수학 영역(A형)

1. ④	2. ①	3. ⑤	4. ①	5. ②
6. ③	7. ③	8. ④	9. ①	10. ①
11. ③	12. ④	13. ②	14. ②	15. ②
16. ⑤	17. ③	18. ④	19. ⑤	20. ⑤
21. ②	22. 52	23. 10	24. 45	25. 14
26. 33	27. 24	28. 29	29. 230	30. 13

1. 지수함수와 로그함수 정답 ④

$$\log \quad \times \log_2 9 = \log_3 \ 2^3)^{\frac{1}{2}} \times \log_2 3^2$$
$$= \ \frac{3}{2} \log_3 2 \times 2\log_2 3$$
$$= \frac{3}{2}\log_3 2 \times \ \frac{2}{\log_3 2} = 3$$

2. 행렬과 그래프 정답 ①

$$^2 - 2AB = A(A-2B)$$
$$= \ \begin{matrix}4 & 6\\ 2 & 0\end{matrix}\Bigg)\left\{\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$$
$$= \begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 0\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 6\\ 2 & -2\end{pmatrix}\right\}$$
$$= \begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$
$$= 2\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 12\\ 4 & 0\end{pmatrix}$$

구하는 행렬 $A^2 - 2AB$의 모든 성분의 합은
$8 + 12 + 4 + 0 = 24$

3. 다항함수의 적분법 정답 ⑤

$$ {}_{-2}^{\ 2} (x + |x| + 2)dx$$
$$= 2\int_0^2 (|x| + 2)dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^2$$
$$= 2\times \ \frac{1}{2}\times 2^2 + 2\times 2\Big) = 12$$

4. 다항함수의 미분법 정답 ①

두 함수 $f(x) = -x^2 + 4,\ g(x) = 2x^2 + ax + b$라 하자.
함수 $g(x) = 2x^2 + ax + b$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$을 지나므로 $0 = 2\times 2^2 + a\times 2 + b$

$0 = 8 + 2a + b$ ……㉠

$y = f(x)$와 $y = g(x)$가 점 A에서 공통인 접선을 가지므로 $f'(2) = g'(2)$이다.

$f'(x) = -2x,\ g'(x) = 4x + a$이므로

$-4 = 8 + a \quad \therefore\ a = -12$

㉠에 $a = -12$를 대입하면 $b = 16$

$\therefore\ a + b = (-12) + 16 = 4$

5. 함수의 극한과 연속 정답 ②

$\displaystyle\lim_{x\to -1-0} f(f(x))$에서 $f(x) = t$로 놓으면 $x \to -1-0$일 때, $t \to +0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to -1-0} f(f(x)) = \lim_{t\to +0} f(t) = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to +0} f(f(x))$에서 $f(x) = s$로 놓으면 $x \to +0$일 때, $s \to 1-0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to +0} f(f(x)) = \lim_{s\to 1-0} f(s) = -2$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to -1-0} f(f(x)) + \lim_{x\to +0} f(f(x)) = 1 + (-2) = -1$

6. 다항함수의 미분법 정답 ③

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+1}{x-2} = 3$에서 $f(2) = -1$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-(-1)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 3$$

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{x-2} = 1$에서 $g(2) = 3$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) = 1$$

이때, $h(x) = f(x)g(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2} = h'(2)$$

$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$이므로

$$h'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$$
$$= 3\times 3 + (-1)\times 1 = 8$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2} = 8$$

7. 확률 정답 ③

세 공장 , B, C에서 생산된 제품 중 임의로 선택한 한 개의 제품이 불량품일 사건을 X, 그 제품이 C공장에서 생산된 제품일 사건을 Y라 하면 확률은 $\mathrm{P}\ \ Y|X)$이다.

