수학 영역(B형)

1. ⑤	2. ⑤	3. ③	4. ④	5. ①
6. ②	7. ①	8. ④	9. ④	10. ②
11. ③	12. ②	13. ①	14. ③	15. ⑤
16. ①	17. ④	18. ②	19. ③	20. ④
21. ⑤	22. 64	23. 90	24. 12	25. 9
26. 23	27. 75	28. 160	29. 78	30. 8

새 교육과정에 해당하는 문항은 [2009 개정 교육과정]이라고 별도 표시함. 단, 표시하지 않은 문항은 2009 개정 교육과정에서 다루지 않는 문항으로 2017학년도 사관학교 1차 선발시험 출제 범위에 해당되지 않습니다.

[2009 개정 교육과정]

1. 순열과 조합 정답 ⑤

$${}_3\mathrm{H}_1 + {}_3\mathrm{H}_2 + {}_3\mathrm{H}_3$$

$$= {}_{3+1-1}\mathrm{C}_1 + {}_{3+2-1}\mathrm{C}_2 + {}_{3+3-1}\mathrm{C}_3$$

$$= {}_3\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_3 = 3 \times \frac{4\times3}{2\times1} \times \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}$$

$$= 3+6+10 = 19$$

2. 행렬과 그래프 정답 ⑤

임의의 행렬 $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$에 대하여

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_3 + a_4 \end{pmatrix}$$

이므로 행렬 $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은 행렬 M의 모든 성분의 합과 같다.

$(A+B)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$이므로 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합은 $3+6=9$

행렬 A의 모든 성분의 합이 2이므로 행렬 B의 모든 성분의 합은 $9-2=7$이다.

[2009 개정 교육과정]

3. 공간도형과 공간좌표 정답 ③

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times(-1)+2\times2}{1+2}, \frac{1\times3+2\times3}{1+2}, \frac{1\times2+2\times(-1)}{1+2}\right)$$

즉, $(1, 3, 0)$이므로 $a=1$, $b=3$, $c=0$

따라서 $a+b+c=4$

4. 일차변환과 행렬 정답 ④

$AB\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $AB\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로

$AB\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 즉 $AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$이다.

따라서 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ a=-2$, $b=-2$, $c=4$, $d=2$

$\therefore\ a+b+c+d=2$

[2009 개정 교육과정]

5. 이차곡선 정답 ①

점 $(2, b)$가 쌍곡선 $7x^2 - ay^2 = 20$ 위의 점이므로

$4\times2^2 - ab^2 = 20 \quad \therefore\ ab^2 = 8$ …… ㉠

쌍곡선 $7x^2 - ay^2 = 20$ 위의 점 $(2, b)$에서의 접선의 방정식은 $7(2x) - a(by) = 20$, $14x - aby = 20$

직선 $14x - aby = 20$이 점 $(0, -5)$를 지나므로

$5ab = 20 \quad \therefore\ ab = 4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=2 \quad \therefore\ a+b=4$

[2009 개정 교육과정]

6. 적분법 정답 ②

$f(x) = e^x + \int_0^1 tf(t)dt$에서

$\int_0^1 tf(t)dt = c$(c는 상수)로 놓으면 $f(x) = e^x + c$

따라서

$$c = \int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 t(e^t + c)dt$$

$$= \Big[t(e^t + ct)\Big]_0^1 - \int_0^1 (e^t + ct)dt$$

$$= \Big[t(e^t + ct)\Big]_0^1 - \Big[e^t + \frac{c}{2}t^2\Big]_0^1 = 1 + \frac{c}{2}$$

에서 $c=2 \quad \therefore\ f(x) = e^x + 2$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (e^x + 2)dx = \left[e^x + 2x\right]_0^1$

$= e + 1$

[2009 개정 교육과정]

7. 통계

정답 ①

과수원에서 생산되는 사과의 무게를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(350,\ 30^2)$를 따른다.

따라서 과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 9개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포$\mathrm{N}\left(350,\ \left(\frac{30}{\sqrt{9}}\right)^2\right)$

즉, $\mathrm{N}(350,\ 10^2)$을 따른다.

또한, 과수원에서 생산된 배의 무게를 Y라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(490,\ 40^2)$을 따른다.

따라서 과수원에서 생산된 배 중에서 임의로 선택한 4개의 무게의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면

확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포$\mathrm{N}\left(490,\ \left(\frac{40}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$

즉, $\mathrm{N}(490,\ 20^2)$을 따른다.

