수학 영역(A형)

1. ③	2. ④	3. ⑤	4. ①	5. ④
6. ①	7. ②	8. ④	9. ②	10. ③
11. ②	12. ⑤	13. ①	14. ⑤	15. ⑤
16. ①	17. ③	18. ⑤	19. ④	20. ③
21. ②	22. 18	23. 10	24. 21	25. 15
26. 121	27. 16	28. 495	29. 12	30. 23

새 교육과정에 해당하는 문항은 [2009 개정 교육과정]이라고 별도 표시함. 단, 표시하지 않은 문항은 2009 개정 교육과정에서 다루지 않는 문항으로 2017학년도 사관학교 1차 선발시험 출제 범위에 해당되지 않음.

[2009 개정 교육과정]

1. 지수함수와 로그함수 정답 ③

$$\log_4 72-\log_2 6=\log_4 72-\log_4 36=\log_4 \frac{72}{36}$$
$$=\log_4 2=\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}$$

2. 행렬과 그래프 정답 ④

$$AB+A=A(B+E)$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $AB+A$의 $(1,\ 2)$성분은 7이다.

[2009 개정 교육과정]

3. 다항함수의 미분법 정답 ⑤

$f(x)=x^3+2x^2+13x+10$에서

$f'(x)=3x^2+4x+13$

따라서 $f'(1)=3+4+13=20$

[2009 개정 교육과정]

4. 함수의 극한과 연속 정답 ①

$$\lim_{x\to1+0} f(x)-\lim_{x\to2-0} f(x)=-1-1=-2$$

[2009 개정 교육과정]

5. 확률 정답 ④

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}^C\cap\mathrm{B})=\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

이때, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{B})$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$
$$=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{5}{6}$$

에서 $\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{2}{3}$

[2009 개정 교육과정]

6. 수열 정답 ①

수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+2}=a_n+2$를 만족시키므로

수열 $\{a_{2n-1}\}$과 수열 $\{a_{2n}\}$은 각각 공차가 2인 등차수열이다. 이때, $a_1=1$, $a_2=p$이므로

$a_{2n-1}=1+(n-1)\times2=2n-1$

$a_{2n}=p+(n-1)\times2=2n+p-2$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5} a_{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(2k-1)+\sum_{k=1}^{5}\{2k+(p-2)\}$$
$$=2\times\frac{5\times6}{2}-5+2\times\frac{5\times6}{2}+5(p-2)$$
$$=25+(20+5p)=70$$

$5p=25$이므로 $p=5$

[2009 개정 교육과정]

7. 통계 정답 ②

과수원에서 생산되는 사과의 무게를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(350,\ 30^2)$를 따른다.

따라서 과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 9개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(350,\ \left(\frac{30}{\sqrt{9}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(350,\ 10^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(345\le\overline{\mathrm{X}}\le365)$

$= P\left(\frac{345-350}{10} \le Z \le \frac{365-350}{10}\right)$

$= P(-0.5 \le Z \le 1.5)$

$= P(0 \le Z \le 0.5) + P(0 \le Z \le 1.5)$

$= 0.1915 + 0.4332 = 0.6247$

[2009 개정 교육과정]

8. 지수함수와 로그함수 정답 ④

$\log P_1 = k - \frac{1000}{0+250} = k-4$

$\log P_2 = k - \frac{1000}{50+250} = k - \frac{10}{3}$

$\log \frac{P_2}{P_1} = \log P_2 - \log P_1 = \left(k - \frac{10}{3}\right) - (k-4) = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{2}{3}}$

[2009 개정 교육과정]

9. 수열의 극한 정답 ②

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{3^n} - 4\right) = 2$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{3^n} - 4\right) = 0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n} = 4$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n + 2^n}{3^{n-1}+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{3^n} + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3} + \frac{4}{3^n}} = \frac{4+0}{\frac{1}{3}+0} = 12$

10. 지수함수와 로그함수 정답 ③

$\log_2 x = X$, $\log_3 y = Y$라 하면

$\log_x y = \log_3 8$에서 $\frac{\log_3 y}{\log_3 x} = 3\log_3 2$

$\log_3 y = 3\log_3 2 \times log_3 x = 3\log_3 2 \times \frac{\log_2 x}{\log_2 3}$