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}$$

$$=\frac{\frac{50}{100}\times\frac{a}{100}}{\frac{30}{100}\times\frac{2}{100}+\frac{20}{100}\times\frac{4}{100}+\frac{50}{100}\times\frac{a}{100}}$$

$$=\frac{50a}{140+50a}=\frac{15}{29}$$

$145a=210+75a,\ 70a=210$

$\therefore\ a=3$

8. 지수함수와 로그함수 정답 ④

$$\log x=3+\log 1.2-\log d$$

$$=\log\frac{1.2\times 10}{d}$$

이때, $x=\dfrac{1.2\times 10^3}{d}\geq 3000,\ d\leq\dfrac{1.2\times 10^3}{3000}=0.4$

따라서 시정거리가 $3000(\mathrm{m})$ 이상이 되기 위한 먼지농도의 최댓값 $d_1=0.4$이다.

9. 다항함수의 적분법 정답 ①

$$a_n=\ \ {}_0^1\, x^n(x-1)dx$$

$$=\int_0^1(x^{n+1}-x^n)dx$$

$$=\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}-\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\ \ {}_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}\ \ \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{11}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$$

$$=-\frac{5}{12}$$

10. 수열 정답 ①

(가)에서 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 등비수열을 이루므로

$b=ar,\ c=ar^2\ \ (r\neq 0$인 실수)

(나)에서 $ab=c$이므로

$a\times ar=ar^2,\ a^2r-ar^2=0$

$ar(a-r)=0$

a와 r은 0이 아닌 실수이므로 $a=r$

따라서 $b=a^2,\ c=a^3$이다.

(다)에서 $a+3b+c=a+3a^2+a^3=-3$

$a^3+3a^2+a+3=0,\ (a+3)(a^2+1)=0$

이므로 $a=-3$

$\therefore\ a+b+c=a+a^2+a^3$

$\qquad=(-3)+(-3)^2+(-3)^3=-21$

11. 다항함수의 미분법 정답 ③

$f(x)=x^2$이라 놓으면 $f'(x)=2x$이므로

점 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 접선의 기울기는 $2n$이다. 또, 원 C_n의 중심과 점 P_n을 지나는 직선은 점 P_n에서의 접선과 수직이다. 따라서 점 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$을 지나고 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2n}(x-n)+n^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원 C_n의 중심은 ㉠의 x절편이므로

$$0=-\frac{1}{2n}(x-n)+n^2$$

$$\frac{1}{2n}(x-n)=n^2,\ x=2n^3+n$$

따라서 원 C_n의 중심의 좌표는 $(2n^3+n,\ 0)$이므로

원 C_1의 중심의 x좌표는 3이다.

12. 수열의 극한 정답 ④

원 C_n의 중심의 좌표가 $(2n^3+n,\ 0)$, 점 P_n의 좌표가 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$이므로 반지름의 길이를 r라 하면

$$r=\ \ (2n^3+n-n)^2+(0-n^2)^2=\sqrt{4n^6+n^4}$$

이므로

$$S(n)=\pi(\sqrt{4n^6+n^4})^2$$

$$=(4n^6+n^4)\pi$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^6}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^6+n^4)\pi}{n^6}=4\pi$$

13. 행렬과 그래프 정답 ②

(i) 행렬 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하는 경우

즉, $(a-1)-1 \neq 0$, $a \neq 2$일 때 집합 의 원소의 개수는 1이다. 이때 $A \cap B \neq \phi$, $A \cap C \neq \phi$을 만족시키려면 집합 A의 원소는 집합 $B \cap C$의 원소이어야 한다. 그런데 $y = x \;\; + x + 1$과 $y = x - 1$을 동시에 만족시키는 실수해는 존재하지 않으므로 성립하지 않는다.

(ii) 행렬 $\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는 경우

즉, $(a-1)-1 = 0$, $a = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$에서 $b = 0$일 때

집합 $A \neq \phi$이다.

(i), (ii)에서 $a = 2$, $b = 0$

$\therefore\ a + b = 2$

14. 통계 정답 ②

주사위 1개를 던질 때 3의 배수가 나올 확률이 $\frac{1}{3}$ 이므로 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(Y) = 72 \times \frac{1}{3} = 24$, $\mathrm{V}(Y) = 72 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 16$

이때, $n = 72$는 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(24,\ 4^2\right)$를 따른다.

