수학 영역(B형)

1. ⑤	2. ①	3. ③	4. ②	5. ②
6. ③	7. ④	8. ④	9. ④	10. ②
11. ①	12. ④	13. ③	14. ⑤	15. ①
16. ⑤	17. ②	18. ①	19. ③	20. ⑤
21. ⑤	22. 50	23. 3	24. 250	25. 21
26. 39	27. 20	28. 14	29. 80	30. 9

1. 지수함수와 로그함수 정답 ⑤

$$\log \quad \times \log_3 8 = \log_2 3^2 \times \log_3 2^3$$
$$= 2\log_2 3 \times 3\log_3 2$$
$$= 2\log_2 3 \times \frac{3}{\log_2 3} = 6$$

2. 행렬과 그래프 정답 ①

$= \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$AX = A + B$

$X = A^{-1}(A+B)$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 9

3. 벡터 정답 ③

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60° 이고,

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$일 때,

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$$
$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + 4\ \vec{b} \cdot \vec{b})$$
$$= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$
$$= |\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ + 4|\vec{b}|^2$$
$$= 2^2 - 4 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times 3^2$$
$$= 28$$

$\therefore\ |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2 \quad 7$

4. 삼각함수 정답 ②

$8\sin x + 4\cos 2x + 1$

$= 8\sin x + 4(1 - 2\sin^2 x) + 1$

$= 8\sin x + 4 - 8\sin^2 x + 1$

$= -8\sin^2 x + 8\sin x + 5$

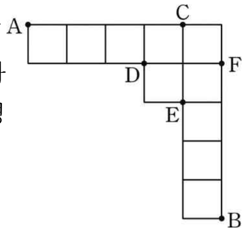
이때, $\sin x = t(-1 \le t \le 1)$로 치환하면

$-8t^2 + 8t + 5$

$= -8\ t - \frac{1}{2})^2 + 7$

이므로 최댓값은 7이다.

5. 순열과 조합 정답 ②



오른쪽 그림과 같이 C, D, E, F 지점을 이용하여 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하면

(i) A → C → B일 때,

$$1 \times \frac{6!}{1! \times 5!} = 6$$

(ii) A → D → E → B일 때,

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{2!}{1! \times 1!} \times \frac{4!}{1! \times 3!} = 32$$

(iii) A → D → F → B일 때,

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times 1 \times 1 = 4$$

따라서 (i), (ii), (iii) A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $6 + 32 + 4 = 42$이다.

6. 일차변환과 행렬 정답 ③

원 $C_1 : (x-5)^2 + y^2 = 16$에서 원 C_1은 원의 중심이 $(5,\ 0)$이고, 반지름이 4이다.

원 C_1이 좌표평면에서 원점을 중심으로 90° 만큼 회전하는 회전변환 f에 의하여 옮겨진 도형을 C_f라 하면, C_f는 중심이 $(0,\ 5)$이고, 반지름이 4인 원이다. 원 C_f가 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 $k(k > 0)$인 닮음변환 g에 의하여 옮겨진 도형이 C_2이므로 도형 C_2는 중심이 $(0,\ 5k)$, 반지름이 $4k$인 원이다.

즉, $C_2 : x^2 + (y-5k)^2 = (4k)^2$

이때, 두 원 C_1, C_2가 외접하므로 두 원의 중심의 거리는 두 원의 반지름의 합과 같다.

$$(5-0)^2 + (0-5k)^2 = 4 + 4k$$

$25 + 25k^2 = (4 + 4k)^2$

$5+25k \ =16+32k+16k^2$

$9k^2-32k+9=0$

위의 이차방정식의 판별식을 $\frac{\quad}{4}$ 라 하면 $\frac{D}{4}>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 $\frac{32}{9}$ 이다.

따라서 두 원 C_1, C_2가 외접하기 위한 모든 k의 값의 합은 $\frac{32}{9}$ 이다.

7. 지수함수와 로그함수

정답 ④

$\log_2 kP = C+\log_3 9D-\log_9 3S$

$= C+(\log_3 9+\log_3 D)-(\log_9 3+\log_9 S)$

$= C+2+\log_3 D-\frac{1}{2}-\log_9 S$

$= C+\log_3 D-\log_9 S+\frac{3}{2}=\log_2 P+\frac{3}{2}$

이므로

$\log_2 kP=\log_2 P+\frac{3}{2}$

$\log_2 kP-\log_2 P=\frac{3}{2}$

$\log_2 \frac{kP}{P}=\frac{3}{2}$, $\log_2 k=\frac{3}{2}$

$\therefore\ k=2^{\frac{3}{2}}=2\quad 2$

8. 방정식과 부등식

정답 ④

정수 x가 $-10<x<10$일 때,

$\frac{x+1}{f(x)}>x$를 만족하는 x의 범위를 구하면,

(ⅰ) $x>0$, $f(x)>0$일 때,

$\frac{x+1}{f(x)}>x$, $\frac{x+1}{x}>f(x)$

$\therefore\ 0<x<1$

그러므로 만족하는 정수 x는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $x<0$, $f(x)>0$일 때,

$\frac{x+1}{f(x)}>x$, $\frac{x+1}{x}<f(x)$

$\therefore\ -1<x<0$

그러므로 만족하는 정수 x는 존재하지 않는다.

