수학 영역(A형)

1. ②	2. ①	3. ④	4. ④	5. ⑤
6. ③	7. ⑤	8. ④	9. ③	10. ①
11. ③	12. ②	13. ③	14. ①	15. ②
16. ⑤	17. ②	18. ④	19. ⑤	20. ①
21. ②	22. 28	23. 14	24. 71	25. 18
26. 90	27. 251	28. 25	29. 88	30. 992

1. 지수함수와 로그함수 정답 ②

$\log\ 4)^2+(\log_6 9)^2+2\log_6 4\times\log_6 9$

$=\ (\log_6 4+\log_6 9)\}^2=(\log_6 36)^2=2^2=4$

2. 행렬과 그래프 정답 ①

두 행렬 $\ =\begin{matrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여

$2A^2+AB=A(2A+B)$

$=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\left\{2\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

이므로 행렬 $2A^2+AB$의 모든 성분의 합은 1이다.

3. 수열 정답 ④

주어진 수열의 공차를 d라 하면

$s=1+4d,\ p=1+d$이므로 $s-p=3d=9$

$\therefore\ d=3$

따라서 $r=1+3d$이므로 $r=10$이다.

4. 확률 정답 ④

두 사건 $A,\ B$에 대하여

$\mathrm{P}(A\ \ \cap B)=\dfrac{1}{5},\ \mathrm{P}(B\,|\,A^C)=\dfrac{3}{7}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(B\,|\,A^C)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{7}}=\dfrac{7}{15}$

이때, $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\dfrac{7}{15}=\dfrac{8}{15}$이다.

5. 통계 정답 ⑤

확률변수 X에 대한 확률의 합은 1이므로

$1=\dfrac{1}{14}+6a+\dfrac{3}{7}+a,\ 7a=\dfrac{7}{14}$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{14}$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{14}+1\times\dfrac{3}{7}+2\times\dfrac{3}{7}+3\times\dfrac{1}{14}$

$=\dfrac{3}{7}+\dfrac{6}{7}+\dfrac{3}{14}$

$=\dfrac{21}{14}=\dfrac{3}{2}$

6. 다항함수의 미분법 정답 ③

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$f'(x)=0$이 중근이거나 근이 존재하지 않아야 한다.

즉, $f'(x)=3x^2+2ax+a+6=0$에서

판별식을 $\dfrac{D}{4}$라 하면 $\dfrac{D}{4}\leq 0$이어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=a^2-3(a+6)$

$=a^2-3a-18$

$=(a-6)(a+3)\leq 0$

$\therefore\ -3\leq a\leq 6$

따라서 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않도록 하는 정수 a의 개수는 10개이다.

7. 확률 정답 ⑤

세 자연수 $a,\ b,\ c$에 대하여

$abc=1024=2^{10}$

이므로 음이 아닌 정수 $p,\ q,\ r$에 대하여

$a=2^p,\ b=2^q,\ c=2^r$이라 하면

$abc=2^p2^q2^r$

$=2^{p+q+r}=2^{10}$

$\therefore\ p+q+r=10$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는

${}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=\dfrac{12\times 11}{2\times 1}=66$

이다.

8. 지수함수와 로그함수 정답 ④

$$\begin{aligned}\log\quad &= C + \log_3 9D - \log_9 3S \\ &= C + (\log_3 9 + \log_3 D) - (\log_9 3 + \log_9 S) \\ &= C + 2 + \log_3 D - \frac{1}{2} - \log_9 S \\ &= C + \log_3 D - \log_9 S + \frac{3}{2} = \log_2 P + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

이므로

$$\log_2 kP = \log_2 P + \frac{3}{2}$$

$$\log_2 kP - \log_2 P = \frac{3}{2}$$

$$\log_2 \frac{kP}{P} = \frac{3}{2},\ \log_2 k = \frac{3}{2}$$

$$\therefore\ k = 2^{\frac{3}{2}} = 2\quad 2$$

9. 함수의 극한과 연속 　정답 ③

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

조건(가)에서

$f(x) - 2g(x) = x^2 + ax + b$(단, $a \neq 0, b$는 상수) …… ㉠

조건(나)에서

$f(x) + 3g(x) = x^3 + cx^2 + dx + e$

(단, d, e 　상수, $c \neq 0$)…… ㉡

으로 놓을 수 있다.

