Big\}$$

$$=\{i^m+(-i)^k\ |\ m\in A,\ k\in B\}$$

㉠ $A=\ \ 1\},\ B=\{1,\ 2\}$이므로

$m=1,\ k=1$일 때, $i+(-i)=0$

$m=1,\ k=2$일 때, $i+(-i)^2=i-1$

$\therefore\ X(A,\ B)=\{0,\ -1+i\}$ (참)

㉡ $n(A)\cdot n(B)$는 순서쌍 $(m,\ k)$의 개수이고,

$i+(-i)^2=i^2+(-i)^3=-1+i$와 같이

$i^m+(-i)^k$은 $m,\ k$의 값이 다른 경우라도 같은

수가 나올 수 있으므로 $n(X(A,\ B))$는

$n(A)\cdot n(B)$보다 작거나 같다.

즉, $n(X(A,\ B))\leq n(A)n(B)$ (참)

㉢ $A=B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$일 때 $n(X(A,\ B))$가

최대가 되므로 이때의 $X(A,\ B)$의 원소를 구해 보자.

$m=1$일 때,

$i+(-i)=0$

$i+(-i)^2=-1+i$

$i+(-i)^3=i+i=2i$

$i+(-i)^4=1+i$

$m=2$일 때, $i^2=-1$이므로

$i^2+(-i)=-1-i$

$i^2+(-i)^2=-1-1=-2$

$i^2+(-i)^3=-1+i$

$i^2+(-i)^4=-1+1=0$

$m=3$일 때, $i^3=-i$이므로

$+(-i)=-i-i=-2i$

$i^3+(-i)^2=-i-1$

$i^3+(-i)^3=-i+i=0$

$i^3+(-i)^4=-i+1$

$m=4$일 때, $i^4=1$이므로

$i^4+(-i)=1-i$

$i^4+(-i)^2=1-1=0$

$i^4+(-i)^3=1+i$

$i^4+(-i)^4=1+1=2$

$\therefore \quad (A,\ B)=\{-2,\ 0,\ 2,\ -1-i,\ -1+i,\ 1-i,\ 1+i,\ -2i,\ 2i\}$

따라서 $n(X(A,\ B))$의 최댓값은 9이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

17. 지수함수와 로그함수 　정답 ②

$7^{\log x}\cdot x^{\log_3 5x}=1$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3(7^{\log_3 x}\cdot x^{\log_3 5x})=\log_3 1$

$\log_3 7^{\log_3 x}+\log_3 x^{\log_3 5x}=0$

$(\log_3 x)(\log_3 7)+(\log_3 5x)(\log_3 x)=0$

$(\log_3 x)(\log_3 7)+(\log_3 5+\log_3 x)(\log_3 x)=0$

$(\log_3 x)^2+(\log_3 5+\log_3 7)\log_3 x=0$

$(\log_3 x)(\log_3 x+\log_3 35)=0$

$\therefore\ \log_3 x=0$ 또는 $\log_3 x=-\log_3 35$

$\log_3 x=0$에서 $x=1$

$\log_3 x=-\log_3 35$에서

$-\log_3 35=\log_3\dfrac{1}{35}$ 이므로 $x=\dfrac{1}{35}$

따라서 두 근의 합은 $1+\dfrac{1}{35}=\dfrac{36}{35}$ 이므로

$p+q=35+36=71$

18. 확률 　정답 ②

3의 배수인 세 자리 자연수를 작은 수부터 차례로 나열하면 첫째항은 102, 끝항은 999이고, 공차가 3인 등차수열을 이룬다.

$999=102+(n-1)\cdot 3$에서 $n=300$이므로 3의 배수인 세 자리 자연수는 총 300개이다.

또한 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이므로 어느 한 자리에 9가 포함된 3의 배수는 나머지 두 자리 수의 합이 3의 배수이다.