$= 3(\log_3 2)^2 \times \log_2 x$ …… ㉠

㉠을 $4(\log_2 x)(\log_3 y) = 3$에 대입하면

$4(\log_2 x)\{3(\log_3 2)^2 \times \log_2 x\} = 3$

$(\log_2 x)^2 = \frac{1}{4(\log_3 2)^2} = \frac{(\log_2 3)^2}{4}$

주어진 연립방정식의 해 $x = \alpha$가 $\alpha > 1$이므로

$\log_2 \alpha > 0$이다.

따라서 $\log_2 x = \frac{\log_2 3}{2} = \log_2 \sqrt{3}$ 이므로

$x = \sqrt{3}$, 즉 $\alpha = \sqrt{3}$이다.

$x = \sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면

$\log_3 y = 3(\log_3 2)^2 \times \log_2 \sqrt{3}$

$= 3(\log_3 2)^2 \times \frac{1}{2\log_3 2} = \frac{3}{2}\log_3 2$

$= \log_3 2\sqrt{2}$

따라서 $y = 2\sqrt{2}$, 즉 $\beta = 2\sqrt{2}$이다.

$\therefore \alpha\beta = \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$

[2009 개정 교육과정]

11. 다항함수의 적분법 정답 ②

$n=1$일 때, $f(x) = g(x)$에서 $x^2 - 6x + 7 = x + 1$

$x^2 - 7x + 6 = 0$, $(x-1)(x-6) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 6$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^1 \{f(x) - g(x)\}dx = \int_0^1 (x^2 - 7x + 6)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 6x\right]_0^1$

$= \frac{1}{3} - \frac{7}{2} + 6 = \frac{17}{6}$

[2009 개정 교육과정]

12. 수열 정답 ⑤

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = g(x)$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_n, $\beta_n(\alpha_n < \beta_n)$이라 하면

직선 $y = g(x)$의 기울기가 1이므로 두 점사이의 거리는 $\sqrt{2}(\beta_n - \alpha_n)$이다. α_n, β_n은 $x^2 - 7x + 7 - n = 0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha_n + \beta_n = 7$, $\alpha_n\beta_n = 7 - n$이다. 따라서

$a_n^2 = \{\sqrt{2}(\beta_n - \alpha_n)\}^2$

$= 2\{(\alpha_n + \beta_n)^2 - 4\alpha_n\beta_n\}$

$= 2\{7^2 - 4(7-n)\} = 8n + 42$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n^2 = \sum_{n=1}^{10}(8n+42)$

$= 8 \times \dfrac{10 \times 11}{2} + 10 \times 42$

$= 860$

13. 행렬과 그래프 정답 ①

행렬 M^2의 $(i,\ i)$성분은 행렬 M의 i행에 대응하는 그래프 G의 꼭짓점에 연결된 변의 개수와 같다.

또한, 행렬 M의 i행의 성분 중 1의 개수는 i행에 대응하는 그래프 G의 꼭짓점에 연결된 변의 개수와 같다.

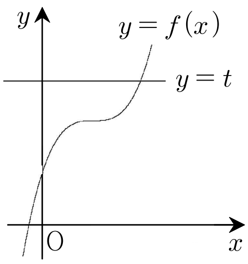
(단, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)

주어진 행렬 M^2에 의하여 행렬 M의 1, 2, 3, 4, 5행에 대응하는 그래프 G의 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 각각 4, 3, 3, 3, 3이므로 $a = 4+3+3+3+3 = 16$, $b = 1$

따라서 $a + b = 17$

[2009 개정 교육과정]

14. 다항함수의 미분법 정답 ⑤



$f(x) = 2x^3 + ax^2 + 6x - 3$이라 하면 $g(t)$는 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$의 교점의 개수이다.

이때, 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지면 t의 값에 따라 근의 개수가 변해 $g(t)$가 불연속이 되는 점이 생기므로 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않을 때 실수 전체에서 연속이 되며 이때, $g(t) = 1$이다.