㉡−㉠에서

$$5g(x) = x^3 + (c-1)x^2 + (d-a)x + e - b$$

$$\therefore\ g(x) = \frac{1}{5}\ x^3 + (c-1)x^2 + (d-a)x + e - b\}$$

이때, ㉠에서 $f(x) = 2g(x) + x^2 + ax + b$

따라서

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) + g(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2g(x) + x^2 + ax + b + g(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3g(x) + x^2 + ax + b}{x^3}$$

$$= \frac{\frac{3}{5}\{x^3 + (c-1)x^2 + (d-a)x + e - b\} + x^2 + ax + b}{x^3}$$

$$= \frac{3}{5}$$

10. 다항함수의 적분법 　정답 ①

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$x^2 \int_1^x f(t)dt - \int_1^x t^2 f(t)dt = x^4 + ax^3 + bx^2 \ \cdots\cdots \text{㉠}$$

을 만족시키므로

㉠에 $x = 1$을 대입하면 $a + b + 1 = 0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x\int_1^x f(t)dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$$

$$2x\int_1^x f(t)dt = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$$

위의 등식에 $x = 1$을 대입하면

$3a + 2b + 4 = 0$ …… ㉢

㉡과 ㉢을 연립하여 풀면 $a = -2$, $b = 1$이므로

$$2x\int_1^x f(t)dt = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$\int_1^x f(t)dt = 2x^2 - 3x + 1$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x) = 4x - 3$

$\therefore\ f(5) = 17$

11. 함수의 극한과 연속 　정답 ③

ㄱ. (참) $\lim_{x\to 1-0} f(x) = 1,\ \lim_{x\to 1+0} g(x) = 1$

이므로 $\lim_{x\to 1-0} f(x) + \lim_{x\to 1+0} g(x) = 2$

ㄴ. (거짓) $f(x) = t$로 놓으면 $x \to +0$일 때, $t \to +0$이므로 $\lim_{x\to +0} g(f(x)) = \lim_{t\to +0} g(t) = 1$이다.

ㄷ. (참) $\lim_{x\to 1-0} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0$

$\lim_{x\to 1+0} f(x)g(x) = 0 \times 1 = 0$

$f(1)g(1) = 0 \times 1 = 0$

$\lim_{x\to 1-0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x)g(x) = f(0)g(0)$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x = 1$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12. 수열의 극한 　정답 ②

수열 　$a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{2n-1} = \dfrac{2}{n+2}$, $S_{2n} = \dfrac{2}{n+1}\ (n \geq 1)$이고

$a_1 = S_1 = \dfrac{2}{3}$

$a_{2n-1} = S_{2n-1} - S_{2n-2}\ (n \geq 2)$

$$\frac{2}{n+2}-\frac{2}{n}\ (n \ge 2)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = a_1 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n} a_{2k-1}$$

$$= \frac{2}{3} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{k+2}-\frac{2}{k}\right)$$

$$= \frac{2}{3} + 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{2}{3} + 2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)+ \cdots + \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{3} + 2\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{2}{3} + 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = -1$$

13. 수열

정답 ③

두 점 $\mathrm{A}_k(k,\ 2^k+4)$, $\mathrm{B}_{k+1}(k+1,\ k+1)$이므로

선분 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_{k+1}$을 대각선으로 하고 각 변은 x축 또는 y축에 평행한 직사각형의 서로 다른 두 변의 길이를 구하면 다음과 같다.

