제 3교시

2015학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

A형

성명	

수험번호							

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 먼저 문제지에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ 답안지에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 0이 포함된 경우에는 0을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

육 군 사 관 학 교

공 란

1. $(\log_6 4)^2+(\log_6 9)^2+2\log_6 4\times\log_6 9$의 값은? [2점]

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $2A^2+AB$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 5개의 실수 1, p, q, r, s가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $s-p=9$일 때, r의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

4. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A^C \cap B)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{7}$일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C는 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

5. 다음은 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸 것이다.

X	0	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{14}$	$6a$	$\frac{3}{7}$	a	1

$\mathrm{E}(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{13}{10}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

6. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x+2$가 극값을 갖지 않도록 하는 정수 a의 개수는? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

7. 등식 $abc=1024$를 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [3점]

① 42 ② 48 ③ 54 ④ 60 ⑤ 66

8. 어느 상품의 수요량이 D, 공급량이 S일 때의 판매가격을 P라 하면 관계식

$$\log_2 P = C + \log_3 D - \log_9 S \text{ (단, } C\text{는 상수)}$$

가 성립한다고 한다. 이 상품의 수요량이 9배로 증가하고 공급량이 3배로 증가하면 판매가격은 k배로 증가한다. k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

9. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-2g(x)}{x^2}=1$
(나) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)+3g(x)}{x^3}=1$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)+g(x)}{x^3}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

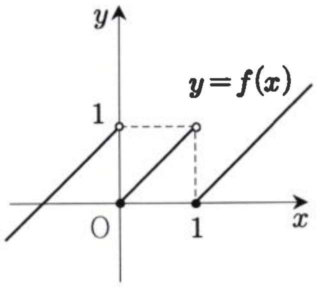
10. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

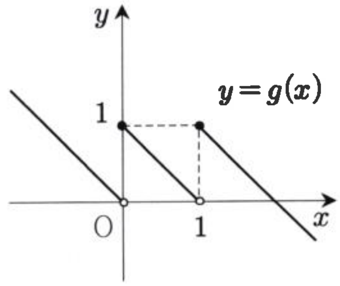
$$x^2\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x t^2 f(t)\,dt=x^4+ax^3+bx^2$$

을 만족시킬 때, $f(5)$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

11. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같다.





<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1-0} f(x) + \lim_{x\to 1+0} g(x) = 2$

ㄴ. $\lim_{x\to +0} g(f(x)) = 0$

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

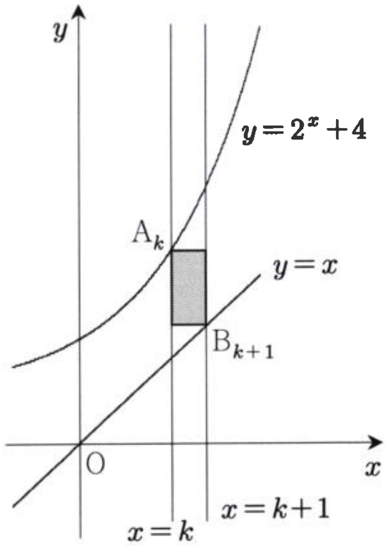
12. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_{2n-1} = \frac{2}{n+2},\ S_{2n} = \frac{2}{n+1}\quad (n \geq 1)$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

13. 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $x=k$가 곡선 $y=2^x+4$와 만나는 점을 A_k라 하고, 직선 $x=k+1$이 직선 $y=x$와 만나는 점을 B_{k+1}이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_{k+1}$을 대각선으로 하고 각 변은 x축 또는 y축에 평행한 직사각형의 넓이를 S_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{8} S_k$의 값은? [3점]



① 494 ② 496 ③ 498 ④ 500 ⑤ 502

14. 정규분포를 따르는 두 연속확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $Y=aX$ $(a>0)$
(나) $\mathrm{P}(X\le 18)+\mathrm{P}(Y\ge 36)=1$
(다) $\mathrm{P}(X\le 28)=\mathrm{P}(Y\ge 28)$

$\mathrm{E}(Y)$의 값은? [4점]