이때, $X = 3Y + (-2) \times (72 - Y) = 5Y - 144$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \geq 11) &= \mathrm{P}(5Y - 144 \geq 11) \\ &= \mathrm{P}(Y \geq 31) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{31-24}{4}\right) \\ &= \mathrm{P}(Z \geq 1.75) \\ &= 0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.75) \\ &= 0.5 - 0.4599 = 0.0401\end{aligned}$$

15. 함수의 극한과 연속 정답 ②

$f(1) = 0$, $g(1) = 2$이고,

$\lim_{x\to1} f(x) = 2$, $\lim_{x\to1} g(x) = 0$이므로

ㄱ. (참) $f(1) + g(1) = 0 + 2 = 2$

$\lim_{x\to1}\{f(x) + g(x)\} = 2 + 0 = 2$

$\therefore\ \lim_{x\to1}\{f(x) + g(x)\} = f(1) + g(1)$

따라서 함수 $f(x) + g(x)$는 $x = 1$에서 연속

ㄴ. (참) $f(1)g(1) = 0 \times 2 = 0$

$\lim_{x\to1}\{f(x)g(x)\} = 2 \times 0 = 0$

$\therefore\ \lim_{x\to1}\{f(x)g(x)\} = f(1) \times g(1)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x = 1$에서 연속

ㄷ. (거짓) 함수 $\frac{f(x)+ax}{g(x)+bx}$가 $x = 1$에서 연속이면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+ax}{g(x)+bx} = \frac{f(1)+a}{g(1)+b}$

$\frac{2+a}{0+b} = \frac{0+a}{2+b}$

$(2+a)(2+b) = ab$

$\therefore\ a + b = -2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

16. 행렬과 그래프 정답 ⑤

ㄱ. (참) $B = A - E$이므로

$A^2 - A = A(A - E) = AB = O$

ㄴ. (참) 명제 '$A \neq E$이면 A의 역행렬을 존재하지 않는다.'의 대우 명제인 'A의 역행렬이 존재하면 $A = E$이다'는 A^{-1}을 $A^2 - A = O$의 양변에 곱하면 $A - E = O$, $A = E$이므로 참이다. 대우 명제가 참이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄷ. (참) $B = A - E$이므로 $A + B = 2A - E$

$A^2 - A = (2A - E)\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}E\right) - \frac{1}{4}E = O$

$(2A - E)\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}E\right) = \frac{1}{4}E$

$(2A - E)(2A - E) = E$

$\therefore\ (2A - E)^{-1} = 2A - E$

이때, $A + B = 2A - E$이므로 행렬$A + B$의 역행렬이 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17. 수열 정답 ③

첫째항이 -8인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_{n+1} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k} = 2^{n+1}(n^2 + n + 2)\ (n \geq 1)$ ……㉠

주어진 식에 의하여

$a_n - 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k} = 2^n(n^2 - n + 2)\ (n \geq 2)$ ……㉡

이다. ㉠−㉡을 하면, 2 이상의 자연수 n에 대하여

$_{+1} - a_n - \frac{2}{n} a_n = \boxed{2^n(n+1)(n+2)}$

이므로

$a_{n+1} - \frac{n+2}{n} a_n = 2^n(n+1)(n+2)$

이다. 양변을 $(n+1)(n+2)$로 나누면

$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} - \frac{a_n}{n(n+1)} = 2^n$

이다. $b_n = \frac{a_n}{n(n+1)}$이라 하면

$b_{n+1} - b_n = \boxed{2^n}$ $(n \geq 2)$

이고, $b_2 = 0$이므로

$b_n = b_2 + \sum_{k=2}^{n-2} 2^k$

$= \frac{2^2(2^{n-2}-1)}{2-1} = 2^n - 4$

$\therefore\ b_n = \boxed{2^n - 4}$ $(n \geq 2)$

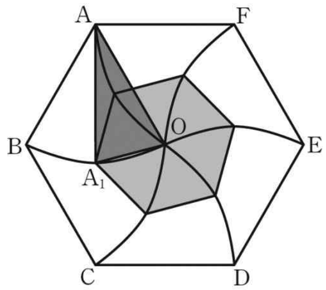
$\therefore\ f(n) = 2^n(n+1)(n+2),\ g(n) = 2^n,$

