

제 3 교 시



2015학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

B형

성명

수험번호

- 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 먼저 **문제지**에 성명과 수험번호를 기입하십시오.
- **답안지**에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 0이 포함된 경우에는 0을 OMR 답안지에 반드시 표기하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

육 군 사 관 학 교

아
라

1. $\log_2 9 \times \log_3 8$ 의 값은? [2점]

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

2. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $AX = A + B$ 를 만족시키는 행렬 X 의 모든 성분의 합은? [2점]

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

3. 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 60° 이고, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ 일 때, $|\vec{a}-2\vec{b}|$ 의 값은? [2점]

① $3\sqrt{2}$

② $2\sqrt{6}$

③ $2\sqrt{7}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ 6

4. 함수 $f(x)=8\sin x+4\cos 2x+1$ 의 최댓값은? [3점]

① 6

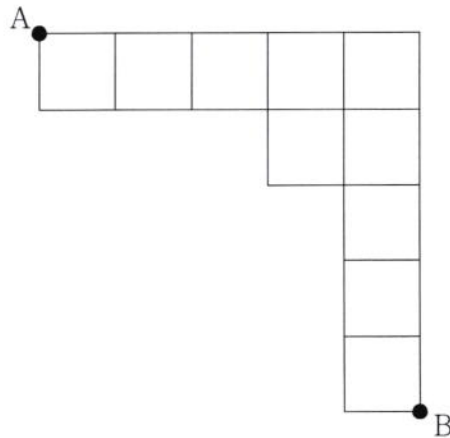
② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

5. 그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다.



이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]

- ① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

6. 좌표평면에서 원점을 중심으로 90° 만큼 회전하는 회전변환을 f , 원점을 닦음의 중심으로 하고 닦음비가 $k(k > 0)$ 인 닦음변환을 g 라 하자. 합성변환 $g \circ f$ 에 의하여 원 $C_1 : (x-5)^2 + y^2 = 16$ 이 옮겨진 원을 C_2 라 할 때, 두 원 C_1, C_2 가 외접하기 위한 모든 k 의 값의 합은? [3점]

- ① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{31}{9}$ ③ $\frac{32}{9}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{34}{9}$

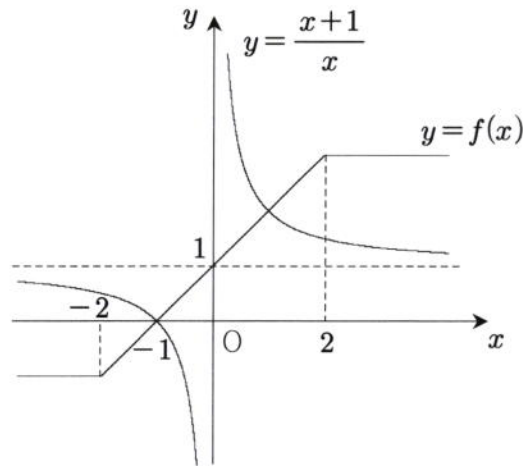
7. 어느 상품의 수요량이 D , 공급량이 S 일 때의 판매가격을 P 라 하면 관계식

$$\log_2 P = C + \log_3 D - \log_9 S \quad (\text{단, } C \text{는 상수})$$

가 성립한다고 한다. 이 상품의 수요량이 9배로 증가하고 공급량이 3배로 증가하면 판매가격은 k 배로 증가한다. k 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

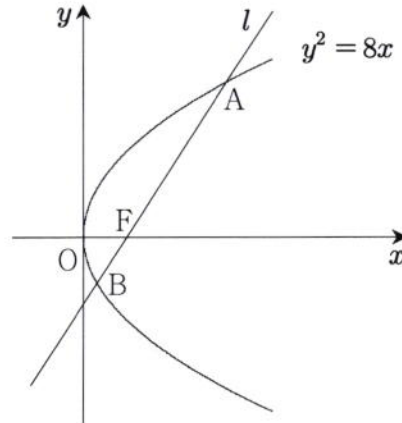
8. 함수 $f(x) = \begin{cases} -1 & (x < -2) \\ x+1 & (-2 \leq x < 2) \\ 3 & (x \geq 2) \end{cases}$ 가 있다. 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=\frac{x+1}{x}$ 의 그래프를 나타낸 것이다.