$(k+1)-k=1$

$(2^k+4)-(k+1)=2^k-k+3$

이때, 직사각형의 넓이 $S_k = (2^k-k+3)\times 1$이므로

$$\sum_{k=1}^{8} S_k = \sum_{k=1}^{8}(2^k-k+3) = \sum_{k=1}^{8}2^k - \sum_{k=1}^{8}k + 24$$

$$= \frac{2(2^8-1)}{2-1} - \frac{8\times 9}{2} + 24$$

$$= 2^9 - 2 - 36 + 24 = 498$$

14. 통계

정답 ①

정규분포를 따르는 두 연속확률변수 X, Y에 대하여

조건 (가)에서 $Y = aX(a>0)$이므로 조건(나)에서

$\mathrm{P}(X \le 18) + \mathrm{P}(Y \ge 36) = 1$

$\mathrm{P}(X \le 18) + \mathrm{P}(aX \ge 36) = 1$

$\mathrm{P}(X \le 18) + \mathrm{P}\left(X \ge \frac{36}{a}\right) = 1$

이므로 $a=2$ 조건 (다)에서

$\mathrm{P}(X \le 28) = \mathrm{P}(Y \ge 28) = \mathrm{P}(2X \ge 28)$

$= \mathrm{P}(X \ge 14)$

$\therefore\ \mathrm{P}(X \ge 28) = \mathrm{P}(X \ge 14)$

확률 변수 X는 정규분포를 따르므로 $\mathrm{E}(X) = m$이라 하면, 확률밀도함수 $x=m$에 대칭이다.

그러므로 $m = \frac{28+14}{2} = 21$이다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X) = 21$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(2X) = 2\mathrm{E}(X) = 2\times 21 = 42$

15. 수열의 극한

정답 ②

자연수 n에 대하여 점 A_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 할 때,

조건 (가)에서 $x_1 = 1$, $y_1 = 2$

조건 (나)에서 $\mathrm{B}_n(y_n+1,\ x_n)$이므로

조건 (다)에서 $\mathrm{A}_{n+1}(x_n+1,\ y_n+2)$이다. 따라서

$x_{n+1} = x_n + 1$, $y_{n+1} = y_n + 2$이다.

즉, 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 1이며 공차가 1인 등차수열이고, 수열 $\{y_n\}$은 첫째항이 1이며 공차가 2인 등차수열이다.

따라서 두 수열 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$의 일반항 x_n, y_n은 각각

$x_n = n$, $y_n = 2n$이므로

$\mathrm{A}_n(n,\ 2n)$, $\mathrm{B}_n(2n+1,\ n)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} = \sqrt{\{(2n+1)-n\}^2+(n-2n)^2}$$

$$= \sqrt{2n^2+2n+1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1}$$

$$= \sqrt{2}$$

16. 다항함수의 적분법

정답 ⑤

함수 $f(x) = -x(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 곡선을 $y=g(x)$라 하면

$g(x) = f(x-2) = -(x-2)(x-6)$

이때, 곡선 $f(x)$와 곡선 $g(x)$는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 S_1과 S_3의 넓이는 같으며, S_2는 직선 $x=3$에 의해 이등분된다.

$$\therefore\ S_2 = 2\int_3^4 f(x)dx = 2\int_3^4(-x^2+4x)dx$$

$$2\left[-\frac{1}{3}x \quad +2x^2\right]_3^4$$

$$=2\ \left(-\frac{64}{3}+32\right)-\left(-\frac{27}{3}+18\right)\Big\}=\frac{10}{3}$$

$${}_1 = S_3 = \ {}_0^4 f(x)dx - S_2$$

$$=\int_0^4(-x^2+4x)dx-\frac{10}{3}$$

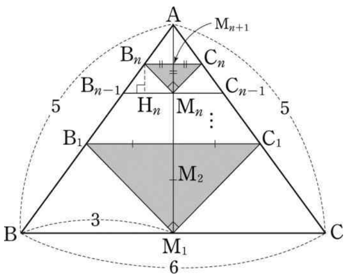
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4-\frac{10}{3}$$

$$=-\frac{64}{3}+32-\frac{10}{3}=\frac{22}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{S_2}{S_1+S_3}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{44}{3}}=\frac{5}{22}$$

17. 수열의 극한

정답 ②



이등변삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점 M_1을 잡으면, 삼각형 ABM_1은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의해 $AM_1=4$ 구하고자 하는 직각삼각형 $B_nM_nC_n$의 넓이 S_n은 삼각형 $B_nM_{n+1}M_n$의 넓이와 삼각형 $C_nM_{n+1}M_n$의 넓이의 합이다. 이때, 삼각형 $B_nM_{n+1}M_n$과 삼각형 $C_nM_{n+1}M_n$은 합동인 직각이등변삼각형이다.