(ⅲ) $x<0$, $f(x)<0$일 때,

$\frac{x+1}{f(x)}>x$, $\frac{x+1}{x}>f(x)$

$\therefore\ x<-1$

그러므로 x는 -2 이하의 정수이다.

(ⅳ) $x=0$일 때,

$\frac{0+1}{f(0)}>0$, $\frac{1}{1}>0$

그러므로 $x=0$은 주어진 부등식을 만족시킨다.

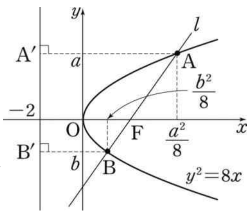
조건에서 정수 x의 범위가 $-10<x<10$이므로

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 집합의 원소는

-9, -8, -7, $\cdots$, -2, 0의 9개이다.

9. 이차곡선

정답 ④



포물선 $y^2=8x$의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다. 점 A와 점 B의 y좌표를 각각 a, $b\,(a\neq b)$라 하면

A $\frac{a^2}{8},\ a\Big)$, B$\left(\frac{b^2}{8},\ b\right)$이고,

점 A와 점 B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 점 A′, B′이라 하면 포물선의 정의에 의해

AF$=$AA′, BF$=$BB′이다.

$\overline{\mathrm{AA'}}=2+\frac{a^2}{8}$, $\overline{\mathrm{BB'}}=2+\frac{b^2}{8}$, AB $=14$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{AA'}}+\overline{\mathrm{BB'}}$

$=2+\frac{a^2}{8}+2+\frac{b^2}{8}=4+\frac{a^2+b^2}{8}=14$

$a^2+b^2=80$ …… ㉠

이때, 점 A, F, B는 직선 l 위에 있으므로 점 A와 F를 지나는 직선의 기울기와 점 F와 B를 지나는 직선의 기울기가 같다.

$\frac{a-0}{\frac{a^2}{8}-2}=\frac{b-0}{\frac{b^2}{8}-2}$, $ab^2-16a=ba^2-16b$

$ab(b-a)+16(b-a)=0$

$\therefore\ ab=-16\ (\because\ a\neq b)$

따라서 직선 l의 기울기 m을 구하면

$m=\frac{a-b}{\frac{a^2}{8}-\frac{b^2}{8}}$

$=\frac{8(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{8}{a+b}$ …… ㉡

이때, m은 양수이므로 양수 $a+b$의 값을 구하면,

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=80+2\times(-16)\,(\because\qquad)$

48

$\therefore \ a+b= \quad 48=4\sqrt{3}$ $(\because \ a+b>0)$

㉡에 대입하면

$$m=\frac{8}{a+b}=\frac{8}{4\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

10. 통계

정답 ②

확률변수 의 평균 $\mathrm{E}(X)=m$이라 하고, $Y=3X$이므로

$\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}(Y\ge k)$

$\mathrm{P}(X\le x)=\mathrm{P}(3X\ge k)$

$\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}\ \ X\ge \frac{k}{3}\Big)$

$\mathrm{P}(X\ge m+(m-k))=\mathrm{P}\left(X\ge \frac{k}{3}\right)$

$\mathrm{P}(X\ge 2m-k)=\mathrm{P}\left(X\ge \frac{k}{3}\right)$

즉, $2m-k=\frac{k}{3}$

$k+\frac{k}{3}=2m=20\ (\because \ m=10)$

$\frac{4k}{3}=20$

$\therefore \ k=15$

11. 확률

정답 ①

두 주머니에 있는 검은 공의 개수가 같은 사건을 X, 이때, 주머니 A에서 꺼낸 공이 모두 검은 공인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

이때, 주어진 시행을 한 후 두 주머니에 있는 검은 공의 개수가 같은 경우는 다음과 같다.

(i) 주머니 A에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼내어 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 흰 공 2개를 뽑는 경우 $\frac{{}_4C_1\times{}_2C_1}{C_2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{4}{21}$

(ii) 주머니 A에서 검은 공 2개를 꺼내어 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 뽑는 경우 $\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_4C_1\times{}_4C_1}{{}_8C_2}=\frac{8}{35}$

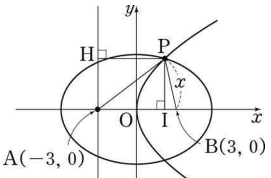
(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}\ \frac{\frac{8}{35}}{\frac{4}{21}+\frac{8}{35}}=\frac{6}{11}$$

12. 이차곡선

정답 ④

두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원과 초점이 B이고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



위의 그림과 같이 점 P에서 준선과 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 선분 PB의 길이를 x라 하면 포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PB}}=\mathrm{PH}$이고, 타원의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=8$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{PA}}=8-x$이다.