집합 $\left\{ x \mid \frac{x+1}{f(x)} > x, x \text{는 } |x| < 10 \text{인 정수} \right\}$ 의 원소의 개수는? [3점]

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

9. 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점 F 를 지나는 직선 l 이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A , B 라 하자.
 $\overline{AB} = 14$ 를 만족시키는 직선 l 의 기울기를 m 이라 할 때, 양수 m 의 값은? [3점]



- ① $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

10. 정규분포를 따르는 두 연속확률변수 X , Y 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $E(X) = 10$

(나) $Y = 3X$

$P(X \leq k) = P(Y \geq k)$ 를 만족시키는 상수 k 의 값은? [3점]

- ① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

11. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣고 섞은 다음 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 주머니 A에 넣었더니 두 주머니에 있는 검은 공의 개수가 서로 같아졌다. 이때 주머니 A에서 꺼낸 공이 모두 검은 공이었을 확률은? [3점]

① $\frac{6}{11}$

② $\frac{13}{22}$

③ $\frac{7}{11}$

④ $\frac{15}{22}$

⑤ $\frac{8}{11}$

12. 좌표평면에서 두 점 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ 을 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원이 있다.

초점이 B이고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이 타원과 만나는 한 점을 P라 할 때, 선분 PB의 길이는? [3점]

① $\frac{22}{7}$

② $\frac{23}{7}$

③ $\frac{24}{7}$

④ $\frac{25}{7}$

⑤ $\frac{26}{7}$

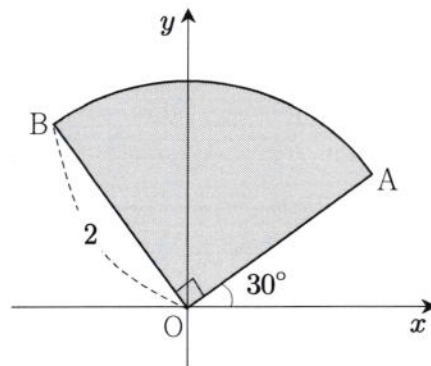
13. 모든 실수에서 연속이고 역함수가 존재하는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 제1사분면에 있는 두 점 $(2, a)$, $(4, a+8)$ 을 지난다. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f\left(2 + \frac{2k}{n}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n} \sum_{k=1}^n g\left(a + \frac{8k}{n}\right) = 50$$

을 만족시키는 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

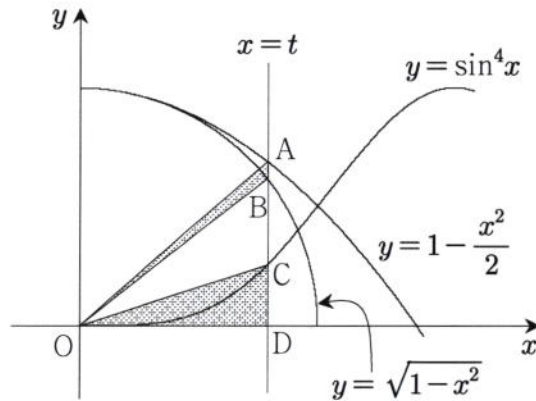
14. 그림은 좌표평면에 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 OAB를 나타낸 것이다. 선분 OA가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30° 일 때, 부채꼴 OAB의 내부를 x 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? (단, O는 원점이고, 점 B는 제2사분면에 있다.) [4점]



- ① $\frac{4(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$ ② $\frac{5(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$ ③ $2(\sqrt{3}+1)\pi$
 ④ $\frac{7(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$ ⑤ $\frac{8(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$

15. 그림과 같이 직선 $x=t$ ($0 < t < 1$)이 세 곡선 $y=1-\frac{x^2}{2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sin^4 x$ 및 x 축과 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 하자. 두 삼각형 AOB, COD의 넓이를 각각 S_1 , S_2 라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{S_1}{S_2}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{1}{8}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{5}{8}$

16. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$AB = O, (A+2B)(2A-B) = E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $BA = O$

ㄴ. 행렬 $A+B$ 의 역행렬이 존재한다.

ㄷ. $A^2 + B^2 = \frac{1}{2}E$ 이면 $B = O$ 이다.

① ㄴ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

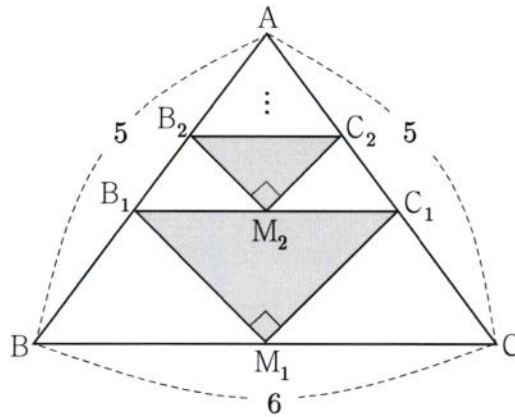
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = 6$ 인 이등변삼각형 ABC가 있다.

선분 BC의 중점 M_1 을 잡고 두 선분 AB, AC 위에 각각 점 B_1, C_1 을 $\angle B_1M_1C_1 = 90^\circ$ 이고 $\overline{B_1C_1} \parallel \overline{BC}$ 가 되도록 잡아 직각삼각형 $B_1M_1C_1$ 을 만든다.