따라서 직각이등변삼각형 $B_nM_{n+1}M_n$의 넓이를 a_n이라 하면

$S_n=2a_n$ …… ㉠

우선 직각이등변삼각형 $B_1M_1C_1$의 넓이 S_1을 구하면, 삼각형 ABM_1과 삼각형 AB_1M_2는 닮음이므로

$BM_1 : \overline{M_1A} = B_1M_2 : \overline{M_2A} = 3 : 4$

$4\overline{B_1M_2}=3\overline{M_2A}$

$4\overline{B_1M_2}=3\ \overline{M_1A}-M_1M_2)$

$4\overline{B_1M_2}=3(\overline{M_1A}-\overline{B_1M_2})$

$4\overline{B_1M_2}=3\overline{M_1A}-3\overline{B_1M_2}$

$7\overline{B_1M_2}=3\overline{M_1A}=3\times4=12$

$\therefore\ \overline{B_1M_2}=\dfrac{12}{7}$ …… ㉡

이때, ㉠에서 $S_1=2a_1$이므로

$$S_1=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{12}{7}\times\frac{12}{7}\right)=\left(\frac{12}{7}\right)^2$$

$\therefore\ S_1=\left(\dfrac{12}{7}\right)^2$ …… ㉢

이때, 위의 그림에서 점 B_n에서 선분 $B_{n-1}M_n$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면 삼각형 $B_nB_{n-1}H_n$과 삼각형 ABM_1은 닮음이다.

$B_{n-1}H_n : \overline{H_nB_n}=\overline{BM_1} : \overline{M_1A}=3:4$

$4\overline{B_{n-1}H_n}=3\overline{H_nB_n}$

$4\ B_{n-1}M_n-\overline{H_nM_n})=3\overline{B_nM_{n+1}}$

$4(\overline{B_{n-1}M_n}-\overline{B_nM_{n+1}})=3\overline{B_nM_{n+1}}$

$\therefore\ \overline{B_nM_{n+1}}=\dfrac{4}{7}\overline{B_{n-1}M_n}$ …… ㉣

㉡, ㉣에서 $\overline{B_nM_{n+1}}=\left(\dfrac{12}{7}\right)\left(\dfrac{4}{7}\right)^{n-1}$

직각이등변삼각형 $B_nM_{n+1}M_n$의 넓이 a_n은

$$a_n=\frac{1}{2}\times\overline{B_nM_{n+1}}\times M_{n+1}M_n$$

$$=\frac{1}{2}\times(\overline{B_nM_{n+1}})^2=\frac{1}{2}\ \left(\frac{12}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}\Big\}^2$$

$$\therefore\ {}_{n=1}^{\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty}2a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{12}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}\right\}^2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{12}{7}\right)^2\left\{\left(\frac{4}{7}\right)^2\right\}^{n-1}\right]$$

$$=\frac{\left(\frac{12}{7}\right)^2}{1-\left(\frac{4}{7}\right)^2}=\frac{144}{33}=\frac{48}{11}$$

18. 다항함수의 미분법

정답 ④

$\dfrac{1}{3}x^3-x=f(x)$라 하면 $f'(x)=x^2-1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 제1사분면에 있는 점 P의 좌표를 $P(a,\ b)(a>0,\ b>0)$라 하면

$b=\dfrac{1}{3}a^3-a$ …… ㉠

이때, 점 P 에서의 접선의 방정식을 $\quad(x)$라 하면

$$g(x)=f'(a)(x-a)+b$$

$$=(a\quad -1)(x-a)+\frac{1}{3}a^3-a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=-\frac{2}{3}a^3$이므로

점 Q 의 좌표는 $\ 0,\ -\frac{2}{3}a^3\Big)$이다.

