수학 영역(B형)

1. ②	2. ①	3. ③	4. ①	5. ③
6. ②	7. ⑤	8. ④	9. ②	10. ④
11. ②	12. ⑤	13. ④	14. ②	15. ③
16. ③	17. ④	18. ③	19. ④	20. ⑤
21. ①	22. 150	23. 58	24. 24	25. 192
26. 182	27. 36	28. 27	29. 259	30. 13

1. 지수함수와 로그함수 정답 ②

$\log \quad 4 \quad 2-\sqrt{10}\,)-\log_2(4-\sqrt{5})$

$=\log_2 \dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4-\sqrt{5}}$

$=\log_2 \dfrac{\sqrt{2}(4-\sqrt{5})}{4-\sqrt{5}}$

$=\log_2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$

2. 함수의 극한과 연속 정답 ①

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

3. 벡터 정답 ③

$|3\vec{a}-2\vec{b}|=6$의 양변을 제곱하면

$9|\vec{a}|^2-12\,\vec{a}\cdot\vec{b})+4|\vec{b}|^2=36$

$9\times2^2-12(\vec{a}\cdot\vec{b})+4\times3^2=36$

$12(\vec{a}\cdot\vec{b})=36$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=3$

4. 순열과 조합 정답 ①

(ⅰ) 천의 자리가 9인 경우

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리가 모두 0이므로 1가지이다.

(ⅱ) 천의 자리가 8인 경우

십의 자리와 일의 자리를 순서쌍으로 나타내면 백의 자리가 1인 경우는 (0, 0)

백의 자리가 0인 경우는 (1, 0), (0, 1)이므로

$1+2=3$인 3가지이다.

(ⅲ) 천의 자리가 7인 경우

백의 자리가 2인 경우 (0, 0)

백의 자리가 1인 경우 (1, 0), (0, 1)

백의 자리가 0인 경우 (2, 0), (1, 1), (0, 2)

이므로 $1+2+3=6$인 6가지이다.

이와 같은 방법으로 천의 자리가 1인 경우까지 모든 경우의 수를 구하면

$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+9)$

$=\sum_{n=1}^{9}\sum_{k=1}^{n}k\Big)$

$=\sum_{n=1}^{9}\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{9}n^2+n)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9\times10\times19}{6}+\dfrac{9\times10}{2}\right)=165$

5. 통계 정답 ③

주머니에서 꺼낸 3개의 공에 적힌 수들 중 두 수의 합이 나머지 한 수와 같은 경우는

(1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (2, 3, 5)인

4가지이므로

확률은 $\dfrac{4}{{}_5C_3}=\dfrac{2}{5}$

따라서 확률변수 는 이항분포 $B\left(25,\ \dfrac{2}{5}\right)$를 따른다.

$E(X)=25\times\dfrac{2}{5}=10,\ V(X)=25\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=6$

이때, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=\ V(X)+\{E(X)\}^2$

$=6+10^2=106$

6. 삼각함수 정답 ②

$\sin \quad \sin\beta = \quad \frac{3+1}{4}$, $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ 이므로

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \alpha-\beta = -\frac{\pi}{6} \quad \because\ 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\Big)$ ……㉠

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4} = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha+\beta = \frac{2}{3}\pi$ ……㉡

㉠과 ㉡을 연립하면, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{5}{12}\pi$

$\therefore\ \cos(3\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{12}\pi\right)$

$= \cos\frac{7}{6}\pi = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 적분법 정답 ⑤

$a = \quad {}_0^n f(x)dx = \int_0^n \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^n = \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ a_3 = 2\sqrt{3}$

$b_n = \int_{n-1}^n g(x)\,dx = \int_{n-1}^n f(x)+1\}dx$

$= \int_{n-1}^n (\sqrt{x}+1)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\right]_{n-1}^n$

$= \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(n-1)^{\frac{3}{2}} + 1$

$\therefore\ b_4 = \frac{19}{3} - 2\sqrt{3}$

$\therefore\ a_3 + b_4 = 2\sqrt{3} + \left(\frac{19}{3} - 2\sqrt{3}\right) = \frac{19}{3}$

8. 적분법 정답 ④

$'(x) = g(x)$라 하면,

$b_n = G(n) - G(n-1) = 2n+3$이다.