$h(n) = 2^n - 4$

$\therefore\ \frac{f(4)}{g(5)} + h(6) = \frac{480}{32} + 60 = 75$

18. 수열의 극한

정답 ④



$\triangle AA_1O$에서 $OA = AA_1 = 1,\ \angle OAA_1 = 30°$이므로 코사인법칙에 의해

$\overline{OA_1}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\times1\times1\times\cos30°$

$= 2 - \quad 3$

따라서 $_1 = \frac{1}{2}\times(\quad 2-\sqrt{3}\ )^2\times\sin60°\times6$

$= \frac{3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$

두 정육각형 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$,

$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}E_{n+1}F_{n+1}$의 넓이를 각각 S_n, S_{n+1}이라 하면

$r_n : r_{n+1} = 1 : \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $S_n : S_{n+1} = 1 : 2-\sqrt{3}$

따라서 수열 $S_n\}$은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$이고,

공비가 $2-\sqrt{3}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}}{1-(2-\sqrt{3})} = \frac{9-3\sqrt{3}}{4}$

19. 다항함수의 미분법

정답 ⑤

두 곡선 $y = x^3$과 $y = -x^3 + 2x$의 교점을 구하면

$x^3 = -x^3 + 2x,\ 2x(x+1)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

따라서 $A(1,\ 1)$이다.

이때, $B(k,\ k^3),\ C(k,\ -k^3+2k)$에서

$BC = (-k^3+2k) - k^3 = -2k^3 + 2k$이므로

$ACOB = \triangle ACB + \triangle COB$

$= \frac{1}{2}\times(-2k^3+2k)\times(1-k)$

$+ \frac{1}{2}\times(-2k^3+2k)\times k$

$= -k^3 + k$

$f(k) = -k^3 + k\ \ (0 < k < 1)$라 하면

$f'(k) = -3k^2 + 1 = 0$에서 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(k)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(k) = -k^2 + k\ \ (0 < k < 1)$는

$k = \frac{\sqrt{3}}{3}$에서 극대이면서 최대이다.

20. 수열

정답 ⑤

$\sum_{k=1}^{10} f(2^k)$에서 2^k은 정수이므로 $f(2^k) = 2^k$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} f(2^k) = \sum_{k=1}^{10} 2^k$

$= \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2^{11} - 2$ ……㉠

정수 n에 대하여 $2^n \leq k < 2^{n+1}$일 때,

$n \leq \log_2 k < n+1$이므로 $f(\log_2 k) = n$

이때, k의 개수는 $2^{n+1} - 2^n = 2^n$이므로

$$\sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k) = \sum_{n=1}^{9}(n\times 2^n)+10$$

$$= (1\times 2)+(2\times 2^2)+\cdots+(9\times 2^9)+10$$

$= (1\times 2)+(2\times 2^2)+\cdots+(9\times 2^9)$ ……㉡

$2S = (1\times 2^2)+\cdots+(8\times 2^9)+(9\times 2^{10})$ ……㉢

라 할 때, ㉡－㉢을 하면

$-S = (1\times 2)+2^2+2^3+\cdots+2^9-(9\times 2^{10})$

$$= \frac{2(2^9-1)}{2-1} - 9\times 2^{10} = (-8)\times 2^{10}-2$$

$\therefore\ S = 2^{13}+2$

따라서 $\sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k) = 2^{13}+2+10$

$= 2^{13}+12$ ……㉣

㉠, ㉣에 의해

$$\sum_{k=1}^{10} f(2^k) + \sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k) = (2^{11}-2)+(2^{13}+12)$$

$$= (5\times 2^{11})+10$$

$$= 10250$$

21. 수열의 극한

정답 ②

$A\cup B\cup C = S(n)$, $A\cap B = \phi$을 만족하도록 벤다이어그램을 그려보면 원소가 존재할 수 있는 영역이 5군데이므로 세 집합 A, B, C를 정하는 방법의 수 $a_n = 5^n$이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