이때, $\mathrm{AI}=\overline{\mathrm{PH}}=x$이고

$\mathrm{IB}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AI}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{PH}}=6-x$이다.

삼각형 AIP와 삼각형 BIP는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PI}}^2+\overline{\mathrm{AI}}^2$, $\overline{\mathrm{PI}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{AI}}^2$

$\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PI}}^2+\overline{\mathrm{IB}}^2$, $\overline{\mathrm{PI}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2-\overline{\mathrm{IB}}^2$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{AI}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2-\overline{\mathrm{IB}}^2$

$(8-x)^2-x^2=x^2-(6-x)^2$

$64-16x=12x-36$, $28x=100$

$\therefore \ x=\frac{25}{7}$

13. 적분법

정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{2k}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(a+\frac{8k}{n}\right)$$

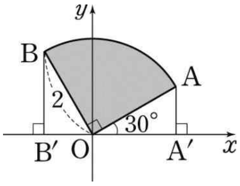
$$=\int_2^4 f(x)dx+\int_a^{a+8}g(x)dx$$

$=4(a+8)-2a=2a+32=50$

$\therefore \ a=9$

14. 적분법

정답 ⑤



오른쪽 그림에서 점 A와 점 B에서 x축 내린 수선의 발을 각각 A′, B′라 하자

부채꼴 OAB의 내부를 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 V라 하면, 부피 V는 도형 AA′B′B를 x축의

둘레로 회전시켜 생기는 회전체의
부피에서 삼각형 AA′O 와
삼각형 BB′O 를 각각 축의
둘레로 회전시켜 생긴 원뿔들의 부피를 뺀 것과 같다.
$\angle \mathrm{AOA'}=30^\circ$, $\angle \mathrm{BOB'}=60^\circ$ 이므로

$$\mathrm{OA'}=\mathrm{OA}\cos30^\circ=2\times \ \frac{3}{2}=\sqrt{3}$$

$$\overline{\mathrm{AA'}}=\overline{\mathrm{OA}}\sin30^\circ=2\times\frac{1}{2}=1$$

$$\mathrm{OB'}=\mathrm{OB}\cos60^\circ=2\times\frac{1}{2}=1$$

$$\mathrm{BB'}=\overline{\mathrm{OB}}\sin60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

따라서 구하는 부피 는

$$\pi \ {}_{1}^{3}\ y^2dx-\left(\frac{\pi}{3}\times\overline{\mathrm{AA'}}^{\,2}\times\overline{\mathrm{OA}}'\right)$$

$$+\left(\frac{\pi}{3}\times\mathrm{BB}^{\,2}\times\overline{\mathrm{OB}}'\right)\Bigg\}$$

$$=\pi\int_{-1}^{\sqrt{3}}(4-x^2)dx-\left\{\left(\frac{\pi}{3}\times1\times\sqrt{3}\right)+\left(\frac{\pi}{3}\times3\times1\right)\right\}$$

$$=\pi\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}+3)$$

$$=\pi\left(3\sqrt{3}+\ \frac{11}{3}\right)-\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}+3)$$

$$=\ \frac{8(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$$

15. 함수의 극한과 연속 　정답 ①

A $t,\ 1-\frac{t^2}{2}\Big)$, B $t,\ \ \ 1-t^2\big)$, C $t,\ \sin^4t)$, D$(t,\ 0)$
이므로 삼각형 AOB 와 삼각형 COD 의 넓이를 각각
S_1, S_2라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{t^2}{2}-\sqrt{1-t^2}\right)\times t$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\times\sin^4t\times t$$

$$\therefore\ \lim_{t\to+0}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to+0}\ \frac{1-\frac{t^2}{2}-\sqrt{1-t^2}}{\sin^4t}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{\left(1-\frac{t^2}{2}\right)^2-\ \sqrt{1-t^2}\big)^2}{\sin^4t\ \left(1-\frac{t^2}{2}\right)^2+\sqrt{1-t^2}\Big\}}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{1-t^2+\frac{t^4}{4}-(1-t^2)}{\sin^4t\left\{\left(1-\frac{t^2}{2}\right)+\sqrt{1-t^2}\right\}}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{t^4}{4}}{\sin^4t\left\{\left(1-\frac{t^2}{2}\right)+\sqrt{1-t^2}\right\}}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{1}{4\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4\left\{\left(1-\frac{t^2}{2}\right)+\sqrt{1-t^2}\right\}}$$

$$=\frac{1}{4\times1^4\times(1+1)}=\frac{1}{8}$$

16. 행렬과 그래프 　정답 ⑤

ㄱ. (참) $(A+2B)(2A-B)=E$ ······ ㉠
　이므로 $(2A-B)(A+2B)=E$
　따라서
　$2A^2-AB+4BA-2B^2$
　$=2A^2+4AB-BA-2B^2$
　$5AB-5BA=O$
　$\therefore\ AB=BA$
　이때, $AB=O$이므로 $BA=O$이다.