이때, $G(n+1) - G(n) = 2n+5$이므로

$G(n) = G(1) + \quad {}_{k=1}^{n-1}(2k+5)$

$= G(1) + 2\times\frac{n(n-1)}{2} + 5(n-1)$

$= G(1) + n^2 + 4n - 5 \ (n \geq 2)$

$\therefore\ a_{10} = \int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{10} g(x)dx$

$= G(10) - G(0)$

$= \quad G(1) + 10^2 + 4\times10 - 5\} - G(0)$

$= G(1) - G(0) + 135$

$= 5 + 135 = 140$

9. 미분법 정답 ②

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1} = \frac{1}{2}$에서 $f(1) = 2$, $f'(1) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2} = 4$에서 $f(2) = 3$, $f'(2) = 4$

함수 $f(x)$의 역함수는 $g(x)$이므로

$g(2) = 1$, $g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = 2$,

$g(3) = 2$, $g'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4}$

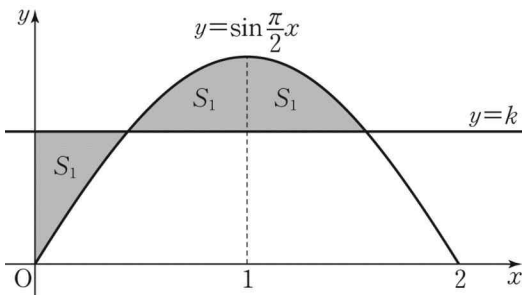
$\therefore\ \lim_{x\to3}\frac{g(g(x))-1}{x-3}$

$= \lim_{x\to3}\left\{\frac{g(g(x))-g(g(3))}{g(x)-g(3)} \times \frac{g(x)-g(3)}{x-3}\right\}$

$= g'(g(3))\times g'(3) = g'(2)\times g'(3) = 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

10. 적분법 정답 ④

넓이 S_2는 사인함수의 대칭성에 의해 $x=1$을 기준으로 반으로 나뉘므로 색칠한 부분의 넓이는 각각 아래 그림과 같다.



따라서 $\int_0^1\left(k - \sin\frac{\pi}{2}x\right)dx = 0$이다.

$\int_0^1\left(k - \sin\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$= \left[kx + \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1 = k - \frac{2}{\pi} = 0, \qquad \therefore\ k = \frac{2}{\pi}$

11. 통계

정답 ②

주사위 개를 던질 때 3의 배수가 나올 확률이 $\frac{1}{3}$ 이므로 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 라 하면 Y는 이항분포 B 72, $\frac{1}{3}\Big)$을 따른다.

$\mathrm{E}(Y)=72\times\frac{1}{3}=24,\ \mathrm{V}(Y)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$

이때, $n=72$는 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 N 24, 4)를 따른다.

이때, $X=3Y+(-2)\times(72-Y)=5Y-144$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 11)&=\mathrm{P}(5Y-144\geq 11)\\&=\mathrm{P}(Y\geq 31)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{31-24}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 1.75)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.75)\\&=0.5-0.4599=0.0401\end{aligned}$$

12. 행렬과 그래프

정답 ⑤

ㄱ. (참) $B=A-E$이므로

$A^2-A=A(A-E)=AB=O$

ㄴ. (참) 명제 '$A\neq E$이면 A의 역행렬을 존재하지 않는다.'의 대우 명제인 'A의 역행렬이 존재하면 $A=E$이다'는 A^{-1}을 $A^2-A=O$의 양변에 곱하면

$A-E=O,\ A=E$이므로 참이다. 대우 명제가 참이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄷ. (참) $B=A-E$이므로 $A+B=2A-E$

$A^2-A=(2A-E)\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}E\right)-\frac{1}{4}E=O$