① 42 ② 44 ③ 46 ④ 48 ⑤ 50

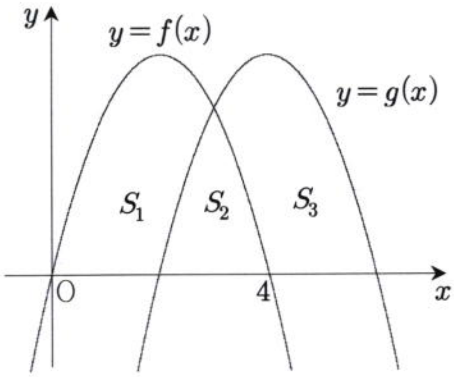
15. 자연수 n에 대하여 좌표평면에 점 A_n, B_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (가) 점 A_1의 좌표는 $(1, 2)$이다.
> (나) 점 B_n은 점 A_n을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 다음 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점이다.
> (다) 점 A_{n+1}은 점 B_n을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 다음 x축과 y축의 방향으로 각각 1만큼 평행이동시킨 점이다.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}{n}$의 값은? [4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

16. 함수 $f(x) = -x(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=g(x)$라 하자. 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 세 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때, $\frac{S_2}{S_1+S_3}$의 값은? [4점]



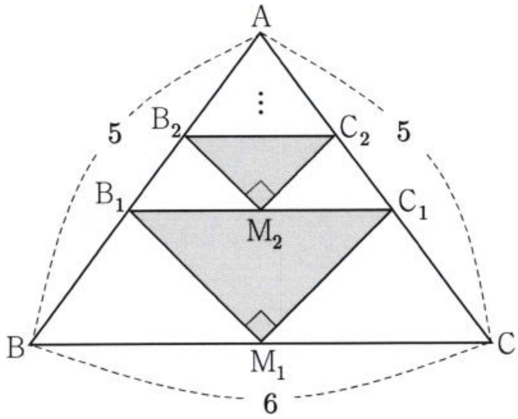
① $\frac{3}{22}$ ② $\frac{7}{44}$ ③ $\frac{2}{11}$ ④ $\frac{9}{44}$ ⑤ $\frac{5}{22}$

17. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=5$, $\overline{BC}=6$인 이등변삼각형 ABC가 있다.

선분 BC의 중점 M_1을 잡고 두 선분 AB, AC 위에 각각 점 B_1, C_1을 $\angle B_1M_1C_1=90°$이고 $\overline{B_1C_1} /\!/ \overline{BC}$가 되도록 잡아 직각삼각형 $B_1M_1C_1$을 만든다.

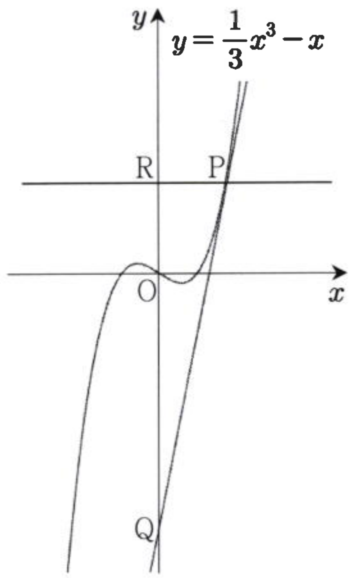
선분 B_1C_1의 중점 M_2를 잡고 두 선분 AB_1, AC_1 위에 각각 점 B_2, C_2를 $\angle B_2M_2C_2=90°$이고 $\overline{B_2C_2} /\!/ \overline{B_1C_1}$이 되도록 잡아 직각삼각형 $B_2M_2C_2$를 만든다.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 만든 직각삼각형 $B_nM_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{47}{11}$ ② $\frac{48}{11}$ ③ $\frac{49}{11}$ ④ $\frac{50}{11}$ ⑤ $\frac{51}{11}$

18. 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x$ 위의 점 중에서 제1사분면에 있는 한 점을 P(a, b)라 하자. 점 P에서의 접선이 y축과 만나는 점을 Q라 하고, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 R라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}} : \overline{\mathrm{OR}} = 3 : 1$일 때, ab의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

19. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB=O,\ (A+2B)(2A-B)=E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $BA=O$

ㄴ. 행렬 $A+B$의 역행렬이 존재한다.

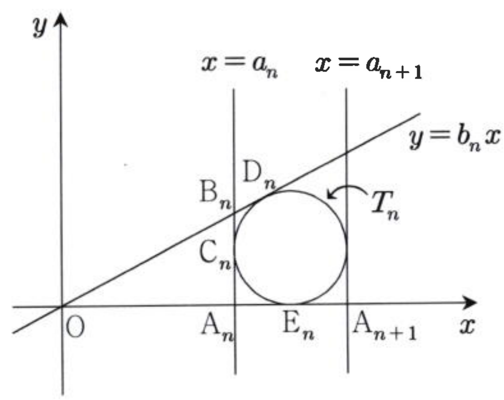
ㄷ. $A^2+B^2=\frac{1}{2}E$이면 $B=O$이다.