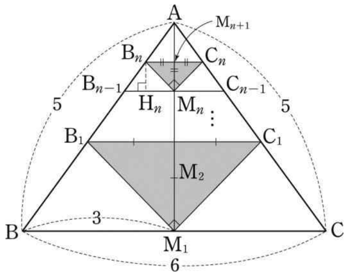
ㄴ. (참) $(A+2B)(2A-B)=E$
　$2A^2-AB+4BA-2B^2=E$
　ㄱ에서 $AB=O,\ BA=O$이므로
　$2A^2-2B^2=E$
　$2(A+B)(A-B)=E$
　$\therefore\ (A+B)^{-1}=2(A-B)$

ㄷ. (참) ㄴ에서 $2A^2-2B^2=E$에서
　$A^2-B^2=\frac{1}{2}E$ ······ ㉡
　$A^2+B^2=\frac{1}{2}E$ ······ ㉢
　㉡−㉢을 하면 $B^2=O$이다.
　$(A+2B)(2A-B)=E$의 양변의 왼쪽에 행렬 B를 곱하면
　$B(A+2B)(2A-B)=B$
　$(BA+2B^2)(2A-B)=B$
　$2B^2(2A-B)=B$ ($\because\ BA=O$)
　$\therefore\ B=O(\because B^2=O)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17. 수열의 극한

정답 ②



이등변삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점 M 을 잡으면, 삼각형 ABM_1은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의해 AM_1 4 구하고자 하는 직각삼각형 $B_nM_nC_n$의 넓이 $_n$ 은 삼각형 $B_nM_{n+1}M_n$의 넓이와 삼각형 $C_nM_{n+1}M_n$의 넓이의 합이다. 이때, 삼각형 $B_nM_{n+1}M_n$과 삼각형 $C_nM_{n+1}M_n$은 합동인 직각이등변삼각형이다.

따라서 직각이등변삼각형 $B_nM_{n+1}M_n$의 넓이를

a_n이라 하면

$S_n = 2a_n$ …… ㉠

우선 직각이등변삼각형 $B_1M_1C_1$의 넓이 S_1을 구하면,

삼각형 ABM_1과 삼각형 AB_1M_2는 닮음이므로

$BM_1 : \overline{M_1A} = B_1M_2 : \overline{M_2A} = 3 : 4$

$4\overline{B_1M_2} = 3\overline{M_2A}$

$4\overline{B_1M_2} = 3\ \overline{M_1A} - M_1M_2)$

$4\overline{B_1M_2} = 3(\overline{M_1A} - \overline{B_1M_2})$

$4\overline{B_1M_2} = 3\overline{M_1A} - 3\overline{B_1M_2}$

$7\overline{B_1M_2} = 3\overline{M_1A} = 3\times4 = 12$

$\therefore\ \overline{B_1M_2} = \begin{matrix}12\\7\end{matrix}$ …… ㉡

이때, ㉠에서 $S_1 = 2a_1$이므로

$S_1 = 2\times\ \frac{1}{2}\times\frac{12}{7}\times\frac{12}{7}\Big) = \left(\frac{12}{7}\right)^2$

$\therefore\ S_1 = \left(\frac{12}{7}\right)^2$ …… ㉢

이때, 위의 그림에서 점 B_n에서 선분 $B_{n-1}M_n$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면 삼각형 $B_nB_{n-1}H_n$과 삼각형 ABM_1은 닮음이다.

$B_{n-1}H_n : \overline{H_nB_n} = \overline{BM_1} : \overline{M_1A} = 3 : 4$

$4\overline{B_{n-1}H_n} = 3\overline{H_nB_n}$

$4\ B_{n-1}M_n - \overline{H_nM_n}) = 3\overline{B_nM_{n+1}}$

$4(\overline{B_{n-1}M_n} - \overline{B_nM_{n+1}}) = 3\overline{B_nM_{n+1}}$

$\therefore\ \overline{B_nM_{n+1}} = \frac{4}{7}\overline{B_{n-1}M_n}$ …… ㉣

㉡, ㉣에서 $\overline{B_nM_{n+1}} = \left(\frac{12}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}$

직각이등변삼각형 $B_nM_{n+1}M_n$의 넓이 a_n은

$$a_n = \frac{1}{2}\times\overline{B_nM_{n+1}}\times M_{n+1}M_n$$
$$= \frac{1}{2}\times\left(\overline{B_nM_{n+1}}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\ \left(\frac{12}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}\Big\}^2$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ S_n = \sum_{n=1}^{\infty}2a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{12}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}\right\}^2$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{12}{7}\right)^2\left\{\left(\frac{4}{7}\right)^2\right\}^{n-1}\right]$$
$$= \frac{\left(\frac{12}{7}\right)^2}{1-\left(\frac{4}{7}\right)^2} = \frac{144}{33} = \frac{48}{11}$$

18. 수열

정답 ①

원점을 O라 하면, 원 T_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하자.