22. 행렬과 그래프

정답 52

꼭짓점의 개수가 10개이므로 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬 A의 성분들의 총 개수는 $10\times 10 = 100$(개)이다. 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타낸 행렬의 모든 성분의 합은 그래프의 변의 개수의 2배와 같으므로 행렬 A의 성분 중에 1의 개수는 $12\times 2 = 24$이다.

$\therefore\ a = 24,\ b = 100-24 = 76$

$\therefore\ b-a = 76-24 = 52$

23. 지수함수와 로그함수

정답 10

$\log_2(3x^2+7x) = 1+\log_2(x+1)$

$\log_2(3x^2+7x) = \log_2 2(x+1)$

$3x^2+7x = 2(x+1),\ 3x^2+5x-2 = 0$

$(3x-1)(x+2) = 0$

$\therefore\ x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = -2$

진수조건에서 $3x^2+7x > 0,\ x+1 > 0$ 이므로

$x(3x+7) > 0,\ x < -\frac{7}{3}$ 또는 $x > 0$이고,

$x > -1 \quad \therefore\ x = \frac{1}{3}$

$\therefore\ p = 3,\ q = 1$

$\therefore\ p^2+q^2 = 3^2+1^2 = 10$

24. 확률

정답 45

방정식 $x+3y+3z = 32$에서 $x = 3t-1$(t는 자연수)로 놓으면 $(3t-1)+3y+3z = 32,\ 3t+3y+3z = 33$

$\therefore\ t+y+z = 11$

음이 아닌 정수 a, b, c에 대하여

$t = 1+a,\ y = 1+b,\ z = 1+c$라 하면,

$(1+a)+(1+b)+(1+c) = 11,\ a+b+c = 8$

따라서 방정식 $x+3y+3z = 32$의 자연수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 방정식 $a+b+c = 8$의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같고, 이는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45$$

25. 다항함수의 적분법

정답 14

$f(x) = x^3+2x^2-3x+4$에서

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{2}(x^3+2x^2-3x+4)dx$$

$$= 2\int_{0}^{2}(2x^2+4)dx$$

$$= 2\left[\frac{2}{3}x^3+4x\right]_0^2 = 2\left(\frac{16}{3}+8\right) = \frac{80}{3}$$

$\therefore\ f(-a)+f(a)$

$= (-a)^3+2(-a)^2-3(-a)+4+a^3+2a^2-3a+4$

$= \frac{80}{3}$

$4a^2+8 = \frac{80}{3},\ 4a^2 = \frac{56}{3},\ a^2 = \frac{14}{3}$

$\therefore\ 3a^2 = 14$

26. 함수의 극한과 연속 　정답 33

$(x)=3x\quad+2x+1$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\quad f\left(1+\frac{1}{2n}\right)+f\left(1+\frac{2}{2n}\right)+\cdots+f\left(1+\frac{n}{2n}\right)\Big\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}{}_{k=1}^{\;n}\,f\left(1+\frac{k}{2n}\right)\times\frac{4}{n}=\lim_{n\to\infty}8\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{2n}\right)\times\frac{1}{2n}$$

$$=8\quad{}_{1}^{\frac{3}{2}}f(x)dx=8\int_{1}^{\frac{3}{2}}\;3x^2+2x+1)dx$$

$$=8\left[x^3+x^2+x\right]_{1}^{\frac{3}{2}}=8\;\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}-3\Big\}$$

$$=8\times\frac{33}{8}=33$$

27. 통계 　정답 24

7개의 동전 중 3개는 앞면, 4개는 뒷면일 때, 앞면 3개 중 a개를 뒤면 4개 중 b개를 뒤집어 놓았다고 하면 a, b의 값에 따른 확률변수 　에 대한 확률을 나타내면 다음 표와 같다.