$\therefore\ \mathrm{OQ}=\left|-\frac{2}{3}a^3\right|=\frac{2}{3}a^3\ (\because\ a>0)$

점 $\mathrm{R}(0,\ b)$, 즉 $\mathrm{R}\left(0,\ \frac{1}{3}a^3-a\right)$이므로

$\mathrm{OR}=\frac{1}{3}a^3-a$

$\overline{\mathrm{OQ}}:\overline{\mathrm{OR}}=3:1,\ 3\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{OQ}}$ 이므로

$a^3-3a=\frac{2}{3}a^3,\ \frac{1}{3}a^3-3a=0$

$a^3-9a=0,\ a(a^2-9)=0,\ a(a+3)(a-3)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=-3$ 또는 $a=3$

이때, $a>0$이므로 $a=3,\ b=6$이다.

$\therefore\ ab=18$

19. 행렬과 그래프 정답 ⑤

ㄱ. (참) $(\quad+2B)(2A-B)=E \qquad \cdots\cdots ㉠$

이므로 $(2A-B)(A+2B)=E$

따라서

$2A^2-AB+4BA-2B^2$

$=2A^2+4AB-BA-2B^2$

$5AB-5BA=O$

$\therefore\ AB=BA$

이때, $AB=O$이므로 $BA=O$이다.

ㄴ. (참) $(A+2B)(2A-B)=E$

$2A^2-AB+4BA-2B^2=E$

ㄱ에서 $AB=O,\ BA=O$이므로

$2A^2-2B^2=E$

$2(A+B)(A-B)=E$

$\therefore\ (A+B)^{-1}=2(A-B)$

ㄷ. (참) ㄴ에서 $2A^2-2B^2=E$에서

$$A^2-B^2=\frac{1}{2}E \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$$A^2+B^2=\frac{1}{2}E \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡−㉢을 하면 $B^2=O$이다.

$(A+2B)(2A-B)=E$의 양변의 왼쪽에 행렬 B를 곱하면

$B(A+2B)(2A-B)=B$

$(BA+2B^2)(2A-B)=B$

$2B^2(2A-B)=B\ (\because\ BA=O)$

$\therefore\ B=O(\because B^2=O)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20. 수열 정답 ①

원점을 O 라 하면, 원 T_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하자. 직선 $x=a_n$과 두 직선 $y=0,\ y=b_nx$의 교점을 각각 $\mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n$이라 하고, 원 T_n과 세 직선 $x=a_n,\ y=b_nx,\ y=0$의 접점을 각각 $\mathrm{C}_n,\ \mathrm{D}_n,\ \mathrm{E}_n$이라 하면

$\mathrm{A}_n(a_n,\ 0),\ \mathrm{B}_n(a_n,\ a_nb_n)$이므로

$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n=a_nb_n$이고

$\mathrm{OB}_n=\quad a_n^2+a_n^2b_n^2=a_n\sqrt{\boxed{1}+b_n^2}$ 이다.

$\mathrm{OD}_n=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}+\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$

$=a_n\sqrt{\boxed{1}+b_n^2}+a_nb_n-r_n$

$\overline{\mathrm{OE}_n}=a_n+r_n$

원의 중심을 점 P 라 하면 직각삼각형 $\mathrm{PD}_n\mathrm{O}$와 직각삼각형 POE_n은 RHS합동이고, $\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OE}_n}$이므로