$f'(x) = 6x^2 + 2ax + 6$이므로 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x) = 0$이 서로 다른 실근을 갖지 않으면 된다. 이차방정식 $f'(x) = 0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4} = a^2 - 36 \le 0$에서 $-6 \le a \le 6$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 $6 - (-6) + 1 = 13$(개)이다.

15. 행렬과 그래프 정답 ⑤

ㄱ. (참) $AB = A - B$에서 $AB - A + B - E = -E$

$(A+E)(B-E) = -E$

$\therefore\ (A+E)^{-1} = E - B$

$(A+E)(E-B) = E,\ (E-B)(A+E) = E$이므로

$(A+E)(E-B) = (E-B)(A+E)$에서

$AB = BA$

ㄴ. (참) $AB = A - B$이고 $AB = BA$이므로

$2BA + 2B = A^2$에서

$2(A-B) + 2B = A^2,\ A^2 = 2A$

$A^2 - 2A - 3E = -3E$에서

$(A+E)(A-3E) = -3E$

$\therefore\ (A-3E)^{-1} = -\dfrac{1}{3}(A+E)$

따라서 행렬 $A - 3E$의 역행렬이 존재한다.

ㄷ. (참) $(A+E)(A-3E) = -3E$에서

$(A+E)^{-1} = \dfrac{1}{3}(3E - A)$

ㄱ에서 $(A+E)^{-1} = E - B$이므로

$\dfrac{1}{3}(3E - A) = E - B$

따라서 $A = 3B$이므로

$(A+B)^2 = (4B)^2 = 16B^2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

[2009 개정 교육과정]

16. 수열의 극한 정답 ①

R_1에서 정사각형의 한 변의 길이가 2이므로 삼각형 $\mathrm{A_1B_1M_1}$의 넓이는 1이다.

R_1에서의 한 원의 반지름의 길이를 r이라 하면 삼각형 $\mathrm{A_1B_1M_1}$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}r(1 + 2 + \sqrt{5}) = 1$이므로

$r = \dfrac{2}{3 + \sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$

따라서 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이는

$2 \times \dfrac{1}{4}(3 - \sqrt{5})^2\pi = (7 - 3\sqrt{5})\pi$

$\overline{\mathrm{A_1M_1}} : \overline{\mathrm{A_2M_2}} = 2 : 1$이므로 R_2에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 그림 R_1에서 색칠된 도형의 넓이의 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$배이다.

따라서

$$S_n = (7-3\sqrt{5}) + \frac{1}{4}(7-3\sqrt{5}) + \frac{1}{4^2}(7-3\sqrt{5}) + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}(7-3\sqrt{5})$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{7-3\sqrt{5}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$$

[2009 개정 교육과정]

17. 다항함수의 적분법 정답 ③

$f(x+2) = f(x) + 2$이고, 조건 (가)에 의하여 $f(0) = 0$

조건 (나)에 의하여 $f(2) = f(0) + 2 = 2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-0} f(x) = f(2)$에서 $4a = 2$, $a = \frac{1}{2}$

따라서

$$\int_1^7 f(x)dx$$

$$= \int_1^7 \frac{x^2}{2}dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2}{2}dx + \int_2^4 \frac{x^2}{2}dx + \int_4^6 \frac{x^2}{2}dx + \int_6^7 \frac{x^2}{2}dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2}{2}dx + \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}+2\right)dx + \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}+4\right)dx + \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+6\right)dx$$

$$= 3\int_0^2 \frac{x^2}{2}dx + 18 = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + 18$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{8}{3} + 18 = 22$$

18. 지수함수와 로그함수 정답 ⑤

점 A의 x좌표를 a라 하면 A의 좌표는 $(a,\ 2^{a-1}+1)$

점 A와 B는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로

점 B의 좌표는 $(2^{a-1}+1,\ a)$

점 B가 곡선 $y = \log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$a = \log_2(2^{a-1}+2)$, $2^a = 2^{a-1}+2$

$2^a - 2^{a-1} = 2$, $2^a\left(1-\frac{1}{2}\right) = 2$, $2^a = 4$

따라서 $a = 2$이므로 점 A의 y좌표는 3

직선 AC가 x축과 평행하므로 점 C의 y좌표도 3이다.

