제3교시

2017학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역 가형

성명		수험번호							

- ○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- ○ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.
- ○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- ○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- ○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

공 란

1. $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} dx$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2. 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르는 확률변수 X 의 평균이 5일 때, 자연수 n 의 값은? [2점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

3. 좌표공간에서 세 점 A$(6,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 3,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 선분 OG의 길이는? (단, O는 원점이다.) [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{10}$

4. 자연수 10의 분할 중에서 짝수로만 이루어진 것의 개수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

5. 한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. $\mathrm{P}(B|A)-\mathrm{P}(B|A^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

6. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1-\cos x)^{\sec x}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ e^2

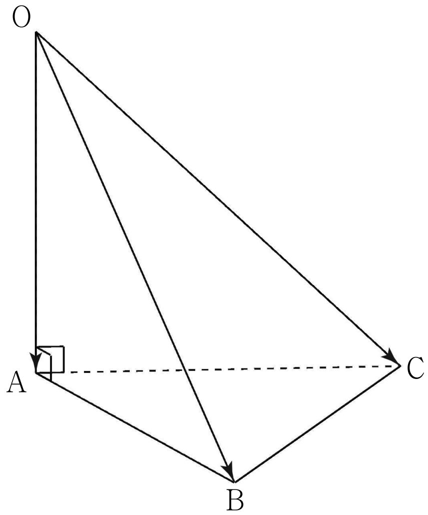
7. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	1

$\mathrm{E}(X)=1$, $\mathrm{V}(X)=\dfrac{1}{4}$ 일 때, $\mathrm{P}(X=0)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{32}$ ② $\dfrac{1}{16}$ ③ $\dfrac{1}{8}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

8. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC를 밑면으로 하고 $\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$ 인 사면체 OABC가 있다. $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$의 값은? [3점]

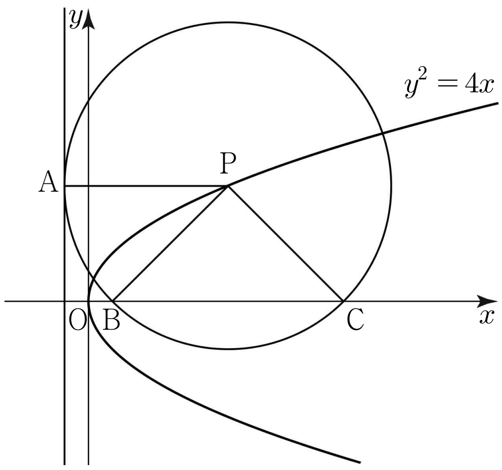


① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

9. 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생을 임의로 3명, 3명, 2명씩 3개의 조로 나눌 때, 두 학생 A, B가 같은 조에 속할 확률은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

10. 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점 P를 중심으로 하고 준선과 점 A에서 접하는 원이 x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 부채꼴 PBC의 넓이가 부채꼴 PAB의 넓이의 2배일 때, 원의 반지름의 길이는? (단, 점 P의 x좌표는 1보다 크고, 점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.) [3점]



① $2+2\sqrt{3}$ ② $3+2\sqrt{2}$ ③ $3+2\sqrt{3}$ ④ $4+2\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{3}$

11. 어느 공장에서 생산하는 군용 위장크림 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의로 택한 1개의 무게가 50 이상일 확률은 0.1587이다. 이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의추출한 4개의 무게의 평균이 50 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.) [3점]

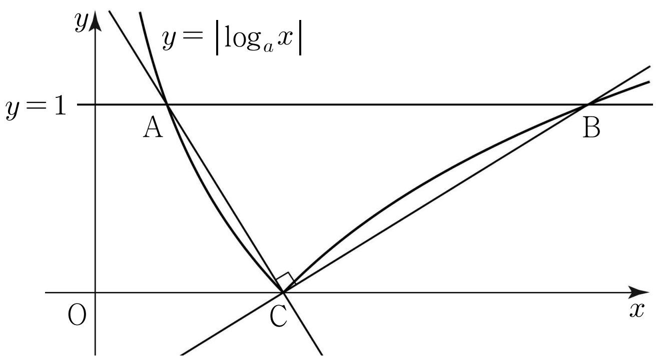
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.3085 ⑤ 0.4332