$a_n\sqrt{1+b_n^2}+a_nb_n-r_n=a_n+r_n$

$2r_n=a_n\sqrt{1+b_n^2}+a_nb_n-a_n$

$2r_n=a_n\left(b_n-1+\sqrt{1+b_n^2}\right)$

$r_n=\frac{a_n\left(b_n-1+\sqrt{\boxed{1}+b_n^2}\right)}{2}$

한편,

$a_{n+1}=a_n+2r_n$

$=a_n+2\times\frac{a_n\left(b_n-1+\sqrt{1+b_n^2}\right)}{2}$

$=a_n+a_n\left(b_{n-1}+\sqrt{1+b_n^2}\right)$

$=a_n\left(b_n+\sqrt{1+b_n^2}\right)$

조건(II)에서 $b_n=\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right)$이므로

$a_{n+1}=\ b_n+\quad 1+\left\{\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right)\right\}^2\Big)\times a_n$

$$b \quad + \quad 1 + \frac{1}{4} \quad (n+1)^2 - 2 + \quad \frac{1}{n+1} \Big)^2 \Big\} \Big) \times a_n$$

$$= \left(b_n + \sqrt{\frac{1}{4}\left\{(n+1)^2 + 2 + 2\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\right\}}\right) \times a_n$$

$$= \left(b_n + \frac{1}{2}\sqrt{\left\{(n+1) + \left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}^2}\right) \times a_n$$

$$= \left\{b_n + \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{1}{n+1}\right)\right\} \times a_n$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{1}{n+1}\right)\right\} \times a_n$$

$$= (n+1) \times a_n$$

$\therefore \ a_{n+1} = a_n + 2r = (\ n+1\ ) \times a_n (n \geq 1)$

이때 $a_1 = 2$이고

$a_n = \boxed{} \times a_{n-1} = \boxed{} \times a_{n-2} = \ \cdots \ = \boxed{} \times a_1$

즉, $a_n = na_{n-1} = n(n-1)a_{n-2}$

$\quad = \cdots \ = n(n-1)(n-2) \cdots \times 3 \times 2 \times a_1$

$\quad = n! \times a_1 = 2n!$

이므로

$a_n = \boxed{2n!}$

$\therefore \ p = 1,\ f(n) = n+1,\ g(n) = 2n!$

$\therefore \ p + f(4) + g(4) = 1 + 5 + 48 = 54$

21. 수열 정답 ②

자연수 n에 대하여 좌표평면에 원 $_n$의 중심 C_n의 좌표를 구하면

$\mathrm{C}_1(1,\ 1),\ \mathrm{C}_2(-2,\ 1),\ \mathrm{C}_3(-2,\ -4),\ \mathrm{C}_4(5,\ -4),$
$\mathrm{C}_5(5,\ 5),\ \mathrm{C}_6(-6,\ 5),\ \mathrm{C}_7(-6,\ -8),\ \mathrm{C}_8(9,\ -8),$
$\cdots\cdots$ 이므로

$C_{4k}(4k+1,\ -4k)\ (k \quad$ 자연수$)$

따라서 원 C_{40}은 중심의 좌표가 $(41,\ -40)$이고 반지름의 길이가 40인 원이므로

$(x-40)^2 + (y+40)^2 = 40^2$이다.

이때, 원 C_{40}의 내부에 있는 원은 모두 제4사분면에 있으므로 $n = 4k$인 원들이다.

따라서 원 C_{40}의 중심 $\mathrm{C}_{40}(41,\ -40)$과 C_{4k}의 중심 $\mathrm{C}_{4k}(4k+1,\ -4k)$사이의 거리가 40보다 작은 자연수 k의 개수를 구하면 된다.

$$(4k+1) - 41\}^2 + (-4k+40)^2 < 40$$

$$\sqrt{(4k-40)^2 + (4k-40)^2} < 40$$

$$\sqrt{2(4k-40)^2} < 40, \quad 2\,|4k-40| < 40$$

$$4\sqrt{2}\,|k-10| < 40, \quad |k-10| < 5\sqrt{2}$$

$$-5\sqrt{2} < k-10 < 5\sqrt{2}$$

$$10-5\sqrt{2} < k < 10+5\sqrt{2}$$

$$2.\times\times\times < k < 17.\times\times\times$$

이므로 이를 만족하는 자연수 k는 $3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 17$의 15개이다.

따라서 원 C_{40}의 내부에 있는 원의 개수는 15개이다.