선분 B_1C_1 의 중점 M_2 를 잡고 두 선분 AB_1, AC_1 위에 각각 점 B_2, C_2 를 $\angle B_2M_2C_2 = 90^\circ$ 이고 $\overline{B_2C_2} \parallel \overline{B_1C_1}$ 이 되도록 잡아 직각삼각형 $B_2M_2C_2$ 를 만든다.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 만든 직각삼각형 $B_nM_nC_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



① $\frac{47}{11}$

② $\frac{48}{11}$

③ $\frac{49}{11}$

④ $\frac{50}{11}$

⑤ $\frac{51}{11}$

18. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(I) $a_1 = 2$ 이고 $a_n < a_{n+1}$ ($n \geq 1$)이다.

(II) $b_n = \frac{1}{2}\left(n+1 - \frac{1}{n+1}\right)$ ($n \geq 1$)이라 할 때, 좌표평면에서 네 직선 $x = a_n, x = a_{n+1}, y = 0, y = b_n x$ 에 동시에 접하는 원 T_n 이 존재한다.

다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다.

원점을 O 라 하고, 원 T_n 의 반지름의 길이를 r_n 이라 하자.

직선 $x = a_n$ 과 두 직선 $y = 0, y = b_n x$ 의 교점을 각각 A_n, B_n 이라 하고,

원 T_n 과 세 직선 $x = a_n, y = b_n x, y = 0$ 의 접점을 각각 C_n, D_n, E_n 이라 하면

$\overline{A_n B_n} = a_n b_n$ 이고 $\overline{O B_n} = a_n \sqrt{\boxed{\text{(가)}} + b_n^2}$ 이다.

$$\begin{aligned} \overline{O D_n} &= \overline{O B_n} + \overline{B_n D_n} = \overline{O B_n} + \overline{B_n C_n} \\ &= a_n \sqrt{\boxed{\text{(가)}} + b_n^2} + a_n b_n - r_n \end{aligned}$$

$$\overline{O E_n} = a_n + r_n$$

$\overline{O D_n} = \overline{O E_n}$ 이므로

$$r_n = \frac{a_n(b_n - 1 + \sqrt{\boxed{\text{(가)}} + b_n^2})}{2}$$

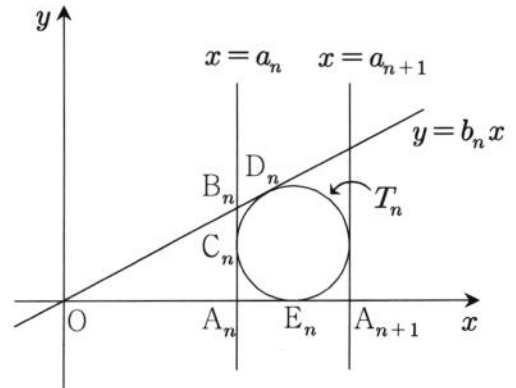
$$\therefore a_{n+1} = a_n + 2r_n = \boxed{\text{(나)}} \times a_n \quad (n \geq 1)$$

이때 $a_1 = 2$ 이고

$$a_n = \boxed{} \times a_{n-1} = \boxed{} \times a_{n-2} = \cdots = \boxed{} \times a_1$$

이므로

$$a_n = \boxed{\text{(다)}}$$



위의 과정에서 (가)에 알맞은 수를 p 라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $p + f(4) + g(4)$ 의 값은? [4점]

① 54

② 55

③ 56

④ 57

⑤ 58

19. 자연수 n 에 대하여 $\log n$ 의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$ 이라 할 때, 좌표평면에서 점 A_n 의 좌표를 $(f(n), g(n))$ 이라 하자. 10보다 크고 1000보다 작은 두 자연수 k, m ($k < m$)에 대하여 세 점 A_1, A_k, A_m 이 한 직선 위에 있을 때, $k+m$ 의 최댓값은? [4점]

① 988

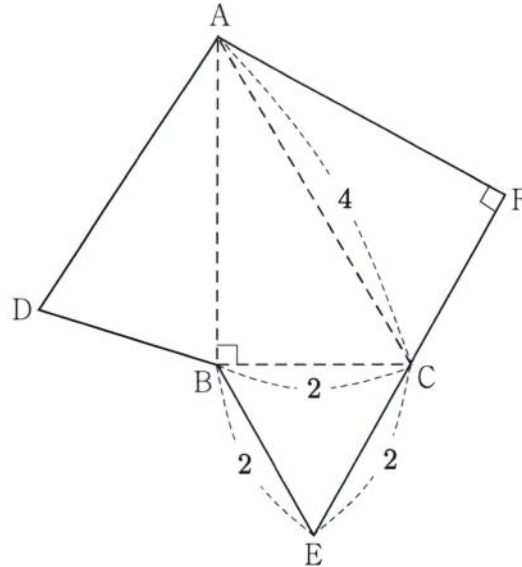
② 990

③ 992

④ 994

⑤ 996

20. 그림은 어떤 사면체의 전개도이다. 삼각형 BEC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고, $\angle ABC = \angle CFA = 90^\circ$, $\overline{AC} = 4$ 이다. 이 전개도로 사면체를 만들 때, 두 면 ACF, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자. $\cos\theta$ 의 값은? [4점]