직선 $x = a_n$과 두 직선 $y = 0$, $y = b_nx$의 교점을 각각 A_n, B_n이라 하고, 원 T_n과 세 직선 $x = a_n$, $y = b_nx$, $y = 0$의 접점을 각각 C_n, D_n, E_n이라 하면

$A_n(a_n,\ 0)$, $B_n(a_n,\ a_nb_n)$이므로

$\overline{A_nB_n} = a_nb_n$이고

$OB_n = \quad a_n^2 + a_n^2b_n^2 = a_n\sqrt{\boxed{1}+b_n^2}$ 이다.

$\overline{OD_n} = \overline{OB_n} + \overline{B_nD_n} = \overline{OB_n} + B_nC_n$

$= a_n\sqrt{\boxed{1}+b_n^2} + a_nb_n - r_n$

$\overline{OE_n} = a_n + r_n$

원의 중심을 점 P라 하면 직각삼각형 PD_nO와 직각삼각형 POE_n은 RHS합동이고, $\overline{OD_n} = \overline{OE_n}$이므로

$a_n\sqrt{1+b_n^2} + a_nb_n - r_n = a_n + r_n$

$2r_n = a_n\sqrt{1+b_n^2} + a_nb_n - a_n$

$2r_n = a_n\left(b_n - 1 + \sqrt{1+b_n^2}\right)$

$$= \frac{a_n(b_n - 1 + \quad \boxed{1} + b_n^2}{2}$$

한편,

$$a_{n+1} = a_n + 2r_n$$

$$= a_n + 2 \times \frac{a_n(b_n - 1 + \sqrt{1+b_n^2}\,)}{2}$$

$$= a_n + a_n(b_{n-1} + \sqrt{1+b_n^2}\,)$$

$$= a_n(b_n + \sqrt{1+b_n^2}\,)$$

조건(II)에서 $b_n = \frac{1}{2}\ \ n+1-\frac{1}{n+1}\Big)$이므로

$$a_{n+1} = \ \ b_n + \quad 1+\left\{\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right)\right\}^2\Bigg)\times a_n$$

$$= \left(b_n + \sqrt{1+\frac{1}{4}\ \ (n+1)^2 - 2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2\Big\}}\ \right)\times a_n$$

$$= \left(b_n + \sqrt{\frac{1}{4}\left\{(n+1)^2 + 2 + 2\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\right\}}\ \right)\times a_n$$

$$= \left(b_n + \frac{1}{2}\sqrt{\left\{(n+1) + \left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}^2}\ \right)\times a_n$$

$$= \left\{b_n + \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}\times a_n$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}\times a_n$$

$$= (n+1)\times a_n$$

$\therefore\ a_{n+1} = a_n + 2r = \boxed{(\ n+1\ )}\times a_n\ (n \geq 1)$

이때 $a_1 = 2$이고

$a_n = \boxed{}\times a_{n-1} = \boxed{}\times a_{n-2} = \ \cdots\ = \boxed{}\times a_1$

즉, $a_n = na_{n-1} = n(n-1)a_{n-2}$

$= \cdots\ = n(n-1)(n-2)\cdots\times 3\times 2\times a_1$

$= n!\times a_1 = 2n!$

이므로

$a_n = \boxed{2n!}$

$\therefore\ p = 1,\ f(n) = n+1,\ g(n) = 2n!$

$\therefore\ p + f(4) + g(4) = 1 + 5 + 48 = 54$

19. 수열 (정답 ③)

자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$이라 할 때,

$\log n = f(n) + g(n)$(단, $f(n)$은 정수, $0 \leq g(n) < 1$)이다. 이때, $\quad_1(f(1),\ g(1))$에서

$f(1) = 0,\ g(1) = 0$이므로 $A_1(0,\ 0)$이고,

$10 < k < m < 1000$을 만족하는 두 자연수 $k,\ m$에 대하여 $A_k(f(k),\ g(k)),\ A_m(f(m),\ g(m))$에서

$1 \leq f(k) \leq 2,\ \ 1 \leq f(m) \leq 2$이고, 세 점 $A_1,\ A_k,\ A_m$이 한 직선 위에 있으므로 직선 A_1A_k와 직선 A_1A_m의 기울기가 같아야 한다.

즉, $\dfrac{g(k)}{f(k)} = \dfrac{g(m)}{f(m)}$

$f(m)\times g(k) = f(k)\times g(m)$

$f(m)\times\{\log k - f(k)\} = f(k)\times\{\log m - f(m)\}$

$f(m)\times\log k = f(k)\times\log m$ …… ㉠

$\dfrac{f(m)}{f(k)} = \dfrac{\log m}{\log k}$ 이때, $k < m$이므로

$1 < \dfrac{\log m}{\log k} = \dfrac{f(m)}{f(k)}$

$f(k) < f(m)$이다.