22. 다항함수의 미분법 정답 28

$\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 4$에서 $x \to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{x \to 2} \{f(x)-3\} = 0$이어야 하므로 $f(2) = 3$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$= f'(2)$$

$\therefore \ f'(2) = 4$

이때, 함수 $g(x) = x^2 f(x)$에 대하여

$g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$이므로

$$g'(2) = 2 \times 2 \times f(2) + 2^2 \times f'(2)$$
$$= 4 \times 3 + 4 \times 4$$
$$= 12 + 16 = 28$$

23. 행렬과 그래프 정답 14

조건(가)와 조건(나)를 만족하면서 그을 수 있는 변의 개수의 최댓값을 구하기 위해서는 변의 다른 끝이 꼭짓점 E이어야 한다. 이때 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	1
B	1	0	0	0	1
C	1	0	0	0	1
D	1	0	0	0	1
E	1	1	1	1	0

이를 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

이므로 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 14이다.

24. 통계 　　 정답 71

신뢰구간이 $[a,\ b]$일 때, $b-a$는 신뢰구간의 길이이므로

$2\times 1.96\times \dfrac{1.2}{n} \le 0.56$

$8.4 \le \sqrt{n}$, $70.56 \le n$

따라서 자연수 n의 최솟값은 71이다.

25. 수열 　　 정답 18

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=2n^2-n$

$a_{10}+a_{11}=20$이므로

$$\begin{aligned} a_9+a_{12} &= (a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12})-(a_{10}+a_{11}) \\ &= \sum_{k=5}^{6}(a_{2k-1}+a_{2k})-20 \\ &= \left\{\sum_{k=1}^{6}(a_{2k-1}+a_{2k})-\sum_{k=1}^{4}(a_{2k-1}+a_{2k})\right\}-20 \\ &= \{(2\times 6^2-6)-(2\times 4^2-4)\}-20=18 \end{aligned}$$

$\therefore\ a_9+a_{12}=18$

26. 수열 　　 정답 90

역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 조건 (가)에서 $B=A^{-1}BA$이므로 $AB=BA$이다.

$(A^{-1})^n BA^n=(A^{-1})^n \underbrace{BA\cdots\cdots A}_{개}=(A^{-1})^n A^n B$

$=(A^{-1})^n A^n B=EB=B$

$B^nA(B^{-1})^n=\underbrace{B\cdots\cdots BA}_{n개}(B^{-1})^n$

$=AB^n(B^{-1})^{nb}=AE=A$

이므로 행렬 $X_n=B+A$이다.

이때,

$X_1+X_2+X_3+\ \cdots\cdots\ +X_{10}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}X_n=\sum_{k=1}^{10}(B+A)=10(B+A)$

조건 (나)에서 두 행렬 A, B의 모든 성분의 합이 각각 1, 8이므로 행렬 $A+B$의 성분의 합은 9이다.

따라서 행렬 $X_1+X_2+\ \cdots\ +X_{10}$의 모든 성분의 합은 90이다.

27. 확률 　　 정답 251

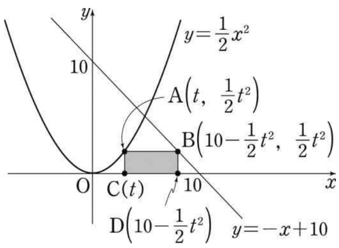
주사위를 4번 던지고 난 후에 주머니 A에는 검은 구슬, 주머니 B에는 흰 구슬이 각각 한 개씩 남아 있을 확률은 주사위를 4번 던졌을 때, 3의 배수의 눈이 2 번 나와서 주머니 A에서 흰 구슬 2번, 주머니 B에서 검은 구슬 2번을 꺼내는 확률과 같다. 따라서 구하는 확률은

${}_4C_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{243}$

$\therefore\ p=243,\ q=8$

$\therefore\ p+q=251$

28. 다항함수의 미분법 　　 정답 25



점 A, B, C, D의 좌표를 구하면 위의 그림과 같다. 직사각형 ACDE의 넓이를 $f(t)$라 하면

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathrm{AC}\times\overline{\mathrm{CD}} \\ &= \frac{1}{2}t^2\left\{\left(10-\frac{1}{2}t^2\right)-t\right\} \\ &= -\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t^3+5t^2 \end{aligned}$$

이고, t는 점 A와 점 C의 x좌표이므로 t의 범위는 $0\le t\le 10$이다.