이때, 9를 제외한 두 자리 수를 순서쌍으로 나타내면

합이 0인 경우 $(0,\ 0)$

합이 3인 경우 $(0,\ 3)$, $(1,\ 2)$

합이 6인 경우 $(0,\ 6)$, $(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 3)$

합이 9인 경우 $(0,\ 9)$, $(1,\ 8)$, $(2,\ 7)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 5)$

합이 12인 경우 $(3,\ 9)$, $(4,\ 8)$, $(5,\ 7)$, $(6,\ 6)$

합이 15인 경우 $(6,\ 9)$, $(7,\ 8)$

합이 18인 경우 $(9,\ 9)$

위의 각 경우에 9를 포함시켜 3의 배수인 세 자리의 자연수를 구하면

(ⅰ) $(0,\ 0,\ 9)$, $(9,\ 9,\ 9)$인 경우

900, 999의 2개

(ii) $(0,\ 9,\ 9)$인 경우

$990,\ 909$의 2개

(iii) $(0,\ 3,\ 9)$, $(0,\ 6,\ 9)$와 같이 0이 포함되고 각 자리 수가 다른 경우

$(2\times2\times1)\times2=8$(개)

(iv) $(1,\ 2,\ 9)$와 같이 0이 포함되지 않고 각 자리 수가 다른 경우

0이 포함되지 않고 각 자리 수가 다른 경우가 총 10가지이므로

$(3\times2\times1)\times10=60$(개)

(v) $(3,\ 3,\ 9)$와 같이 같은 수가 2개 포함된 경우

같은 수가 2개 포함된 경우가 총 4개이므로

$\frac{3!}{2!}\times4=12$(개)

따라서 일의 자리의 수 또는 십의 자리의 수 또는 백의 자리의 수가 9인 자연수의 개수가

$2+2+8+60+12=84$이므로 구하는 확률은

$\frac{84}{300}=\frac{7}{25}$

19. 순열과 조합

정답 ②

8월의 마지막 날은 31일이므로 5일을 순찰하면 26일은 순찰하지 않는다. 이를 연이어 순찰하지 않으면서 5일 순찰하는 방법의 수는 순찰하지 않는 날 사이사이와 양 끝에 순찰하는 날을 끼워 넣는 방법의 수와 같다.

즉, 순찰하지 않는 26일 사이사이와 양 끝 27군데 중 5군데를 선택하는 경우의 수가 ${}_{7}\mathrm{C}_{5}$이므로 구하는 방법의 수는 ${}_{27}\mathrm{C}_{5}$이다.

20. 확률분포와 통계적 추정

정답 ⑤

크기가 n인 표본을 복원추출하였을 때, 표본평균의 분산은 $\mathrm{V}(X)=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}$이고, 문제에서

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{7}{12}$이므로

$\frac{\mathrm{V}(X)}{3}=\frac{17}{12}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\frac{17}{4}$

한편, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+3^2\times a+6^2\times\ \frac{2}{3}-a)$$
$$=9a+24-36a=24-27a$$

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{3}+3\times a+6\times\left(\frac{2}{3}-a\right)$$
$$=3a+4-6a=4-3a$$

이므로

$\frac{17}{4}=(24-27a)-(4-3a)^2$

$\frac{17}{4}=24-27a-(16-24a+9a^2)$

$\frac{17}{4}=-9a^2-3a+8$

$36a^2+12a-15=0$

$12a^2+4a-5=0$

$(6a+5)(2a-1)=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}\ (\because\ a\geq0)$

21. 수열의 극한

정답 ⑤

(다)에서 $\log_a x+\log_{a_{n+1}}x=\log x$이므로 좌변을

상용로그로 바꾸면

$$\frac{\log x}{\log} + \frac{\log x}{\log a_{n+1}} = \log x$$

$x \neq 1$ 이므로 양변을 $\log x$ 로 나누면

$$\frac{1}{\log a_n} + \frac{1}{\log a_{n+1}} = 1$$

$$\frac{1}{\log a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{\log a_n}$$

$$\therefore\ \log a_{n+1} = \frac{\log a_n}{\log a_n - 1}$$

$a_1 = \frac{1}{10}$ 이므로

$$\log a_2 = \frac{\log \frac{1}{10}}{\log \frac{1}{10} - 1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a_2 = 10^{\frac{1}{2}}$$