$1 \leq f(k) \leq 2,\ 1 \leq f(m) \leq 2$이므로

$f(k) = 1,\ f(m) = 2$이다.

그러므로 k는 두 자리 자연수이고, m은 세 자리 자연수이다.

이때, ㉠에서

$\log k^{f(m)} = \log m^{f(k)}$

$k^{f(m)} = m^{f(k)}$

$k^2 = m\ \ (\because f(k) = 1,\ f(m) = 2)$

이므로 $k+m$의 최댓값은 m이 세 자리 제곱수 중 가장 큰 수일 때, k 역시 주어진 조건을 만족하면서 가장 큰 수이면 된다. 즉, 세 자리 제곱수 중에서 가장 큰 수를 찾으면 $(31)^2 = 961$이므로 $k = 31,\ m = 961$이다.

따라서 $k+m$의 최댓값은 992

20. 벡터 (정답 ④)

$\mathrm{AB}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \mathrm{BC}^2 = 4^2 - 2^2 = 12$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = 2\ \ \ 3$

$\overline{\mathrm{AF}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \mathrm{CF}^2 = 4^2 - 2^2 = 12$

$\therefore\ \ \overline{\mathrm{AF}} = 2\sqrt{3}$

이므로 직각삼각형 ABC와 직각삼각형 AFC가 서로 합동이다.

따라서 두 점 B, F에서 변 AC에 각각 내린 수선의 발이 일치하므로 이 수선의 발을 점 H라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BH}},\ 2\sqrt{3}\times 2 = 4\times\overline{\mathrm{BH}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{3}$

$\mathrm{AF} \quad \mathrm{CF} = \mathrm{AC} \times \overline{\mathrm{FH}}$, $2 \quad 3 \times 2 = 4 \times \overline{\mathrm{FH}}$

$\therefore \ \overline{\mathrm{FH}} = \sqrt{3}$

또한, $\overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{BD}} = 2$

두 면 ACF, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

θ는 사면체 A-BCE에서 각 BHF와 같으므로

제 2코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{BF}} \quad = \overline{\mathrm{BH}}^{\,2} + \overline{\mathrm{FH}}^{\,2} - 2\overline{\mathrm{BH}} \times \overline{\mathrm{FH}} \times \cos\theta$

$2^2 = \ \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \cos\theta$

$\therefore \ 6\cos\theta = 2$

$\therefore \ \cos\theta = \frac{1}{3}$

21. 미분법 　　정답 ⑤

원 　의 중점을 O, 원 C와 직선 $y=3$와 접하는 점을 T라 하고, $\angle\mathrm{TOP} = \theta$라 하자.

원 C가 t만큼 굴러가면 점 P는 t만큼 원 C의 원주 위를 움직인다.

이때, $r=1$, $r\theta = t$이므로 점 P는

$\mathrm{P} \ \ t + \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \ 2 + \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\bigg)$

$\therefore \ \mathrm{P}\,(t - \sin t, \ 2 + \cot t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{1 - \cos t}$$

$t = \frac{2}{3}\pi$일 때, 곡선 F 위의 점에서 접선의 기울기는

$$\frac{-\sin\frac{2}{3}\pi}{1 - \cos\frac{2}{3}\pi} = \frac{-\ \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

22. 수열 　　정답 50

등차수열 　$a_n\}$의 공차를 d라 하면,

$a_2 + a_4 = (a_1 + d) + (a_1 + 3d)$

$\quad = 2a_1 + 4d = 16$ 　　…… ㉠

$a_8 + a_{12} = (a \ + 7d) + (a_1 + 11d)$

$\quad = 2a_1 + 18d = 58$ 　　…… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a_1 = 2, \ d = 3$

$\therefore \ a_{17} = a_1 + 16d = 2 + 48 = 50$

23. 방정식과 부등식 　　정답 3

(ⅰ) $-3 \le x < 0$일 때

$\sqrt{x+3} = |x| - 3, \ \sqrt{x+3} = -x - 3$

$x + 3 = x^2 + 6x + 9, \ x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x+2)(x+3) = 0$

$\therefore \ x = -2$ 또는 $x = -3$

이때, $x = -2$를 주어진 방정식에 대입하면

$\sqrt{(-2)+3} = |-2| - 3$

$1 \neq -1$이므로 성립하지 않는다.

$\therefore \ x = -3$

(ⅱ) $x \ge 0$

$\sqrt{x+3} = |x| - 3, \ \sqrt{x+3} = x - 3$

$x + 3 = x^2 - 6x + 9, \ x^2 - 7x + 6 = 0$

$(x-1)(x-6) = 0$

$\therefore \ x = 1$ 또는 $x = 6$

이때, $x = 1$을 주어진 방정식에 대입하면

$\sqrt{1+3} = |1| - 3$

$2 \neq -2$이므로 성립하지 않는다.