12. 곡선 $y=\tan\dfrac{x}{2}$와 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\dfrac{1}{4}\ln 2$ ② $\dfrac{1}{2}\ln 2$ ③ $\ln 2$ ④ $2\ln 2$ ⑤ $4\ln 2$

13. 그림과 같이 곡선 $y=|\log_a x|$가 직선 $y=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 x축과 만나는 점을 C라 하자. 두 직선 AC, BC가 서로 수직이 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 합은? (단, $a \neq 1$) [3점]

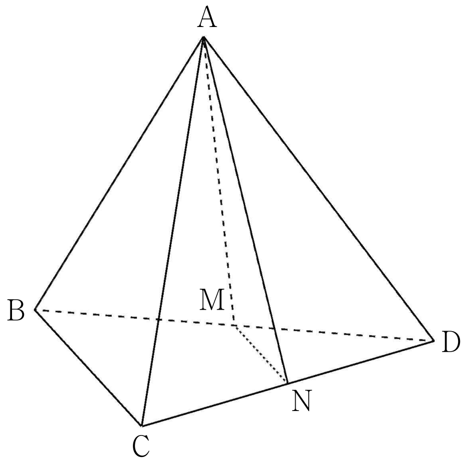


① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

14. 같은 종류의 볼펜 6개, 같은 종류의 연필 6개, 같은 종류의 지우개 6개가 필통에 들어 있다. 이 필통에서 8개를 동시에 꺼내는 경우의 수는? (단, 같은 종류끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 18　② 24　③ 30　④ 36　⑤ 42

15. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12인 정사면체 ABCD에서 두 모서리 BD, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 사각형 BCNM의 평면 AMN 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



① $\frac{15\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{18\sqrt{11}}{11}$ ③ $\frac{21\sqrt{11}}{11}$ ④ $\frac{24\sqrt{11}}{11}$ ⑤ $\frac{27\sqrt{11}}{11}$

16. 자연수 n에 대하여 $S_n = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}$ 이라 할 때, 다음은 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값을 구하는 과정이다.

$1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2} = \boxed{(가)} - (-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{1+x^2}$ 이므로

$$S_n = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}$$
$$= \int_0^1 \{1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}\}dx$$
$$= \int_0^1 \boxed{(가)}\,dx - (-1)^n\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$$

이다. 한편, $0 \le \frac{x^{2n}}{1+x^2} \le x^{2n}$ 이므로

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \le \int_0^1 x^{2n}dx = \boxed{(나)}$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx = 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \boxed{(가)}\,dx$ 이다.

$x = \tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \boxed{(가)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta = \boxed{(다)}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(x)$, $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $k\times f(2)\times g(2)$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{40}$ ② $\frac{\pi}{60}$ ③ $\frac{\pi}{80}$ ④ $\frac{\pi}{100}$ ⑤ $\frac{\pi}{120}$

17. 좌표공간에 평행한 두 평면 $\alpha : 2x-y+2z=0$, $\beta : 2x-y+2z=6$ 위에 각각 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0,\ 1)$이 있다. 평면 α 위의 점 P와 평면 β 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은? [4점]

① 6 ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{38}$ ④ $\sqrt{39}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

18. 함수 $f(x)=\int_{1}^{x} e^{t^3}dt$ 에 대하여 $\int_{0}^{1} xf(x)dx$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1-e}{2}$　② $\frac{1-e}{3}$　③ $\frac{1-e}{4}$　④ $\frac{1-e}{5}$　⑤ $\frac{1-e}{6}$

19. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이를 $f(t)$라 하자.

(가) 점 P는 구 $x^2+y^2+z^2=25$ 위의 점이다.
(나) 점 $\mathrm{A}(t+5,\ 2t+4,\ 3t-2)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=\dfrac{20}{3}\pi$

ㄴ. $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=10\pi$

ㄷ. $f(t)$는 $t=-1$에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 지수함수 $f(x)=a^{x}\ (0<a<1)$의 그래프가 직선 $y=x$와 만나는 점의 x좌표를 b라 하자. 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le b) \\ f^{-1}(x) & (x > b) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, ab의 값은? [4점]