$(2A-E)\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}E\right)=\frac{1}{4}E$

$(2A-E)(2A-E)=E$

$\therefore\ (2A-E)^{-1}=2A-E$

이때, $A+B=2A-E$이므로 행렬$A+B$의 역행렬이 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13. 적분법

정답 ④

$x^2+(y-1)^2=1$에서 $(y-1)^2=1-x^2$

$y\geq 1$이므로 $y-1=\quad 1-x^2$

$\therefore\ y=1+\sqrt{1-x^2}$

구하는 회전체의 부피를 V라 하면

$$\begin{aligned}V&=\pi\quad{}_{-1}^{1}y^2dx=\pi\int_{-1}^{1}(1+\sqrt{1-x^2})^2dx\\&=\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2+2\sqrt{1-x^2})dx\\&=\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)dx+2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=2\pi\left[2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+2\pi\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=\frac{10}{3}\pi+2\pi\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,dx\qquad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

이때, 에서 $2\pi\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,dx$에서 $x=\sin t$로 놓으면

$dx=\cos t\,dt$

$$\begin{aligned}2\pi\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,dx&=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt\\&=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt\\&=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt\\&=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt\\&=\pi\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi^2\end{aligned}$$

따라서 ㉠에서

$V=\frac{10}{3}\pi+2\pi\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{10}{3}\pi+\pi^2$

14. 미분법

정답 ②

$f(x)=e^x(x^2+ax+b)$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=e^x(x^2+ax+b)+e^x(2x+a)\\&=e^x\ \ x^2+(a+2)x+a+b\}\end{aligned}$$

$g(x)=e^{-x}(x^2+ax+b)$에서

$$\begin{aligned}g'(x)&=-e^{-x}(x^2+ax+b)+e^{-x}(2x+a)\\&=e^{-x}\{-x^2+(2-a)x+a-b\}\end{aligned}$$

두 함수 $f(x),\ g(x)$가 각각 $x=-3,\ x=2$에서 극댓값을 가지므로 $f'(-3)=0,\ g'(2)=0$이다.

$$\begin{aligned}f'(-3)&=e^{-3}\{(-3)^2+(-3)(a+2)+a+b\}\\&=e^{-3}(3-2a+b)=0\end{aligned}$$

$\therefore\ 3-2a+b=0\qquad\cdots\cdots㉠$

$'(2) = e^{\ \ 2} - 2^2 + 2(2-a) + a - b\}$

$= e^{-2}(-a-b) = 0$

$\therefore\ -a-b=0$ ……㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $a=1,\ b=-1$

따라서 $f(x) = e^x(x^2+x-1)$

$f'(x) = e^x x(x+3) = 0$에서 $x=0$ 또는 $x=-3$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$5e^{-3}$	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=-1=m_1$을 가진다.

$g(x) = e^{-x}(x^2+x-1)$

$g'(x) = -e^{-x}(x-2)(x+1) = 0$에서

$x=2$ 또는 $x=-1$ $g(x)$의 증가와 감소를 표로 타나내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	$-e$	↗	0	↘

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극솟값

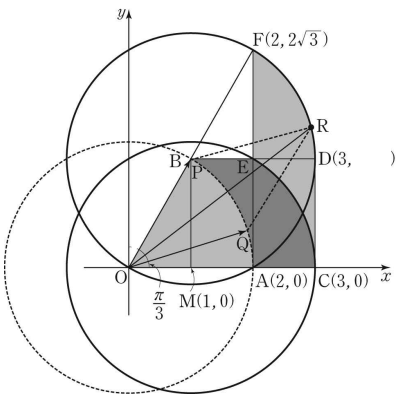
$g(-1) = -e = m_2$을 가진다.

$\therefore\ m_1 + m_2 = -1-e$

15. 벡터

정답 ③

부채꼴 OAB를 점 O를 원점, 선분 OA를 x축의 양의 방향으로 하여 좌표평면 위에 놓으면 아래 그림과 같다.