$\therefore \ x = 6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 근의 합은 $-3 + 6 = 3$

24. 적분법 　　정답 250

조건 (가)에서 $\ \ {}_{0}^{x} t^2 f'(t)dt = \frac{3}{2}x^4 + kx^3$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^2 f'(x) = 6x^3 + 3kx^2$

$x^2 \ \ f'(x) - 6x - 3k\} = 0$

함수 $f(x)$가 다항함수이면 함수 $f'(x)$도 다항함수이므로

위의 등식이 성립하기 위해서는 $f'(x) = 6x + 3k$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(1) = 0$

$f'(1) = 6 + 3k = 0$

$\therefore \ k = -2$

그러므로 $f'(x) = 6x - 6$이다.

$f(x) = \int f'(x) = \int (6x - 6)dx$

$\quad = 3x^2 - 6x + C$(단, C는 상수)

조건 (나)에서 $f(1) = 7$이므로

$f(1) = 3 - 6 + c = 7$

$\therefore \ C = 10$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 6x + 10$

$\therefore \ f(10) = 250$

25. 미분법

정답 21

자연수 에 대하여 $f(x)=x\ \ln x$

$f'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^n\times\frac{1}{x}=x^{n-1}(n\ln x+1)=0$

에서 $x=0$ 또는 $x=e^{-\frac{1}{n}}$

함숫값이 감소에서 증가로 변하므로 함수 $f(x)$는

$x=e^{-\frac{1}{n}}$에서 최솟값을 $g(n)$을 갖는다.

$g(n)=f\ e^{-\frac{1}{n}}\Big)=\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n\times\ln e^{-\frac{1}{n}}$

$\quad=e^{-1}\times\ -\frac{1}{n}\Big)=-\frac{1}{ne}$

이때, $-\frac{1}{ne}\le-\frac{1}{6e},\ \frac{1}{ne}\ge\frac{1}{6e}$

$\therefore\ n\le 6$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은 $1+2+3+4+5+6$이므로 21이다.

26. 적분법

정답 39

$\ {}_0^2 g(x)dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2\ f(x-1)+f(1)\}dx$

$=1$

이때, $x-1=t$로 치환하면

$\int_1^2\{f(x-1)+f(x)\}dx=\int_0^1 f(t)dt+f(1)$이므로

$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2\{f(x-1)+f(1)\}dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+\ \ \int_0^1 f(t)dt+f(1)\Big\}$

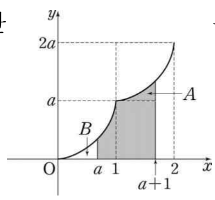
$=2\int_0^1 f(x)dx+f(1)=2\int_0^1 x^2dx+f(1)$

$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1+a=\frac{2}{3}a+a=\frac{5}{3}a=1$

$\therefore\ a=\frac{3}{5}$

따라서 $\mathrm{P}(a\le\ \ \ \le a+1)=\mathrm{P}\left(\frac{3}{5}\le X\le\frac{8}{5}\right)$

이 확률은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분과 같다.



이때, A와 B의 넓이가 같으므로

$\mathrm{P}(a\le X\le a+1)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{3}{5}\le X\le\frac{8}{5}\right)=\int_0^1\frac{3}{5}x^2dx+\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$=\left[\frac{x^3}{5}\right]_0^1+\frac{9}{25}=\frac{1}{5}+\frac{9}{25}=\frac{14}{25}$

$\therefore\ p=25,\ q=14,\ p+q=39$

27. 미분법

정답 20

곡선 $y=f(x)$에 대하여 점 P에서의 접선 l과 곡선 $y=g(x)$에 대하여 점 Q에서의 접선 m이 x축 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\tan\alpha=f'(2),\ \tan\beta=g'(2)$이다.

$f'(x)=\frac{1}{x^2},\ g'(x)=-\frac{k}{x^2}$이므로

$\tan\alpha=f'(2)=-\frac{1}{4},\ \tan\beta=g'(2)=-\frac{k}{4}$이다.

이때, 두 직선 $l,\ m$이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$이다.

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\times\tan\beta}$

$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{k}{4}\right)}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{k}{4}\right)}=\frac{-4+4k}{16+k}=1$

$-4+4k=16+k$

$\therefore\ 3k=20$

28. 벡터

정답 14

구 $((x-6)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=16$의 중심을 A, yz평면 위로의 정사영의 중심을 B,

원 $(y-2)^2+(z-1)^2=9$의 중심을 C라 하자.