$\log a_2 = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\log a_3 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = -1$$

$$\therefore\ a_3 = 10^{-1} = a_1$$

따라서 $a_1 = 10^{-1}$, $a_2 = 10^{\frac{1}{2}}$, $a_3 = 10^{-1}$, $a_4 = 10^{\frac{1}{2}}$,

…이므로

$$a_{2n-1}a_{2n} = 10^{-1} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 10^{-\frac{1}{2}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

$$\therefore\ b_n = (a_1a_2)(a_3a_4)\cdots(a_{2n-1}a_{2n})$$

$$= \left(10^{-\frac{1}{2}}\right)\left(10^{-\frac{1}{2}}\right)\cdots\left(10^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \left(10^{-\frac{1}{2}}\right)^n$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $10^{-\frac{1}{2}}$, 공비가 $10^{-\frac{1}{2}}$ 인

등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{10^{-\frac{1}{2}}}{1 - 10^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{10}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{10} + 1}{9}$$

22. 행렬

정답 ④

(가), (나)에 의해 각 행과 각 열에는 0, 0, 1, 1이 들어 간다.

제 1 행이 1 1 0 0인 경우 행렬의 개수를 구해 보자.

(i) 제 1 행, 제 2 행이 같은 경우

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

제 3 행과 제 4 행은 한 가지로 결정된다.

(ii) 제 1 행과 제 2 행의 한 열만 1로 같은 경우

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & 1 & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & & 1 \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

각 행렬에서 빈자리에 $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ 또는 $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$을 넣을 수 있으므로 이 경우 행렬의 개수는 $4 \times 2 = 8$이다.

(iii) 제 행과 제 2 행의 각 열에 같은 성분이 없는 경우

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

제 3 행이 결정되면 제 4 행은 한 가지로 결정되고,

제 3 행에 1, 1, 0, 0을 배열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$(가지)

이므로 이 경우 행렬의 개수는 6이다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 제 1 행이 1 1 0 0인 행렬의 개수가 $1+8+6=15$이고, 제 1 행의 배열이 다른 경우에도 각각 15개의 행렬을 만들 수 있으므로 구하는 행렬의 개수는 $\frac{4!}{2!2!}\times 15=90$(개)이다.

23. 순열과 조합

정답 ④

1 _ _ _인 경우 자연수의 개수는 $5!=120$

2 _ _ _ _인 경우 자연수의 개수는 $5!=120$

3 _ _ _ _인 경우 자연수의 개수는 $5!=120$

여기까지 자연수의 개수가 $120\times 3=360$이므로

450번째 항은 첫 번째 자리의 수가 4이다.

4 0 _ _ _인 경우 자연수의 개수는 $4!=24$

4 1 _ _ _인 경우 자연수의 개수는 $4!=24$

4 2 _ _ _인 경우 자연수의 개수는 $4!=24$

여기까지 자연수의 개수가 $360+24\times 3=432$이므로

450번째 항은 두 번째 자리의 수가 3이다.

4 3 0 _ _ 인 경우 자연수의 개수는 $3!=6$

4 3 1 _ _ 인 경우 자연수의 개수는 $3!=6$

4 3 2 _ _ 인 경우 자연수의 개수는 $3!=6$

여기까지 자연수의 개수가 $432+6\times 3=450$이므로

450번째 항은 432로 시작하는 6자리 자연수 중 가장 큰 수인 432510이다.