$\log_2(x+1) = 3$에서 $x+1 = 8$이므로 $x = 7$

따라서 A$(2,\ 3)$, B$(3,\ 2)$, C$(7,\ 3)$이므로

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+3+7}{3},\ \frac{3+2+3}{3}\right)$, 즉 $\left(4,\ \frac{8}{3}\right)$이다.

$\therefore\ p = 4$, $q = \frac{8}{3}$, $p+q = \frac{20}{3}$

19. 수열 정답 ④

$a_{n+1} = -\frac{3a_n+2}{a_n}$ $(n \ge 1)$에서

$$a_{n+1} + 2 = -\frac{3a_n+2}{a_n} + 2$$

$$= -\frac{a_n + 2}{a_n}\ (n \ge 1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다. 여기서

$b_n = \frac{1}{a_n+2}$ $(n \ge 1)$이라 하면

$a_1 = -\frac{5}{3}$이므로 $b_1 = 3$이고

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}+2} = -\frac{a_n}{a_n+2}\ (\because ㉠)$$

$$= -\frac{(a_n+2)-2}{a_n+2} = -1 + \frac{2}{a_n+2}$$

$$= 2b_n - \boxed{1}\ (n \ge 1)$$

$b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1)$이므로

수열 $\{b_n - 1\}$은 첫째항이 $b_1 - 1 = 2$이고 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore\ b_n - 1 = 2^n$

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$b_n = \boxed{2^n+1}$ $(n \ge 1)$이므로

$a_n = \frac{1}{2^n+1} - 2$ $(n \ge 1)$이다.

따라서 $p = 2$, $q = 1$, $f(n) = 2^n + 1$이므로

$p \times q \times f(5) = 2 \times 1 \times (2^5+1) = 66$

[2009 개정 교육과정]

20. 확률 정답 ③

앞면인 동전 2개를 선택하여 뒤집는 사건을 A
뒷면인 동전 2개를 선택하여 뒤집는 사건을 B
앞면인 동전과 뒷면인 동전을 각각 1개씩 뒤집는 사건을 C 라 하자.

(ⅰ) 사건 A가 먼저 시작되는 경우

$A \to B \to C$뿐이며 그 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{3}{50}$$

(ⅱ) 사건 B가 먼저 시작되는 경우

$B \to A \to C$인 경우의 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{27}{250}$$

$B \to C \to A$인 경우의 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_1\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{9}{125}$$

(ⅲ) 사건 C가 먼저 시작되는 경우

$C \to A \to B$인 경우의 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{3}{50}$$

$C \to B \to A$인 경우의 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{27}{250}$$

$C \to C \to C$인 경우의 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{27}{125}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 $\dfrac{78}{125}$

[2009 개정 교육과정]

21. 다항함수의 미분법 　정답 ②

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 두면
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
$f(0) = c$, $f'(0) = b$이므로 점 $\mathrm{A}(0,\ c)$ 따라서 곡선 $f(x)$위의 점 A에서의 접선의 방정식은 $y = bx + c$이다.
한편, 직선 m의 기울기가 1이고, 두 직선 l, m이 서로 수직이므로 $b = -1$, 즉 $l : y = -x + c$
점 B는 직선 $m : y = x$ 위의 점이므로 점 B의 x좌표를 k라 하면 $k = -k + c$, $c = 2k$
$f(k) = k^3 + ak^2 - k + 2k = k$이므로 $k^2(k + a) = 0$
$k = -a (\because k \neq 0)$
또한, 곡선 $f(x)$위의 점 $\mathrm{B}(k,\ k)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(k) = 3k^2 + 2ak - 1 = 3k^2 - 2k^2 - 1$
$\quad = k^2 - 1 = 1$