점 P가 선분 OM 위를 점 O에서 x축의 양의 방향으로 움직이면 점 R은 부채꼴 OAB의 호 AB를 x축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동하여 만들어지는 영역 위를 움직이므로 위 그림에서 점 R가 나타내는 영역은 AC, BE, $\widehat{AB}$, $\widehat{CE}$로 둘러싸인 영역이다.

또한, 점 P가 선분 BM 위를 점 M에서 y축의 양의 방향으로 움직일 때, 점 R는 부채꼴 MCE의 호 CE를 y축의 양의 방향으로 3만큼 평행이동하여 만들어지는 영역 위를 움직이므로 위 그림에서 점 R가 나타내는 영역은 $\overline{CD}$, EF, $\widehat{CE}$, $\widehat{DF}$로 둘러싸인 영역이다. 이때,

MA, MB, $\widehat{AB}$로 둘러싸인 영역의 넓이와

$\overline{ED}$, $\overline{EF}$, $\widehat{DF}$로 둘러싸인 영역의 넓이가 같으므로 구하는 넓이를 라 하면 S는 사각형 MCDB의 넓이와 같다.

$\therefore\ S = 2\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$과 같다.

16. 수열

정답 ③

첫째항이 -8인 수열 $a_n\}$에 대하여

$a_{n+1} - 2\ {}^{n}_{k=1}\ {}^{a_k}_{k} = 2^{n+1}(n^2+n+2)\ (n \ge 1)$ ……㉠

주어진 식에 의하여

$a_n - 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k} = 2^n(n^2-n+2)\ (n \ge 2)$ ……㉡

이다. ㉠−㉡을 하면, 2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} - a_n - \frac{2}{n}a_n = \boxed{2^n(n+1)(n+2)}$

이므로

$a_{n+1} - \frac{n+2}{n}a_n = 2^n(n+1)(n+2)$

이다. 양변을 $(n+1)(n+2)$로 나누면

$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} - \frac{a_n}{n(n+1)} = 2^n$

이다. $b_n = \frac{a_n}{n(n+1)}$이라 하면

$b_{n+1} - b_n = \boxed{2^n}\ (n \ge 2)$

이고, $b_2 = 0$이므로

$b_n = b_2 + \sum_{k=2}^{n-2} 2^k$

$= \frac{2^2(2^{n-2}-1)}{2-1} = 2^n - 4$

$\therefore\ b_n = \boxed{2^n - 4}\ (n \ge 2)$

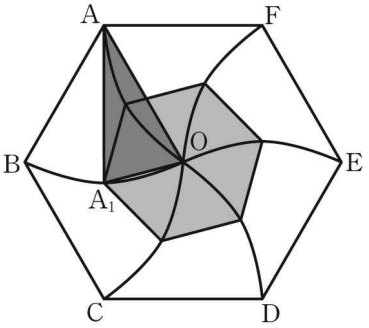
$\therefore\ f(n) = 2^n(n+1)(n+2),\ g(n) = 2^n,$

$h(n) = 2^n - 4$

$\therefore\ \frac{f(4)}{g(5)} + h(6) = \frac{480}{32} + 60 = 75$

17. 수열의 극한

정답 ④



$\triangle AA\ O$에서 $OA\quad AA_1 = 1$, $\angle OAA_1 = 30°$이므로 코사인법칙에 의해

$\overline{OA_1}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\times1\times1\times\cos30°$

$\quad = 2 - \quad 3$

따라서 $\quad_1 = \frac{1}{2}\times(\quad 2-\sqrt{3})^2\times\sin60°\times6$

$\quad = \frac{3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$

두 정육각형 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}E_{n+1}F_{n+1}$의 넓이를 각각 S_n, S_{n+1}이라 하면

$r_n : r_{n+1} = 1 : \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $S_n : S_{n+1} = 1 : 2-\sqrt{3}$