$0\le t\le 10$일 때, 함수 $f(t)$가 최댓값을 가질 때, t를 구하면

$f(t)=-\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{1}{2}t^3+5t^2$

$f'(t)=-t^3-\dfrac{3}{2}t^2+10t$

$-t^3-\dfrac{3}{2}t^2+10t=0,\ 2t^3+3t^2-20t=0$

$t(2t^2+3t-20)=0,\ t(2t-5)(t+4)=0$

$t=0$ 또는 $t=\frac{5}{2}$ 또는 $t=-4$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $0 \le t \le 10$일 때, 함수 $f(t)$는 $t=\frac{5}{2}$에서 극대이며 최댓값을 갖는다.

그러므로 $10t = 10\times\frac{5}{2}=25$이다.

$\therefore\ 10t=25$

29. 다항함수의 적분법

88

세 점 $(0,\ 0)$, $(x,\ 0)$, $(x\ ,\ f(x_k))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이 $_k$는

$A_k=\frac{1}{2}\times x_k\times f(x_k)$이고, $x_k=1+\frac{2}{7}k$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\ {}^{n}_{k=1}A_k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}x_kf(x_k)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\ 1+\frac{2}{n}k\Big)f\Big(1+\frac{2}{n}k\Big)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{2}{n}k\Big)f\Big(1+\frac{2}{n}k\Big)$$

$$=\ {}_{1}^{3}xf(x)dx=\int_{1}^{3}x(-4x^2+12x+16)dx$$

$$=\int_{1}^{3}(-4x^2+12x+16)dx$$

$$=\ -x^4+4x^3+8x^2]_1^3=88$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k=88$$

30. 로그와 로그함수

정답 992

자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$이라 할 때,

$\log n = f(n)+g(n)$(단, $f(n)$은 정수, $0\le g(n)<1$)

이다. 이때, $A_1(f(1),\ g(1))$에서

$f(1)=0,\ g(1)=0$이므로 $A_1(0,\ 0)$이고,

$10<k<m<1000$을 만족하는 두 자연수 $k,\ m$에 대하여 $A_k(f(k),\ g(k))$, $A_m(f(m),\ g(m))$에서

$1\le f(k)\le 2,\ \ 1\le f(m)\le 2$이고, 세 점 A_1, A_k, A_m이 한 직선 위에 있으므로 직선 A_1A_k와 직선 A_1A_m의 기울기가 같아야 한다.

즉, $\frac{g(k)}{f(k)}=\frac{g(m)}{f(m)}$

$f(m)\times g(k)=f(k)\times g(m)$

$f(m)\times\{\log k-f(k)\}=f(k)\times\{\log m-f(m)\}$

$f(m)\times\log k=f(k)\times\log m$ …… ㉠

$\frac{f(m)}{f(k)}=\frac{\log m}{\log k}$ 이때, $k<m$이므로

$1<\frac{\log m}{\log k}=\frac{f(m)}{f(k)}$

$f(k)<f(m)$이다.

$1\le f(k)\le 2,\ 1\le f(m)\le 2$이므로

$f(k)=1,\ f(m)=2$이다.

그러므로 k는 두 자리 자연수이고, m은 세 자리 자연수이다.

이때, ㉠에서

$\log k^{f(m)}=\log m^{f(k)},\ k^{f(m)}=m^{f(k)}$

$k^2=m\ \ (\because f(k)=1,\ f(m)=2)$

이므로 $k+m$의 최댓값은 m이 세 자리 제곱수 중 가장 큰 수일 때, k 역시 주어진 조건을 만족하면서 가장 큰 수이면 된다. 즉, 세 자리 제곱수 중에서 가장 큰 수를 찾으면 $(31)^2=961$이므로 $k=31,\ m=961$이다.

따라서 $k+m$의 최댓값은 991