$X = 9\overline{X}$, $Y = 4\overline{Y}$ 이고 확률변수 X와 Y는 독립이다.

$\therefore \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 3240,\ \mathrm{Y} \geq 2008)$

$= \mathrm{P}(X \geq 3240) \times \mathrm{P}(Y \geq 2008)$

$= \mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}} \geq 360) \times \mathrm{P}(\overline{\mathrm{Y}} \geq 502)$

$= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{360-350}{10}\right) \times \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{502-490}{20}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \geq 1) \times \mathrm{P}(Z \geq 0.6)$

$= (0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)) \times (0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.6))$

$= (0.5 - 0.34) \times (0.5 - 0.23)$

$= 0.0432$

[2009 개정 교육과정]

8. 지수함수와 로그함수

정답 ④

$\log P_1 = k - \frac{1000}{0+250} = k - 4$

$\log P_2 = k - \frac{1000}{50+250} = k - \frac{10}{3}$

$\log \frac{P_2}{P_1} = \log P_2 - \log P_1$

$= \left(k - \frac{10}{3}\right) - (k-4) = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{2}{3}}$

[2009 개정 교육과정]

9. 확률

정답 ④

첫 번째 꺼낸 공이 검은 공인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 공이 검은 공인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)$이다.

(i) 첫 번째 꺼낸 공이 흰 공 또는 파란 공이었을 때, 두 번째 꺼낸 공이 검은 공일 확률은 $\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_1} \times \frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1} = \frac{3}{14}$

(ii) 첫 번째 꺼낸 공이 검은 공이었을 때, 두 번째 꺼낸 공도 검은 공일 확률은 $\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_1} \times \frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1} = \frac{2}{7}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{14} + \frac{2}{7}} = \frac{4}{7}$$

10. 삼각함수

정답 ②

$f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\cos x$

$= 2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\cos x$

$= \sin x + 2\sqrt{3}\cos x = \sqrt{13}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단}, \sin\alpha = \frac{2\sqrt{39}}{13},\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}\right)$

따라서 함수 $f(x)$는 $0 \leq x \leq \pi$에서 $x + \alpha = \frac{\pi}{2}$일 때, 최댓값 $\sqrt{13}$을 갖는다. 따라서 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$이므로

$\tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

[2009 개정 교육과정]

11. 미분법

정답 ③

$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta - 2\sin 2\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta + 2\cos 2\theta$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{\cos\theta + \cos 2\theta}{\sin\theta + \sin 2\theta}$$

따라서 $\theta = \frac{\pi}{6}$에 대응하는 이 곡선 위의 점에서의 접선의

기울기는 $-\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=-1$

[2009 개정 교육과정]

12. 적분법 정답 ②

$0\le\theta\le\pi$일 때, 이 곡선의 길이는

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{(-2\sin\theta-2\sin2\theta)^2+(2\cos\theta+2\cos2\theta)^2}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{2+2(\cos\theta cos2\theta+\sin\theta sin2\theta)}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta\ \left(\because\ \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}\right)$$

$$=4\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=4\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$=4(2-0)=8$$

13. 방정식과 부등식 정답 ①

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)+3}}-\frac{1}{f(x)}=\frac{3}{f(x)\sqrt{f(x)+3}}$$

$\dfrac{f(x)-\sqrt{f(x)+3}}{f(x)\sqrt{f(x)+3}}=\dfrac{3}{f(x)\sqrt{f(x)+3}}$ 에서

$f(x)-\sqrt{f(x)+3}=3$

$f(x)-3=\sqrt{f(x)+3}$ (단, $f(x)\neq0,\ f(x)\ge-3$)

위 등식의 양변을 제곱하면

$(f(x)-3)^2=f(x)+3$

$\{f(x)\}^2-7f(x)+6=0$

$\{f(x)-6\}\{f(x)-1\}=0$

$f(x)=1$이면 식이 성립하지 않으므로 $f(x)=6$

$x^2+2kx+2k^2+k=6$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

판별식을 D라 할 때, $\dfrac{D}{4}=-k^2-k+6>0$이어야 한다.