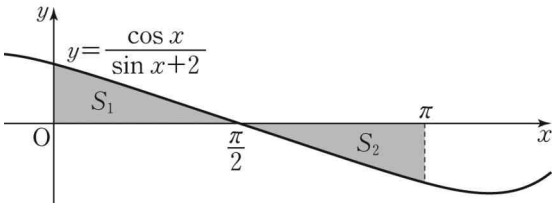
따라서 수열 $\quad S_n\}$은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$이고, 공비가 $2-\sqrt{3}$인 등비수열이다.

$$\therefore \quad {}_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}}{1-(2-\sqrt{3})} = \frac{9-3\sqrt{3}}{4}$$

18. 적분법

정답 ③

$0 \le x \le \pi$에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 2}$는 $\sin x + 2 > 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



$\sin x + 2 = t$로 놓으면 $\cos x\,dx = dt$이고, $x = 0$일 때 $t = 2$, $x = \frac{\pi}{2}$일 때 $t = 3$, $x = \pi$일 때 $t = 2$이므로

$$S_1 = {}_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + 2}dx = \int_2^3 \frac{1}{t}dt = [\ln t]_2^3$$

$$= \ln3 - \ln2 = \ln\frac{3}{2}$$

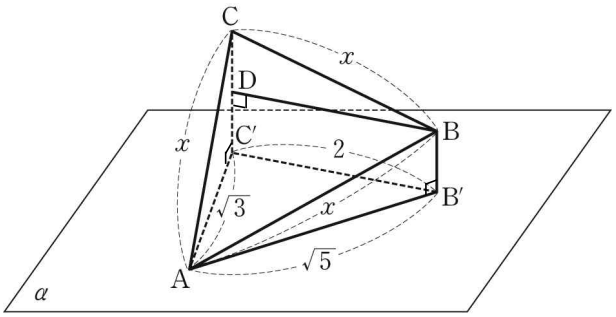
$$S_2 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{\sin x + 2}dx = -\int_3^2 \frac{1}{t}dt = \int_2^3 \frac{1}{t}dt$$

$$= [\ln t]_2^3 = \ln3 - \ln2 = \ln\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ S_1 + S_2 = \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{3}{2} = 2\ln\frac{3}{2}$$

19. 공간도형과 공간좌표

정답 ④



위의 그림과 같이 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 x라 하면, 피타고라스의 정리에 의해

$BB' = \quad x^2 - 5$, $\overline{CC'} = \sqrt{x^2-3}$

이때 점 B에서 선분 CC′에 내린 수선의 발을 D라 하면 $B'C' = BD = 2$이므로 $\overline{CD} = \sqrt{x^2-4}$이다.

$\overline{CC'} = \overline{CD} + DC' = \overline{CD} + \overline{BB'}$이므로

$\sqrt{x^2-3} = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2-5}$

위 식의 양변을 제곱하면

$x^2 - 3 = x^2 - 4 + 2\sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2-5} + x^2 - 5$

$6 - x^2 = 2\sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2-5}$

$6 - x^2)^2 = (2\sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2-5})^2$

$3x^4 - 24x^2 + 44 = 0$

$\therefore\ x^2 = \frac{12+2\sqrt{3}}{3} = 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\ (\because\ x^2 > 4)$

$\therefore$ ($\triangle$ABC의 넓이)$= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\ 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\Big)$

$= \sqrt{3} + \frac{1}{2} = \frac{1+2\sqrt{3}}{2}$

20. 미분법

정답 ⑤

ㄱ. (참) $(x) = x\sin x$에서 $f'(x) = \sin x + x\cos x$

$f'(0) = 0$이므로 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. (참) $y = f(x)$의 접선의 기울기는 $f'(x)$이다.

$f'\ \ \frac{\pi}{2}\Big) = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 1$이고,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$이므로 곡선 $y = f(x)$ 위의

점 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은 $y = x$이다.

따라서 $y = x$는 곡선 $y = f(x)$에 접한다.