a	b	x	$\mathrm{P}(X=x)$
0	3	6	$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{4}{35}$
1	2	4	$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{18}{35}$
2	1	2	$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{12}{35}$
3	0	0	$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{35}$

이때, $\mathrm{E}(X)=6\times\dfrac{4}{35}+4\times\dfrac{18}{35}+2\times\dfrac{12}{35}+0\times\dfrac{1}{35}$

$$=\frac{24}{7}$$

$$\therefore\;\mathrm{E}(7X)=7\mathrm{E}(X)=7\times\frac{24}{7}=24$$

28. 다항함수의 적분법 　정답 29

(가)와 (나)에서

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{8}{3}$$

(나)와 (다)에서 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭이고 주기가 2인 함수이므로

$$\int_{-n}^{n}f(x)dx=n\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{8}{3}n$$

따라서 수열 　$a_n\}$에 대하여

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\int_{-n}^{n}f(x)dx=\frac{8}{3}n$$

위의 식에 $n=6$과 $n=7$을 각각 대입하면

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+6a_6=\frac{48}{3}=16 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+6a_6+7a_7=\frac{56}{3} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡−㉠을 하면

$$7a_7=\frac{8}{3}$$

$$\therefore\;a_7=\frac{8}{21}$$

$$\therefore\;p=21,\;q=8,\;p+q=29$$

29. 수열 　정답 230

첫째항이 20이고, 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$은

$$a_n=20+(n-1)\times(-3)$$
$$=-3n+23\,(n=1,\;2,\;3,\;\cdots)$$

수열 $\{b_n\}$은 $b_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n$ $(n=1,\;2,\;3,\;\cdots)$이므로

$$a_n-a_{n+1}=(-3n+23)-\;\;-3(n+1)+23\}$$
$$=3$$

(i) $n=2k$

$$b_{2k}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+\;\;(-1)^{2k}a_{2k-1}+(-1)^{2k+1}a_{2k}\}$$
$$=3k$$
$$\therefore\;b_{2k}=3k$$

(ii) $n=2k-1$

$$b_{2k-1}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(-1)^{2k}a_{2k-1}$$
$$=3(k-1)+a_{2k-1}$$
$$=3k-3+\{(-3)\times(2k-1)+23\}$$
$$=-3k+23$$
$$\therefore\;b_{2k-1}=-3k+23$$

(i), (ii)에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}b_k=\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k-1})$

$$=\sum_{k=1}^{10}\{3k+(-3k+23)\}$$
$$=23\times10=230$$

30. 지수함수와 로그함수 정답 13

$\log \quad = x + y$ ($x \geq 0$인 정수, $0 \leq y < 1$)

라 하면 P $(f(n),\ g(n)) = (x,\ y)$

연립부등식 $\begin{cases} y \geq \dfrac{1}{3}x \\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

에서 $x \leq 3y \leq \dfrac{3}{2}$

x는 0 이상인 정수이므로

(i) $x = 0$일 때,

$0 \leq 3y \leq \dfrac{3}{2}$, $0 \leq y \leq \dfrac{1}{2}$

따라서 $\log n = 0 + y$이므로

$0 \leq \log n \leq \dfrac{1}{2}$

$\log 1 \leq \log n < \log 3.2$

$\therefore\ 1 \leq n < 3.2$

그러므로 n은 1, 2, 3인 3개이다.

(ii) $x = 1$일 때,

$1 \leq 3y \leq \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{3} \leq y \leq \dfrac{1}{2}$

따라서 $\log n = 1 + y$이므로

$\dfrac{1}{3} \leq \log n - 1 \leq \dfrac{1}{2}$

$\log 2.1 < \log n - 1 < \log 3.2$

$1 + \log 2.1 < \log n < 1 + \log 3.2$

$\log 21 < \log n < \log 32$

$\therefore\ 21 < n < 32$

그러므로 n은 22, $\cdots$, 31인 10개이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n의 개수는 13개이다.