$k^2+k-6<0,\ (k+3)(k-2)<0$

$\therefore -3<k<2$

따라서 구하는 모든 정수 k의 값의 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$

[2009 개정 교육과정]

14. 적분법 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(1+\frac{3k}{n}\right)=\frac{1}{3}\times\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(1+\frac{3k}{n}\right)$$

y

4 $y=f(x)$

1

O $\sqrt{3}$

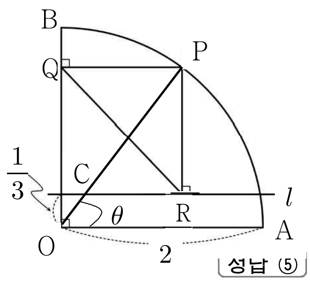
$$=\frac{1}{3}\int_1^4 g(x)dx$$

이때, 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수 이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $f(\sqrt{3})=1,\ f(0)=4$이므로 $\int_1^4 g(x)dx$의 값은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같다. 따라서

$$\frac{1}{3}\int_1^4 g(x)dx=\frac{1}{3}\left(\int_0^{\sqrt{3}}f(x)dx-\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4}{1+x^2}dx-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{4}{\sec^2\theta}\times\sec^2\theta d$$



[2009 개정 교육과정]

15. 삼각함수 정답 ⑤

$\theta=\angle\mathrm{POA}$라 두자. 세 점 P, Q, R의 좌표는

$\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$

$\mathrm{Q}(0,\ 2\sin\theta)$

$\mathrm{R}\left(2\cos\theta,\ \dfrac{1}{3}\right)$

따라서 $\triangle\mathrm{PQR}$의 넓이를 $f(\theta)$라 하면

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times\left(2\sin\theta-\frac{1}{3}\right)=\sin2\theta-\frac{1}{3}\cos\theta$$

$$f'(\theta)=2\cos 2\theta+\frac{1}{3}\sin\theta=2-4\sin^2\theta+\frac{1}{3}\sin\theta$$
$$=-\frac{1}{3}(3\sin\theta+2)(4\sin\theta-3)$$

$\alpha \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 이므로 $f'(\theta)=0$ 에서 $\sin\theta=\frac{3}{4}$ 일 때,

$f(\theta)$는 극대이자 최대가 된다. $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 이므로 구하는 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7\sqrt{7}}{24}$

16. 수열의 극한 　　정답 ①

R_1에서 정사각형의 한 변의 길이가 2이므로 삼각형 $A_1B_1M_1$의 넓이는 1이다.

R_1에서의 한 원의 반지름의 길이를 r이라 하면 삼각형 $A_1B_1M_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}r(1+2+\sqrt{5})=1$이므로

$$r=\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$$

따라서 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이는

$$2\times\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})^2\pi=(7-3\sqrt{5})\pi$$

$\overline{A_1M_1} : \overline{A_2M_2}=2:1$이므로 R_2에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 그림 R_1에서 색칠된 도형의 넓이의 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$배이다.

따라서

$$S_n=(7-3\sqrt{5})+\frac{1}{4}(7-3\sqrt{5})+\frac{1}{4^2}(7-3\sqrt{5})+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}(7-3\sqrt{5})$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{7-3\sqrt{5}}{1-\boxed{\frac{1}{4}}}=\frac{4(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$$

17. 수열 　　정답 ④

$$a_{n+1}=-\frac{3a_n+2}{a_n}\ (n\ge 1)\text{에서}$$

$$a_{n+1}+2=-\frac{3a_n+2}{a_n}+2$$
$$=-\frac{a_n+\ 2}{a_n}\ (n\ge 1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다. 여기서 $b_n=\frac{1}{a_n+2}$ $(n\ge 1)$이라 하면

$a_1=-\frac{5}{3}$이므로 $b_1=3$이고

$$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}\boxed{+2}}=-\frac{a_n}{a_n+2}\ (\because ㉠)$$
$$=-\frac{(a_n+2)-2}{a_n+2}=-1+\frac{2}{a_n+2}$$
$$=2b_n-\boxed{1}\ (n\ge 1)$$

$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$이므로

수열 $\{b_n-1\}$은 첫째항이 $b_1-1=2$이고 공비가 2인 등비수열이다. $\therefore b_n-1=2^n$

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면 $b_n=\boxed{2^n+1}$ $(n\ge 1)$

이므로 $a_n=\frac{1}{2^n+1}-2$ $(n\ge 1)$이다.