① $\frac{1}{6}$

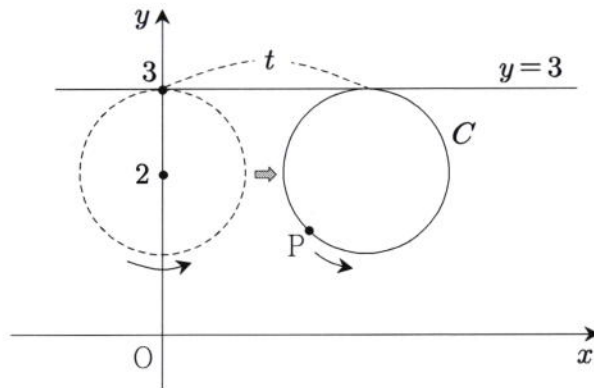
② $\frac{\sqrt{2}}{6}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$

⑤ $\frac{1}{3}$

21. 좌표평면에 중심이 $(0, 2)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원 C 가 있고, 이 원 위의 점 P 가 점 $(0, 3)$ 의 위치에 있다. 원 C 는 직선 $y=3$ 에 접하면서 x 축의 양의 방향으로 미끄러지지 않고 굴러간다. 그림은 원 C 가 굴러간 거리가 t 일 때, 점 P 의 위치를 나타낸 것이다.



점 P 가 나타내는 곡선을 F 라 하자. $t = \frac{2}{3}\pi$ 일 때 곡선 F 위의 점에서의 접선의 기울기는?

[4점]

- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

22. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_2 + a_4 = 16$, $a_8 + a_{12} = 58$ 일 때, a_{17} 의 값을 구하시오. [3점]

23. 방정식 $\sqrt{x+3} = |x|-3$ 의 모든 근의 합을 구하시오. [3점]

24. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $\int_0^x t^2 f'(t) dt = \frac{3}{2}x^4 + kx^3$ 이다.

(나) $x=1$ 에서 극솟값 7을 갖는다.

$f(10)$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.) [3점]

25. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x) = x^n \ln x$ 의 최솟값을 $g(n)$ 이라 하자. $g(n) \leq -\frac{1}{6e}$ 을 만족시키는

모든 n 의 값의 합을 구하시오. [3점]

26. 이차함수 $f(x) = ax^2$ 에 대하여 구간 $[0, 2]$ 에서 정의된 연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ f(x-1) + f(1) & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

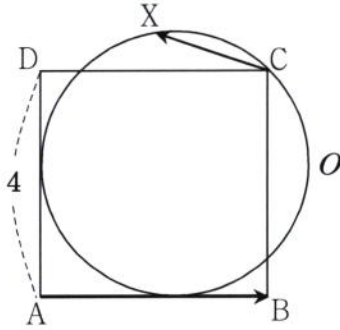
일 때, $P(a \leq X \leq a+1) = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

27. 두 함수 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{k}{x}$ ($k > 1$)에 대하여 좌표평면에서 직선 $x=2$ 가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 에 대하여 점 P에서의 접선을 l , 곡선 $y=g(x)$ 에 대하여 점 Q에서의 접선을 m 이라 하자. 두 직선 l , m 이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 일 때, 상수 k 에 대하여 $3k$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 좌표공간에서 구 $(x-6)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=16$ 위의 점 P와 yz 평면 위에 있는 원 $(y-2)^2+(z-1)^2=9$ 위의 점 Q 사이의 거리의 최댓값을 구하시오. [4점]

29. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 변 AB와 변 AD에 모두 접하고 점 C를 지나는 원을 O 라 하자. 원 O 위를 움직이는 점 X 에 대하여 두 벡터 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CX} 의 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CX}$ 의 최댓값은 $a-b\sqrt{2}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 자연수이다.) [4점]



30. 함수 $f(x) = -xe^{2-x}$ 과 상수 a 가 다음 조건을 만족시킨다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 할 때,
 $x < a$ 이면 $f(x) > g(x)$ 이고, $x > a$ 이면 $f(x) < g(x)$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 접선 $y=g(x)$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $k-e^2$ 이다. k 의 값을 구하시오. [4점]

이 권