ㄷ. (참) $f'(x)$는 $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\right]$에서 연속이고,

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 1 > 0$,

$f'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi\cos\frac{3}{4}\pi$

$= \ \ \frac{2}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\pi\right) < 0$이므로

중간값의 정리에 의해 $f'(c) = 0$인 c가

구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$ 안에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $x = c$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. 적분법

정답 ①

(나)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x+1) = -f(x) + e - 1$이므로 $1 \le x < 2$일 때,

함수 $f(x)$는 $0 \le x < 1$에서의 함수 $f(x)$를 x축 대칭이동 시킨 후 y축의 방향으로 $e - 1$만큼 평행이동 시키고, 다시 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것과 같으므로 $f(x) = -(e^{\ -1} - 1) + e - 1$

따라서 $1 \le x < 2$일 때, $f(x) = -e^{x-1} + e$이다.

같은 방법으로 $2 \le x < 3$일 때, 함수 $f(x)$는

$1 \le x < 2$에서의 함수 $f(x)$를 x축 대칭이동 시킨 후, y축의 방향으로 $e - 1$만큼 평행이동시키고 x축의 방향으로 1만큼 평행이동 시키면 되므로 $2 \le x < 3$일 때, $f(x) = e^{x-2} - 1$이다.

$$\therefore \quad {}_0^3 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 (e^x - 1)dx + \int_1^2 (-e^{x-1} + e)dx + \int_2^3 (e^{x-2} - 1)dx$$

$$= \ e^x - x\big]_0^1 + \left[-e^{x-1} - ex\right]_1^2 + \left[e^{x-2} - x\right]_2^3$$

$$= \ (e-1) - 1\} + \{(-e + 2e) - (-1 + e)\} + \{(e-3) - (1-2)\}$$

$$= 2e - 3$$

22. 일차변환과 행렬

정답 150

x축에 대한 대칭변환 f를 나타내는 행렬을 라 하면

$A = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}\Big)$,

원점을 중심으로 $60°$만큼 회전하는 회전변환 g를 나타내는 행렬을 B라 하면

$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$이므로 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

을 나타내는 행렬은 $A^{-1}B^{-1}$이다.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ a = \frac{\sqrt{3}}{2},\ b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ 100(a^2 + b^2) = 100\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) = 150$$

23. 방정식과 부등식

정답 58

(가)에서 $\dfrac{8+x}{4+x}\times 100 = y$

(나)에서 $\dfrac{12}{24-x}\times 100 = y+25$

$\therefore\ y = \dfrac{1200}{24-x} - 25$ ……㉠

따라서 $\dfrac{8+x}{24+x}\times 100 = \dfrac{1200}{24-x} - 25$

$\dfrac{8+x}{24+x} = \dfrac{12}{24-x} - \dfrac{1}{4}$

양변에 $4\ 24+x)(24-x)$를 곱하면

$4(8+x)(24-x) = 48(24+x) - (24+x)(24-x)$

$5x\ \ -16x - 192 = 0$

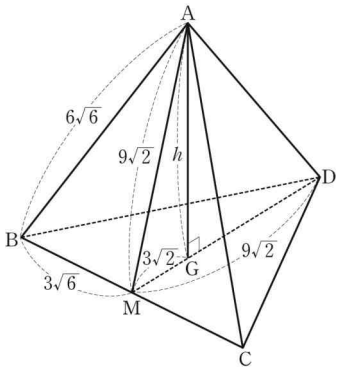
$(5x+24)(x-8) = 0 \qquad \therefore\ x = 8\ (\because\ x > 0)$

㉠에서 $y = \dfrac{1200}{24-8} - 25 = 50$

$\therefore\ x + y = 8 + 50 = 58$

24. 벡터

정답 24



$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PA}$의 양변을 3으로 나누면

$\dfrac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}}{3} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{PA}$

이때, $\triangle BCD$의 무게중심이 G이므로

$\dfrac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}}{3} = \overrightarrow{PG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{PA}$

따라서 세 점 A, G, P는 동일한 직선 위에 있고 점 P는 선분 AG를 3 : 2로 외분하는 점이다.