① ㄴ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (Ⅰ) $a_1=2$이고 $a_n<a_{n+1}$ $(n\geq 1)$이다.
>
> (Ⅱ) $b_n=\dfrac{1}{2}\left(n+1-\dfrac{1}{n+1}\right)$ $(n\geq 1)$이라 할 때, 좌표평면에서 네 직선
>
> $x=a_n$, $x=a_{n+1}$, $y=0$, $y=b_nx$에 동시에 접하는 원 T_n이 존재한다.

다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

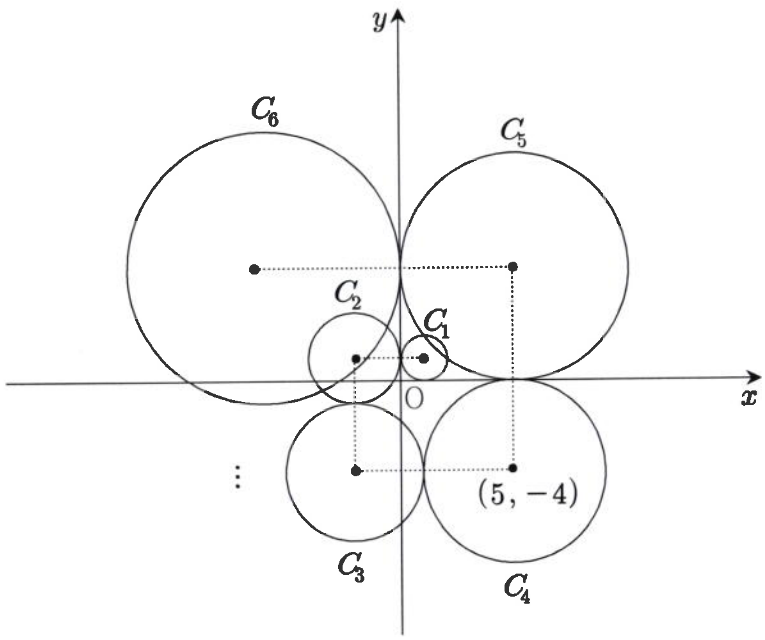
> 원점을 O라 하고, 원 T_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하자.
>
> 직선 $x=a_n$과 두 직선 $y=0$, $y=b_nx$의 교점을 각각 A_n, B_n이라 하고,
>
> 원 T_n과 세 직선 $x=a_n$, $y=b_nx$, $y=0$의 접점을 각각 C_n, D_n, E_n이라 하면
>
> $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=a_nb_n$이고 $\overline{\mathrm{OB}_n}=a_n\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^2}$이다.
>
> $$\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$$
>
> $$=a_n\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^2}+a_nb_n-r_n$$
>
> $$\overline{\mathrm{OE}_n}=a_n+r_n$$
>
> 
>
>
> $\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OE}_n}$이므로
>
> $$r_n=\frac{a_n\left(b_n-1+\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^2}\right)}{2}$$
>
> $$\therefore\ a_{n+1}=a_n+2r_n=\left(\boxed{(나)}\right)\times a_n\quad(n\geq 1)$$
>
> 이때 $a_1=2$이고
>
> $$a_n=\boxed{}\times a_{n-1}=\boxed{}\times a_{n-2}=\cdots=\boxed{}\times a_1$$
>
> 이므로
>
> $$a_n=\boxed{(다)}$$

위의 과정에서 (가)에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+f(4)+g(4)$의 값은? [4점]

① 54 ② 55 ③ 56 ④ 57 ⑤ 58

21. 자연수 n에 대하여 좌표평면에 원 C_n을 다음과 같은 규칙으로 그린다.

(가) 원 C_1의 방정식은 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$이다.
(나) 원 C_n의 반지름의 길이는 n이다.
(다) 원 C_{n+1}은 원 C_n과 외접하고, 두 원 C_n, C_{n+1}의 중심을 지나는 직선은 x축 또는 y축과 평행하다.
(라) $n=4k+p$ (k는 음이 아닌 정수, $p=1, 2, 3, 4$)일 때, 원 C_n의 중심은 제p사분면에 있다.