따라서 $k = \sqrt{2}\ (\because k > 0)$에서
$a = -\sqrt{2}$, $c = 2\sqrt{2}$이므로
$f(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + 2\sqrt{2}$
곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$의 교점을 구하면
$x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + 2\sqrt{2} = x$, $(x^2 - 2)(x - \sqrt{2}) = 0$
따라서 점 C의 x 좌표는 $x = -\sqrt{2}$이므로 곡선 $f(x)$위의 점 C에서의 기울기는
$f'(-\sqrt{2}) = 6 + 4 - 1 = 9$

[2009 개정 교육과정]

22. 수열 　정답 18

이차방정식 $x^2 - kx + 72 = 0$의 두 근 α, β에 대하여 α, β, $\alpha + \beta$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\beta = \alpha + (\alpha + \beta)$에서 $\beta = 2\alpha$ …… ㉠
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k$, $\alpha\beta = 72$이므로
㉠에서 $2\alpha^2 = 72$
$\therefore\ \alpha = \pm 6$, $\beta = \pm 12$ ($\because$ ㉠)
이때, $\alpha + \beta = k > 0$이므로 $\alpha = 6$, $\beta = 12$
따라서 $k = \alpha + \beta = 18$

[2009 개정 교육과정]

23. 확률 　정답 10

(ⅰ) 첫 번째 꺼낸 공과 두 번째 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률은 $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1} \times \dfrac{{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_1} = \dfrac{1}{10}$

(ⅱ) 첫 번째 꺼낸 공이 검은 공이고 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1} \times \dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_1} = \dfrac{3}{10}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$p = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{10}} = \frac{1}{4}$$ 이므로 $40p = 10$

[2009 개정 교육과정]

24. 다항함수의 적분법

정답 21

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}(3x^2+4x)dx=\frac{1}{2}\left[x^3+2x^2\right]_1^3$$

$$=\frac{1}{2}\{(27+18)-(1+2)\}=21$$

[2009 개정 교육과정]

25. 통계

정답 15

$\mathrm{P}(0\le \mathrm{X}\le 4)=\int_0^4 f(x)dx=1$ 이므로

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}x\,dx+\int_1^4 a(x-4)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1+a\left[\frac{x^2}{2}-4x\right]_1^4=\frac{1}{4}-\frac{9}{2}a=1$$

$\therefore\ a=-\frac{1}{6}$

$$\therefore\ \mathrm{E(X)}=\int_0^4 xf(x)dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^4 xf(x)dx$$

$$=\int_0^1\frac{x^2}{2}dx+\int_1^4\frac{4x-x^2}{6}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{18}\right]_1^4=\frac{1}{6}+\frac{3}{2}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{E(6X+5)}=6\mathrm{E}(X)+5=6\times\frac{5}{3}+5=15$$

[2009 개정 교육과정]

26. 통계

정답 121

주사위를 5번 던졌을 때, 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 4 이하의 눈이 나오는 횟수는 $5-X$이므로

점 A의 위치는 $2X-2(5-X)=4X-10$이고

점 B의 위치는 $-X+(5-X)=5-2X$이다.

이때, 두 점 A, B 사이의 거리는

$|(4X-10)-(5-2X)|=|6X-15|\le 3$에서

$-3\le 6X-15\le 3$, 즉 $2\le X\le 3$

주사위를 던져 5 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$를 따른다.

따라서 두 점 A, B 사이의 거리가 3 이하가 될 확률은

$$\mathrm{P}(2\le \mathrm{X}\le 3)=\mathrm{P(X=2)}+\mathrm{P(X=3)}$$

$$={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{40}{81}$$

$\therefore\ p=81,\ q=40,\ p+q=121$

27. 수열의 극한

정답 16

$a_{n+1}=a_1+\sum_{k=1}^{n}b_k=a_1+T_n$ 이므로

$T_n=a_{n+1}-a_1$ 이다. 따라서

$$T_{4n}=a_{4n+1}-a_1$$

$$=(2^{2n+2}-3)-1\ (\because\ 4n+1=2(2n+1)-1)$$

$$=4^{n+1}-4$$

$$T_{2n-1}=a_{2n}-a_1=4^{n-1}+2^n-1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_{4n}}{T_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-4}{4^{n-1}+2^n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4}{4^n}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}}=16$$