점 P와 점 Q 사이의 거리의 최댓값은 직선 PQ가 구의 중심 A를 지나는 경우이므로

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

이때, $\overrightarrow{\mathrm{QA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 이루는 각을 α라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\,|^2=|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$

$=(\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2\bullet(\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{QA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{QA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AP}}+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{QA}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{QA}}|\bullet|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\alpha+4^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{QA}}|^2+8|\overrightarrow{\mathrm{QA}}|\cos\alpha+4^2$ …… ㉠

이때, $\overrightarrow{\mathrm{QA}}=\overrightarrow{\mathrm{QB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}$이고, $\overrightarrow{\mathrm{QB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$가 이루는 각은

0° 이므로

$\overrightarrow{QA}| = |\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{BA}|^2$

$= \overrightarrow{QB}|^2+2\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA}+|\overrightarrow{BA}|^2$

$= |\overrightarrow{QB}|^2+6^2 = |\overrightarrow{QB}|^2+6^2$ …… ㉡

이때, $\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CB}$ 이고

$\overrightarrow{QC}$ 와 $\overrightarrow{CB}$ 가 이루는 각을 β 라 하면

$|\overrightarrow{QB}|^2 = |\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CB}|^2$

$= |\overrightarrow{QC}|^2+2\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{CB}+|\overrightarrow{CB}|^2$

$= |\overrightarrow{QC}|^2+2|\overrightarrow{QC}||\overrightarrow{CB}|\cos\beta+|\overrightarrow{CB}|^2$

$\le (|\overrightarrow{QC}|+|\overrightarrow{CB}|)^2$ ($\beta=0$ 일 때)

$= (3+ \quad 2-(-1)\}^2+(1-5)^2)^2 = 8^2$

$\therefore \quad \overrightarrow{QB} \le 8$

㉠에 대입하면

$|\overrightarrow{QA}|^2 = |\overrightarrow{QB}|^2+36 \le 8^2+36 = 10^2$

$\therefore \quad \overrightarrow{QA} \le 10$

㉡에 대입하면

$|\overrightarrow{QP}|^2 = |\overrightarrow{QA}|^2+8|\overrightarrow{QA}|\cos\alpha+4^2+36$

$\le 10^2+8\times10+4^2$ ($\theta=0$ 일 때)

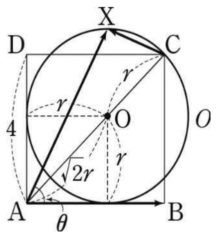
$= 14^2$

$\therefore \quad \overrightarrow{QP} \le 14$

29. 벡터

정답 80

$\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{AX}$ 가 이루는 각을 θ 라 하면



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CX}$

$= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AX}|\cos\theta$

$-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos45^\circ$

$= 4|\overrightarrow{AX}|\cos\theta-4^2$

$|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CX}|$ 가 최댓값을 가지기 위해서는

$\overrightarrow{AX}\cos\theta$ 의 값이 최댓값을 가져야 하므로 $\overrightarrow{AX}\cos\theta$ 가 원의 지름일 때이다.

위의 그림에서 원의 반지름을 r 이라 하면

$r+ \quad 2r = 4\sqrt{2},\ r = \dfrac{4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

$\therefore \quad r = 8-4\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CX}| = 4|\overrightarrow{AX}|\cos\theta^2-4^2$

$\le 4\times2r-4^2$

$= 4(16-8\sqrt{2})-16$

$= 48-32\sqrt{2}$

이므로 $a=48,\ b=32$ 이다.

$\therefore \quad a+b=80$

30. 적분법

정답 9

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

이때, $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$x<a$ 이면 $f(x)>g(x)$ 이므로 $h(x)>0$

$x=a$ 이면 $f(x)=g(x)$ 이므로 $h(x)=0$

$x>a$ 이면 $f(x)<g(x)$ 이므로 $h(x)<0$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(a)=f'(a)-g'(a)=0$ 이고

모든 양수 t 에 대하여 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{h(a+t)-h(a)}{t}<0$

$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{h(a-t)-h(a)}{-t}<0$

이고 모든 실수 x 에 대하여 함수 $h'(x)$ 는 미분가능하므로 함수 $h'(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 갖는다.

즉, $h''(a)=0$

따라서 함수 $f(x)=-xe^{2-x}$ 의 변곡점의 x 좌표는 a 이다.

$f'(x)=-e^{2-x}+xe^{2-x}=e^{2-x}(x-1)$

$f''(x)=-e^{2-x}(x-1)+e^{2-x}=e^{2-x}(-x+2)$

$f''(a)=e^{2-a}(-a+2)=0$ 에서 $a=2$

따라서

$g(x)=f'(2)(x-2)+f(2)$

$=1\times(x-2)+(-2)=x-4$

그러므로 곡선 $y=f(x)$ 와 접선 $y=g(x)$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\quad {}_0^2\{f(x)-g(x)\}dx$

$= \int_0^2 \quad -xe^{2-x}-(x-4)\}dx$

$= \int_0^2(-xe^{2-x})dx-\int_0^2(x-4)dx$

$= \quad xe^{2-x}]_0^2-\int_0^2 e^{2-x}dx-\left[\dfrac{1}{2}x^2-4x\right]_0^2$

$= 2-\left[-e^{2-x}\right]_0^2-(-6)$

$= 2-(-1+e^2)+6 = 9-e^2$

$\therefore \quad k=9$