따라서 $p=2,\ q=1,\ f(n)=2^n+1$이므로

$p\times q\times f(5)=2\times 1\times(2^5+1)=66$

18. 함수의 극한과 연속 　　정답 ②

ㄱ. (참) $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=\lim\limits_{x\to -0}(1+\sin x)=1$

$$\lim_{x\to -0}f(-x)=\lim_{t\to +0}f(t)$$
$$=\lim_{t\to +0}(-1+\sin t)=-1$$
$$\therefore \lim_{x\to -0}f(x)f(-x)=1\times(-1)=-1$$
$$\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}(-1+\sin x)=-1$$
$$\lim_{x\to +0}f(-x)=\lim_{t\to -0}f(t)=\lim_{t\to -0}(1+\sin t)=1$$
$$\therefore \lim_{x\to +0}f(x)f(-x)=-1$$

따라서 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)f(-x)=-1$

ㄴ. (참) $x\to\frac{\pi}{2}$일 때, $f(x)\to -0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(f(x))=\lim_{t\to -0}f(t)=\lim_{t\to -0}(1+\sin t)=1$$
$$f\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=f(0)=1$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(f(x))=f\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\text{이므로}$$

함수 $f(f(x))$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이다.

ㄷ. (거짓) $g(x)=\{f(x)\}^2$이라 하면 $g(0)=1$이므로

$$\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{(1+\sin x)^2-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to -0}\frac{2\sin x+\sin^2 x}{x}$$
$$=2\left(\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{(-1+\sin x)^2-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to +0}\frac{-2\sin x+\sin^2 x}{x}$$
$$=-2\left(\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$

$\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x}\neq \lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 미분불가능하다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[2009 개정 교육과정]

19. 백터 정답 ③

구 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(2,\ 2,\ 1)$이고, 점 P는 xy 평면 위의 점이므로 $\mathrm{P}(a, b, 0)$라 할 수 있다.

한편, 점 P는 구 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ 위의 점이므로 $(a-2)^2+(b-2)^2+(0-1)^2=9$

$(a-2)^2+(b-2)^2=8$ …… ㉠

구 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$는 점 P에서 평면 α와 접하므로 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\alpha$, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(a-2,\ b-2,\ -1)$

점 P와 A는 평면 α 위의 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$
이다. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$에서

$(a-2, b-2, -1)\cdot(a-3, b-3, 4)$
$=(a-2)(a-3)+(b-2)(b-3)-4$
$=a^2-5a+b^2-5b+8=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a+b=8$

$b=8-a$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$2(a-4)^2=0\quad\therefore\ a=b=4\ (\because\ b=8-a)$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2,\ 2,\ -1)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\alpha$이므로

평면 α의 법선벡터를 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$라 하면

평면 α가 점 P를 지나므로 평면 α의 방정식은

$2(x-4)+2(y-4)-(z-0)=0$

즉, $2x+2y-z=16$이다.

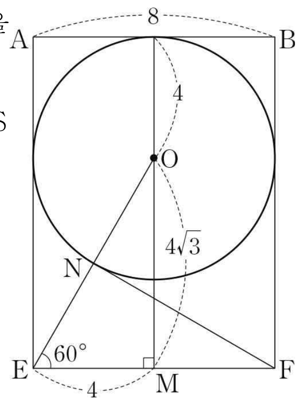
따라서 구하는 원점과 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|-16|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{16}{3}$$

[2009 개정 교육과정]

20. 삼각함수 정답 ④

구의 중심을 O, 점 O에서 $\overline{\mathrm{EF}}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{OM}}=4\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{OE}}=8$이다.



원과 선분 OE가 만나는 점을 N이라 하면 $\overline{\mathrm{EN}}=4$

$\triangle\mathrm{OEM}$과 $\triangle\mathrm{NEF}$는 SAS 합동이고, $\angle\mathrm{ENF}=90^\circ$

이므로 $\angle\mathrm{EOM}=\theta$라 하면

$\angle\mathrm{EFN}=\theta$이다.

$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$

이고, $\angle\mathrm{NEF}=\frac{\pi}{3}$

따라서 $S_1\cos\frac{\pi}{6}+S_2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}S_1+S_2)=16\pi$

$$\therefore\ S_1+\frac{1}{\sqrt{3}}S_2=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}(\sqrt{3}S_1+S_2)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\times16\pi=\frac{32\sqrt{3}}{3}\pi$$

21. 수열 정답 ⑤

모든 자연수 k에 대하여 $g(x^k)=k\times g(x)-a_k$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_k가 존재한다.