24. 지수함수와 로그함수

정답 ⑤

$$f(x)=\log_2(x^2+x+1)-\log_2 x$$

$$=\log_2\frac{x^2+x+1}{x}$$

$$=\log_2\left(x+1+\frac{1}{x}\right)$$

에서 $x\geq 1$일 때 $x+1+\frac{1}{x}\geq 3$이므로

$$f(x)=\log_2\left(x+1+\frac{1}{x}\right)>1$$

따라서 $f(x)]=\left[\log_2\left(x+1+\frac{1}{x}\right)\right]=k$($k$는 자연수)라 하면

$$k\leq\log_2\left(x+1+\frac{1}{x}\right)<k+1$$

$$2^k\leq x+1+\frac{1}{x}<2^{k+1}$$

$$\therefore\ 2^k-1\leq x+\frac{1}{x}<2^{k+1}-1$$

$k=1$일 때, $1\leq x+\frac{1}{x}<3$이므로 자연수 x는

1, 2의 2개

$k=2$일 때, $3\leq x+\frac{1}{x}<7$이므로 자연수 x는

3, 4, 5, 6의 4개

$= 3$일 때, $7 \le x + \frac{1}{x} < 15$이므로 자연수 x는

7, 8, $\cdots$, 14의 8개

$\vdots$

$k = 9$일 때, $511 \le x + \frac{1}{x} < 1023$이므로 자연수 x는

511, 512, $\cdots$, 1022의 512개

이때, $k = [f(x)]$이므로

$[f(1)] + [f(2)] + ... + [f(1022)]$

$= 1\times2 + 2\times2 \ \ + 3\times2^3 + \cdots + 9\times2^9$

$= 1\times2 + 2\times2^2 + 3\times2^3 + \cdots + 9\times2^9$ ...... ㉠

이라 하면

$2S = 1\times2^2 + 2\times2^3 + 3\times2^4 + \cdots + 8\times2^9 + 9\times2^{10}$

...... ㉡

이므로 $\quad -$ ㉡을 하면

$-S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9 - 9\times2^{10}$

$= \frac{2(2^9-1)}{2-1} - 9\times2^{10}$

$\therefore\ S = -\frac{2(2^9-1)}{2-1} + 9\times2^{10}$

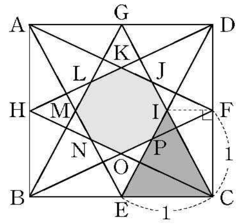
$= 9\times2^{10} - 2^{10} + 2$

$= 8\times2^{10} + 2$

$= 2^{13} + 2$

25. 수학적 기초 정답 ②

사각형 ABCD의 넓이에서 삼각형들의 넓이를 빼서 수사망의 넓이를 구하자.

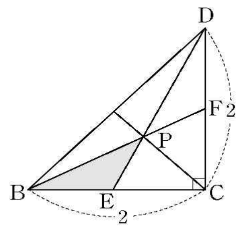


(ⅰ) 삼각형 CEI와 삼각형 BHO, 삼각형 AGM, 삼각형 DFK는 모두 합동이고, 삼각형 CEI의 밑변 CE의 길이가 1, 높이가 1이므로

$\triangle CEI + \triangle BHO + \triangle AGM + \triangle DFK$

$= 4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 2$

(ⅱ) 삼각형 BDC에서 삼각형 BDC의 무게중심이 P이므로 삼각형 BEP의 넓이는 삼각형 BCD의 넓이의 $\frac{1}{6}$이다.



$\therefore\ \triangle BEP = \frac{1}{6} \times \triangle BCD$

$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{1}{3}$

이때, 삼각형 BEP와 삼각형 CFJ, 삼각형 DGL, 삼각형 AHN은 모두 합동이므로

$\triangle BEP + \triangle CFJ + \triangle DGL + \triangle AHN$

$= 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

따라서 새로운 수사망의 넓이는

(팔각형 IJKLMNOP의 넓이)$= 2\times2 - \ 2 + \frac{4}{3})$

$= 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$