① e^{-e-1} ② $e^{-e-\frac{1}{e}}$ ③ $e^{-e+\frac{1}{e}}$ ④ e^{e-1} ⑤ e^{e+1}

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

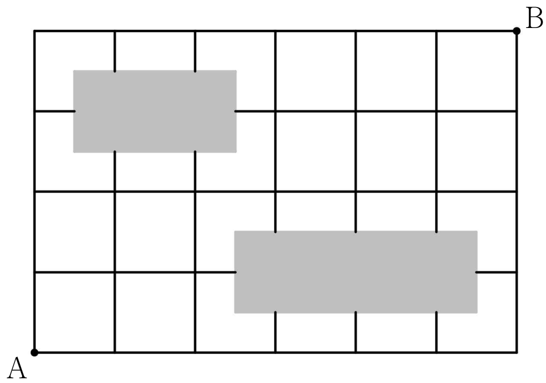
(가) $f(0)=0$, $f'(0)=1$
(나) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ 이다.

$f(-1)=k\ (-1<k<0)$일 때, $\displaystyle\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$의 값을 k로 나타낸 것은? [4점]

① $1-k^2$　② $1-2k$　③ $1-k$　④ $1+k$　⑤ $1+k^2$

22. $\sin^2\theta = \frac{4}{5}\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$일 때, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = p$이다. $\frac{1}{p^2}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 어느 부대가 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망에서 장애물(어두운 부분)을 피해 A 지점에서 B 지점으로 도로를 따라 이동하려고 한다. A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하시오. [3점]



24. 두 초점 F, F′을 공유하는 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{16}=1$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$이 있다. 타원과 쌍곡선이 만나는 점 중 하나를 P라 할 때, $\left|\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2\right|$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이다.) [3점]

25. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 함수

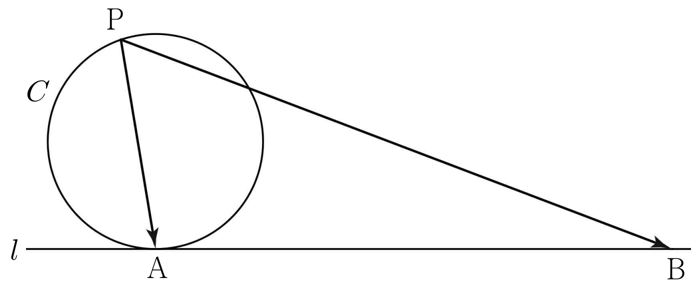
$$x=t^3,\ y=2t-\sqrt{2t}$$

의 그래프 위의 점 $(8,\ a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $100ab$의 값을 구하시오. [3점]

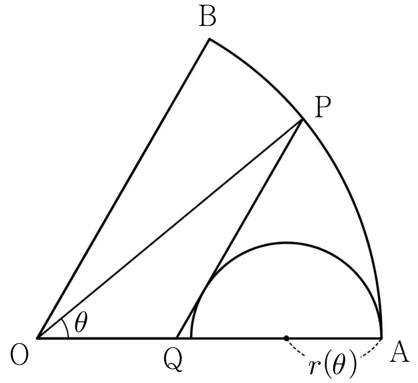
26. 곡선 $y=\sin^2 x\ (0 \le x \le \pi)$의 두 변곡점을 각각 A, B라 할 때, 점 A에서의 접선과 점 B에서의 접선이 만나는 점의 y좌표는 $p+q\pi$이다. $40(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

27. 주머니에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 차례로 꺼낸다. 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수일 때, 첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이었을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원 C와 원 C 위의 점 A에서의 접선 l이 있다. 원 C 위의 점 P와 $\overline{\mathrm{AB}}=24$를 만족시키는 직선 l 위의 점 B에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 Q라 하고 $\angle \mathrm{AOP} = \theta$라 하자. 점 A를 지름의 한 끝점으로 하고 지름이 선분 AQ 위에 있으며 선분 PQ에 접하는 반원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta} = a + b\sqrt{3}$이다. $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{3}\text{이고, } a,\ b\text{는 유리수이다.}\right)$ [4점]



30. 좌표공간에 평면 $z=1$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$이 있다. 점 $\mathrm{P}(2,\ 3,\ 2)$를 지나고 벡터 $\vec{d}=(a,\ b,\ 1)$과 평행한 직선이 삼각형 ABC의 둘레 또는 내부를 지날 때, $|\vec{d}+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$의 최솟값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a, b는 실수이다.) [4점]

공 란