조건 (가)에서 $\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=5g(x)+\sum_{k=1}^{5}a_k$이고

$g(x^{10})+2=10g(x)+a_{10}+2$이므로

$\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=g(x^{10})+2$에서

$5g(x) = a_{10} - \sum_{k=1}^{5} a_k + 2$

위 등식의 우변이 정수이므로 $5g(x)$도 정수이어야 한다.

$\therefore\ g(x) = 0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\ (\because\ 0 \le g(x) < 1)$

…… ㉠

모든 자연수 k에 대하여 $f(kx) \ge f(x)$이다.

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{3} f(kx) = 3f(x)$이므로 $f(3x) = f(x)$이어야 한다.

$\log 3x = f(x) + g(x) + \log 3$이므로

$f(3x) = f(x)$이려면 $g(x) + \log 3 < 1$이어야 한다.

$\therefore\ g(x) < 1 - \log 3 = 0.5229$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x) = 0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5}$

(i) $g(x) = 0$이면

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = 0$이고 $g(x^{10}) + 2 = 2$이므로

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) \ne g(x^{10}) + 2$

(ii) $g(x) = \frac{1}{5}$이면

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + 0 = 2$이고

$g(x^{10}) + 2 = 2$이므로

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = g(x^{10}) + 2$

(iii) $g(x) = \frac{2}{5}$이면

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + 0 = 2$

$g(x^{10}) + 2 = 2$이므로

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = g(x^{10}) + 2$

(i), (ii), (iii)에서 $g(x) = \frac{1}{5}$ 또는 $g(x) = \frac{2}{5}$

$1 < x < 10^5$이므로 $0 \le f(x) < 5$이다.

따라서 x가 조건을 만족시킬 때,

$\log x = f(x) + g(x)$이다.

(단, $f(x) = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이고, $g(x) = \frac{1}{5},\ \frac{2}{5}$)

$\therefore\ \log A = \sum_{k=1}^{5} \left\{(k-1) + \frac{1}{5}\right\} + \sum_{k=1}^{5} \left\{(k-1) + \frac{2}{5}\right\}$

$= 11 + 12 = 23$

22. 수열 정답 64

$a_7 = a_1 + \sum_{k=1}^{6} (a_{k+1} - a_k)$

$= 1 + \sum_{k=1}^{6} 3k$

$= 1 + 3 \times \frac{6 \times 7}{2} = 64$

23. 일차변환과 행렬 정답 90

$$f \circ f = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 합성변환 $f \circ f$는 닮음의 비가 $\frac{2}{9}$이고 90° 만큼 회전시키는 변환이므로 넓이의 비는 $\left(\frac{2}{9}\right)^2$ 배가 된다.

사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{5 \times (7+2)}{2} = \frac{45}{2}$

$81S = 81 \times \frac{45}{2} \times \left(\frac{2}{9}\right)^2 = 90$

[2009 개정 교육과정]

24. 이차곡선 정답 12

$2x^2 + y^2 = 16$에서 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16} = 1$이므로 두 초점 F, F′의 좌표는 $\mathrm{F}(0,\ 2\sqrt{2})$, $\mathrm{F'}(0,\ -2\sqrt{2})$

따라서 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 8$ ……㉠

$\frac{\overline{\mathrm{PF'}}}{\overline{\mathrm{PF}}} = 3$에서 $\overline{\mathrm{PF'}} = 3 \times \overline{\mathrm{PF}}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{PF}} = 2,\ \overline{\mathrm{PF'}} = 6$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{PF'}} = 12$

25. 행렬과 그래프 정답 9

조건 (가)에 의하여 $(A-E)(A-3E) = E$

$A^2 = 4A - 2E$

조건 (나)에서 $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=(4A-2E)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$=4A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-2E\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$=4\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=3A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix}$

$\therefore\ x=15,\ y=-6,\ x+y=9$

[2009 개정 교육과정]

26. 미분법 정답 23

$\lim_{x\to0}\frac{\ln f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln f(x)}{f(x)-1}\times\frac{f(x)-1}{x}\right)$

$f(x)-1=t$로 놓으면 $x\to0$일 때, $t\to0$이므로

(주어진 식)$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}\times\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=1\times f'(0)=f'(0)$

따라서 $f'(1)=f'(0)+\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to0}\frac{\ln f(x)}{x}$가 존재하므로 $\lim_{x\to0}\ln f(x)=0$이어야 한다.