정사면체 ABCD의 높이 $|\overrightarrow{AG}|$는

$|\overrightarrow{AG}| = \quad (9\quad 2)^2 - (3\sqrt{2})^2 = 12$이므로

$|\overrightarrow{PG}| = x$라 하면

$x : (x+12) = 2 : 3,\ 2x + 24 = 3x,\ x = 24$

$\therefore\ |\overrightarrow{PG}| = 24$

따라서 선분 PG의 길이는 24이다.

25. 이차곡선

정답 192

타원 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$에서 두 초점 F, F′의 좌표는

F(3, 0), F′(−3, 0)이고,

타원의 정의에 의해 $PF + PF' = 10$이므로

$\overline{PF} : \overline{PF'} = 2 : 3$에서 $\overline{PF} = 4,\ \overline{PF'} = 6$

점 P의 좌표를 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{PF} = \sqrt{(a-3)^2 + b^2} = 4$

$(a-3)^2 + b^2 = 16$ ……㉠

$\overline{PF'} = \sqrt{(a+3)^2 + b^2} = 6$

$(a+3)^2 + b^2 = 36$ ……㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $a = \dfrac{5}{3},\ b = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ P\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{8\sqrt{2}}{3}\right)$

이때, $\overline{QF}$의 길이를 t로 놓으면 $OF' = t+6$이므로

$\overline{QF} : \overline{QF'} = 2 : 3$에서

$t : (t+6) = 2 : 3$

$2(t+6) = 3t,\ t = 12$

$\therefore\ Q(15,\ 0)$

$\therefore\ \overline{PQ}^2 = \left(15 - \dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$= \dfrac{1728}{9} = 192$

26. 확률

정답 182

지호가 받은 사탕의 개수가 5인 경우는

(ⅰ) 세 번 중에서 2번 이기고, 1번 지는 경우

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$$

(ⅱ) 네 번 중에서 1번 이기고, 3번 지는 경우

$${}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

(ⅲ) 다섯 번 중에서 한 번도 못 이긴 경우

$${}_5C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

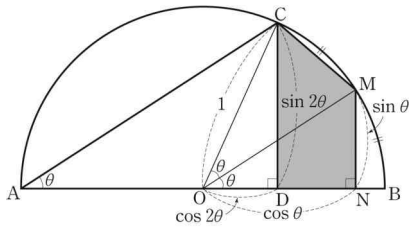
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\dfrac{2}{9} + \dfrac{32}{81} + \dfrac{32}{243} = \dfrac{182}{243}$

$\therefore\ k = 182$

27. 함수의 극한과 연속 정답 36

선분 AB를 지름으로 하는 반원의 중심을 O라 하자. 아래 그림과 같이 $\mathrm{COB}=2\theta$, $\angle\mathrm{MOB}=\theta$이므로

삼각비에 의해 $\mathrm{CD}=\sin 2\theta$, $\mathrm{OD}=\cos 2\theta$, $\mathrm{MN}=\sin\theta$, $\overline{\mathrm{ON}}=\cos\theta$이다.



따라서 사각형 CDNM의 넓이 (θ)는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{MN}})\times\overline{\mathrm{DN}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 2\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\cos 2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta)\ \cos\theta-(2\cos\ \theta-1)\}$$

$$=-\frac{1}{2}\sin\theta(2\cos\theta+1)^2(\cos\theta-1)$$

$$\therefore\ a=\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{-\frac{1}{2}\sin\theta(2\cos\theta+1)^2(\cos\theta-1)}{\theta^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta(2\cos\theta+1)^2(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^3(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta(2\cos\theta+1)^2(1-\cos^2\theta)}{\theta^3(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^3\theta(2\cos\theta+1)^2}{\theta^3(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\lim_{\theta\to+0}\frac{(2\cos\theta+1)^2}{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{9}{2}=\frac{9}{4}$$

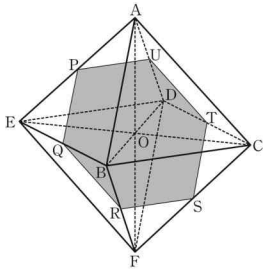
$$\therefore\ 16a=16\times\frac{9}{4}=36$$

28. 공간도형과 공간좌표 정답 27

정팔면체 ABCDEF와 평면 $x+y+z=0$이 만나서 생기는 도형은 아래의 그림과 같다.