예를 들어 원 C_4의 중심의 좌표는 $(5, -4)$이고 반지름의 길이는 4이다.
원 C_n 중에서 그 중심이 원 C_{40}의 내부에 있는 원의 개수는? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

22. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-3}{x-2}=4$를 만족시킨다. 함수 $g(x)=x^2 f(x)$에 대하여 $g'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

23. 다섯 개의 꼭짓점 A, B, C, D, E로 이루어진 그래프가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 꼭짓점 A에 연결된 변의 개수는 4이다.
(나) 꼭짓점 B, C, D에 연결된 변의 개수는 모두 2로 같다.

이 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합의 최댓값을 구하시오. (단, 한 꼭짓점에서 자기 자신으로 가는 변이 없고, 두 꼭짓점 사이에 많아야 한 개의 변이 존재한다.) [3점]

24. 어느 통신 회사의 스마트폰 사용 고객들의 올해 7월의 데이터 사용량은 모평균이 m(GB), 모표준편차가 1.2(GB)인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고객들 중에서 n명을 임의추출하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간이 $[a, b]$일 때, $b-a \leq 0.56$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.4750$으로 계산한다.) [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k}) = 2n^2-n$$

을 만족시킨다. $a_{10}+a_{11}=20$일 때, a_9+a_{12}의 값을 구하시오. [3점]

26. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $B=A^{-1}BA$
(나) 두 행렬 A, B의 모든 성분의 합은 각각 1, 8이다.

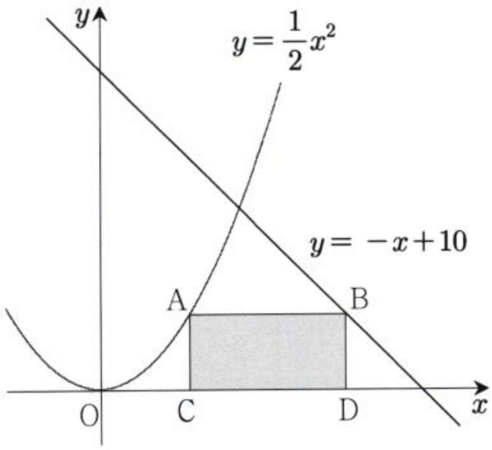
행렬 X_n을

$$X_n=(A^{-1})^nBA^n+B^nA(B^{-1})^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이라 할 때, 행렬 $X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{10}$의 모든 성분의 합을 구하시오. [4점]

27. 주머니 A에는 흰 구슬 2개, 검은 구슬 1개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 구슬 1개, 검은 구슬 2개가 들어 있다. 한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나오면 주머니 A에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼내고, 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 주머니 B에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼낸다. 주사위를 4번 던지고 난 후에 주머니 A에는 검은 구슬이, 주머니 B에는 흰 구슬이 각각 한 개씩 남아 있을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.) [4점]

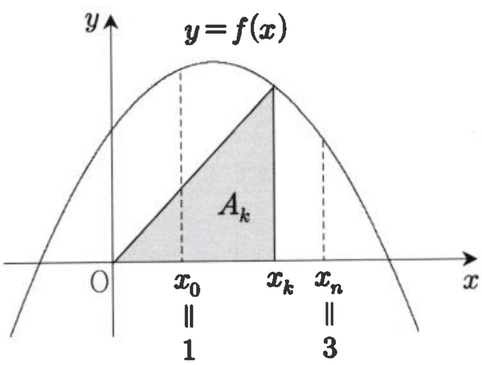
28. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 중에서 제1사분면에 있는 점 $\mathrm{A}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=-x+10$과 만나는 점을 B라 하고, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 직사각형 ACDB의 넓이가 최대일 때, $10t$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



29. 함수 $f(x)=-4x^2+12x+16$이 있다. 2 이상의 자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[1, 3]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$1=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=3$$

이라 하자. 세 점 $(0, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $A_k\,(k=1, 2, \cdots, n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$의 값을 구하시오. [4점]



30. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$이라 할 때, 좌표평면에서 점 A_n의 좌표를 $(f(n), g(n))$이라 하자. 10보다 크고 1000보다 작은 두 자연수 k, m $(k < m)$에 대하여 세 점 A_1, A_k, A_m이 한 직선 위에 있을 때, $k+m$의 최댓값을 구하시오. [4점]

공 란