[2009 개정 교육과정]

28. 확률

정답 495

구하려는 경우의 수는 좌석 15개 중 선택되지 않는 11개를 나열한 후 그 좌석들 사이와 양끝의 공간인 12곳 중에서 4곳을 선택하는 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는

$${}_{12}\mathrm{C}_4=\frac{12\times11\times10\times9}{1\times2\times3\times4}=495$$

29. 수열

정답 12

직선 $y=x+1$ 아래에 있는 점 $(x,\ y)$ 중 $x,\ y$가 모두 자연수인 점들은

$(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ \cdots$

즉, 세 자연수 $n,\ x,\ y$에 대하여 $y\le x=n$을 만족하는 점들이다.

$y=-x+2n+1$과 $y=x+1$의 교점은

$(n,\ n+1)$이고, $y=-x+2n+1$의 기울기는

-1이므로

$y=-x+2n+1$과 $y=x+1$, x축으로 둘러싸인

삼각형 내부의 점들의 개수는

$1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1=n^2$

직선 $y=\dfrac{x}{1+n}$의 경계와 그 아래에 있는 점들은

$y=\dfrac{x}{1+n}$가 $(n+1,\ 1)$을 지나고

직선 $y=-x+2n+1$과의 교점이

$\left(\dfrac{(2n+1)(n+1)}{n+2},\ \dfrac{2n+1}{n+2}\right)$이고,

교점의 y좌표는 $\dfrac{2n+1}{n+2}<2$이므로

구하는 점은 $y=1$일 때, 직선 $y=-x+2n+1$과 직선

$y=\dfrac{x}{n+1}$ 사이의 점들이다.

따라서 점의 개수는 $(2n-1)-n=n-1$

따라서 $a_n=n^2-n+1$

$n^2-n+1=133$에서 $n^2-n-132=0$

$(n-12)(n+11)=0$

$\therefore n=12$

30. 수열

정답 23

모든 자연수 k에 대하여 $g(x^k)=k\times g(x)-a_k$를

만족시키는 음이 아닌 정수 a_k가 존재한다.

조건 (가)에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=5g(x)+\sum_{k=1}^{5}a_k$이고

$g(x^{10})+2=10g(x)+a_{10}+2$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=g(x^{10})+2$에서 $\displaystyle 5g(x)=a_{10}-\sum_{k=1}^{5}a_k+2$

위 등식의 우변이 정수이므로 $5g(x)$도 정수이어야 한다.

$\therefore\ g(x)=0,\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}$ $(\because\ 0\le g(x)<1)$

…… ㉠

모든 자연수 k에 대하여 $f(kx)\ge f(x)$이다. 조건 (나)에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{3}f(kx)=3f(x)$이므로 $f(3x)=f(x)$이어야 한다.

$\log 3x=f(x)+g(x)+\log 3$이므로

$f(3x)=f(x)$이려면 $g(x)+\log 3<1$이어야 한다.

$\therefore\ g(x)<1-\log 3=0.5229$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)=0,\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}$

(ⅰ) $g(x)=0$이면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=0$이고 $g(x^{10})+2=2$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}g(x^k)\ne g(x^{10})+2$

(ⅱ) $g(x)=\dfrac{1}{5}$이면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+0=2$이고

$g(x^{10})+2=2$이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=g(x^{10})+2$

(ⅲ) $g(x)=\dfrac{2}{5}$이면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+0=2$

$g(x^{10})+2=2$이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=g(x^{10})+2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $g(x)=\dfrac{1}{5}$ 또는 $g(x)=\dfrac{2}{5}$

$1<x<10^5$이므로 $0\le f(x)<5$이다.

따라서 x가 조건을 만족시킬 때,

$\log x=f(x)+g(x)$이다.

(단, $f(x)=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이고, $g(x)=\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}$)

$$\therefore\ \log A=\sum_{k=1}^{5}\left\{(k-1)+\frac{1}{5}\right\}+\sum_{k=1}^{5}\left\{(k-1)+\frac{2}{5}\right\}$$

$$=11+12=23$$