이때 생기는 각 점 P, Q, R, S, T, U는 각각의 모서리들의 중점이므로

$\mathrm{P}(0,\ -1,\ 1)$, $\mathrm{Q}(1,\ -1,\ 0)$, $\mathrm{R}(1,\ 0,\ -1)$, $\mathrm{S}(0,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{T}(-1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{U}(-1,\ 0,\ 1)$이다.



그러므로 만들어진 도형 PQRSTU는 한 변의 길이가 2인 정육각형이다.

따라서 넓이 S는

$$S=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=3\sqrt{3}$$

$$\therefore\ S^2=27$$

29. 적분법 정답 259

세 점 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나는 포물선을 $y=a(x-4)(x+4)$라 하면 $(0,\ 2)$를 지나므로

$a=-\frac{1}{8}$이다.

따라서 포물선의 식은 $y=-\frac{1}{8}(x^2-16)$ ……㉠

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P를 중심으로 하고 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 b이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=b$이다.

또, 점 P는 포물선 위의 점이므로 $b=-\frac{1}{8}(a^2-16)$,

$-\frac{1}{8}a^2+2=b$, $a^2=16-8b$

따라서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}=\quad a^2+b^2+b$

$$=(\sqrt{(16-8b)}+b^2+b$$

$$=\sqrt{\ b-4)^2}+b$$

$$=|b-4|+b=-(b-4)+b\ (\because\ b<4)$$

$$=4$$

즉, $\overline{\mathrm{OQ}}$의 길이는 P의 위치와 관계없이 4로 일정하다.

그러므로 점 Q는 중심이 원점 O이고 반지름이 4인 원의 위쪽의 반원 부분을 나타낸다.

Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $x^2+y^2=16$이므로

구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_{-4}^{4}y^2dx=\pi\int_{-4}^{4}(16-x^2)dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{4}(16-x^2)dx=2\pi\left[16x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^4$$

$$=2\pi\ 64-\frac{64}{3}\Big)=\frac{256}{3}\pi$$

$$\therefore\ p=3,\ q=256,\ p+q=259$$

30. 지수함수와 로그함수 정답 13

$\log \quad = x + y$ ($x \geq 0$인 정수, $0 \leq y < 1$)

라 하면 P $(f(n),\ g(n)) = (x,\ y)$

연립부등식 $\begin{cases} y \geq \dfrac{1}{3}x \\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

에서 $x \leq 3y \leq \dfrac{3}{2}$

x는 0 이상인 정수이므로

(ⅰ) $x = 0$일 때,

$0 \leq 3y \leq \dfrac{3}{2}$, $0 \leq y \leq \dfrac{1}{2}$

따라서 $\log n = 0 + y$이므로

$0 \leq \log n \leq \dfrac{1}{2}$

$\log 1 \leq \log n < \log 3.2$

$\therefore\ 1 \leq n < 3.2$

그러므로 n은 1, 2, 3인 3개이다.

(ⅱ) $x = 1$일 때,

$1 \leq 3y \leq \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{3} \leq y \leq \dfrac{1}{2}$

따라서 $\log n = 1 + y$이므로

$\dfrac{1}{3} \leq \log n - 1 \leq \dfrac{1}{2}$

$\log 2.1 < \log n - 1 < \log 3.2$

$1 + \log 2.1 < \log n < 1 + \log 3.2$

$\log 21 < \log n < \log 32$

$\therefore\ 21 < n < 32$

그러므로 n은 22, $\cdots$, 31인 10개이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수 n의 개수는 13개이다.