따라서 $f(0)=1$이어야 한다.

$f(x)=ax^2+bx+c$($a,\ b,\ c$는 상수)라 하면

$f(0)=c=1$이므로

$f(1)=a+b+1=2$에서 $a+b=1$ ······㉠

$f'(x)=2ax+b$에서 $f'(0)=b,\ f'(1)=2a+b$이므로

$2a+b=b+\frac{1}{2}$ 따라서 $a=\frac{1}{4}$이고 ㉠에서 $b=\frac{3}{4}$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+1$

$\therefore\ f(8)=16+6+1=23$

[2009 개정 교육과정]

27. 함수의 극한과 연속 정답 75

$\mathrm{P}(t,\ \cos2t),\ \mathrm{Q}(-t,\ \cos2t),\ \mathrm{R}(0,\ 1),\ \mathrm{C}(0,\ f(t))$

이고 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심이 C이고 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{RC}}$와 같으므로 이 원의 방정식은

$x^2+\{y-f(t)\}^2=\{1-f(t)\}^2$이다.

점 $\mathrm{P}(t,\ \cos2t)$는 원 위의 점이므로 $x=t,\ y=\cos2t$를 대입하면 $t^2+\cos^2 2t-2f(t)\cos2t=1-2f(t)$

$f(t)=\frac{t^2+\cos^2 2t-1}{2(\cos2t-1)}=\frac{-t^2+\sin^2 2t}{4\sin^2 t}$

$\therefore\ \alpha=\lim_{t\to+0}f(t)=\lim_{t\to+0}\frac{-t^2+\sin^2 2t}{4\sin^2 t}$

$=-\frac{1}{4}\lim_{t\to+0}\frac{t^2}{\sin^2 t}\times\lim_{t\to+0}\frac{4\sin^2 t\cos^2 t}{4\sin^2 t}$

$=-\frac{1}{4}\times\lim_{t\to+0}\cos^2 t=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$

$\therefore\ 100\alpha=75$

[2009 개정 교육과정]

28. 적분법 정답 160

$\tan\theta=2$이므로 단면의 경계는 단축이 4이고 장축이 $4\sqrt{5}$인 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1$의 일부이다.

$\therefore\ V=\pi\int_{-2}^{2}x^2dt=\pi\int_{-2}^{2}(20-5y^2)dt$

$=2\pi\int_0^2 5(4-t^2)dt=10\pi\left[4t-\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{160}{3}\pi$

$\therefore\ \frac{3V}{\pi}=160$

[2009 개정 교육과정]

29. 확률 정답 78

앞면인 동전 2개를 선택하여 뒤집는 사건을 A

뒷면인 동전 2개를 선택하여 뒤집는 사건을 B

앞면인 동전과 뒷면인 동전을 각각 1개씩 뒤집는 사건을 C라 하자.

(ⅰ) 사건 A가 먼저 시작되는 경우

$A\to B\to C$뿐이며 그 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{50}$

(ⅱ) 사건 B가 먼저 시작되는 경우

$B\to A\to C$인 경우의 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{27}{250}$

$B\to C\to A$인 경우의 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{9}{125}$

(ⅲ) 사건 C가 먼저 시작되는 경우

$C \to A \to B$인 경우의 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{50}$$

$C \to B \to A$ 인 경우의 확률은

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_4C_2}{{}_5C_2} = \frac{27}{250}$$

$C \to C \to C$인 경우의 확률은

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{27}{125}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 $\frac{78}{125}$

$\therefore\ 125p = 78$

[2009 개정 교육과정]

30. 벡터 정답 8

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AO})$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$

세 점 O, A, B는 고정되어 있는 점이므로 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$가 최대일 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP}$가 최대이다.

최단경로는 전개도에서 두 점 A, D를 잇는 직선이므로 최단경로 l이 직선 OB와 만나는 점을 M이라 하면

$\angle \mathrm{MAB} = \frac{\pi}{6}$ 이다.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} \le 2 \times 2 \times cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = 2 \times \overline{AO} \times \cos(\angle \mathrm{OAB})$

$= 2 \times 1 = 2$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$

$\le 2\sqrt{3} - 2$

$\therefore\ a = -2,\ b = 2$

$\therefore\ a^2 + b^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8$