제 3 교 시

2013학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

수 리 영 역

문 과

성명		수험번호							

○ 먼저 문제지에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ 답안지에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 0이 포함된 경우에는 0을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

육 군 사 관 학 교

공　　　란

1. $\sqrt[6]{9^5}\times 24^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 $A(X-B)=B$ 를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은? [2점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

3. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} k-2 & 3 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$의 해가 존재하지 않도록 하는 상수 k의 값은? [2점]

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\left(\dfrac{1}{2}+x\right)^4 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4}{x}$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{3}{2}$

5. 정규분포 $N(50, 10^2)$을 따르는 모집단에서 임의로 25개의 표본을 뽑았을 때의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $P(48 \le \overline{X} \le 54)$의 값을 구한 것은? [3점]

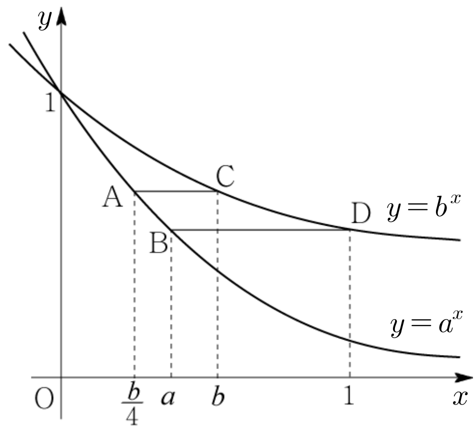
z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328　② 0.6247　③ 0.7745　④ 0.8185　⑤ 0.9104

6. 어느 인터넷 동호회에서 한 종류의 사은품 10개를 정회원 2명, 준회원 2명에게 모두 나누어 주려고 한다. 정회원은 2개 이상, 준회원은 1개 이상을 받도록 나누어 주는 방법의 수는? (단, 사은품은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 20　② 25　③ 30　④ 35　⑤ 40

7. 그림과 같이 $0<a<b<1$인 두 실수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $\frac{b}{4}$, a이고, 곡선 $y=b^x$ 위의 두 점 C, D의 x좌표는 각각 b, 1이다. 두 선분 AC와 BD가 모두 x축과 평행할 때, a^2+b^2의 값은? [3점]



① $\frac{7}{16}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{9}{16}$

④ $\frac{5}{8}$

⑤ $\frac{11}{16}$

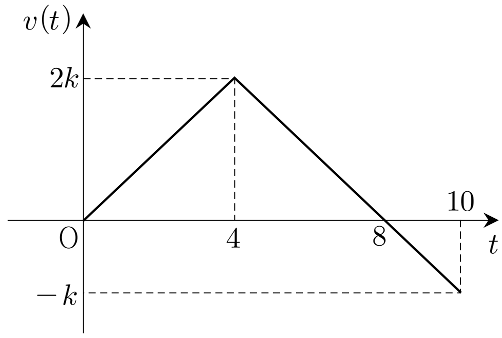
8. 어느 지역에 서식하는 어떤 동물의 개체 수에 대한 변화를 조사한 결과, 지금으로부터 t 년 후에 이 동물의 개체 수를 N 이라 하면 등식

$$\log N = k + t\log\frac{4}{5} \quad (\text{단, } k\text{는 상수})$$

가 성립한다고 한다. 이 동물의 현재 개체 수가 5000 일 때, 개체 수가 처음으로 1000 보다 적어지는 때는 지금으로부터 n 년 후이다. 자연수 n 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$ 으로 계산한다.) [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

9. 그림은 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 초($0 \le t \le 10$)에서의 속도 $v(t)$ 를 나타낸 것이다. 점 P 의 시각 t 초에서의 위치를 $x(t)$ 라 할 때, $x(10) = \frac{35}{3}$ 이다. 출발 후 10 초 동안 점 P 가 움직인 거리는? (단, k 는 양의 상수이고, 점선은 좌표축에 평행하다.) [3점]



① 15
② 16
③ 17
④ 18
⑤ 19

10. 두 실수 x, y $(x>y)$가 $x+y=1$, $xy=-1$을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$을

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의하자. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 제 n항을 구하는 과정이다.

> $x+y=1$, $xy=-1$에서 두 실수 x, y는 방정식
>
> $$t^2-t+\boxed{\text{(가)}}=0$$
>
> 의 두 근이다. 한편
>
> $$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1} \\ &= x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1} \quad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$
>
> $(*)$은 첫째항이 x^{n-1}이고 공비가 $\dfrac{y}{x}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로
>
> $$a_n=\frac{\boxed{\text{(나)}}}{\sqrt{5}}$$

위의 과정에서 (가)에 들어갈 수를 m, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $m+\{f(3)\}^2$의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

11. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1 = 20,\ a_{n+1} = a_n - 2n + 9\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

로 정의하자. a_n의 최댓값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

12. $\log_{25}(a-b) = \log_9 a = \log_{15} b$를 만족시키는 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{5}$

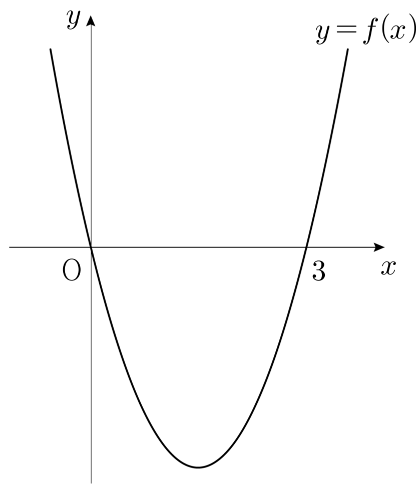
④ $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

13. 그림과 같이 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(0,0)$, $(3,0)$에서 만날 때, 함수

$$S(x)=\int_1^x f(t)\,dt$$

의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 하자.

$M-m=6$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{S(x)}{x-1}$의 값은? [3점]



① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ -2

④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

14. 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)=\int_{1}^{x}(x^2-t)\,dt$에 대하여 직선 $y=6x-k$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\frac{11}{2}$　② $\frac{13}{2}$　③ $\frac{15}{2}$　④ $\frac{17}{2}$　⑤ $\frac{19}{2}$

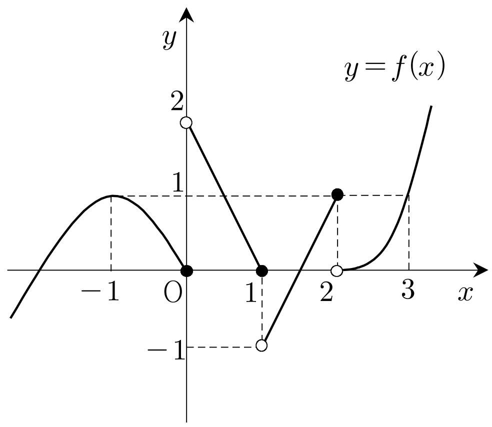
15. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f(x) = 2x + \int_0^1 \{f(t) + g(t)\}\, dt, \qquad g(x) = 3x^2 + \int_0^1 \{f(t) - g(t)\}\, dt$$

가 성립할 때, $f(1)+g(2)$의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

16. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x-1)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 세 이차정사각행렬 A, B, C가 $(AB)^2 = A^2B^2$, $BA = AC$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $B^2A = AC^2$

ㄴ. B의 역행렬이 존재하면 $A^2B = A^2C$이다.

ㄷ. AC의 역행렬이 존재하면 $B = C$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}$의 값이 존재한다.

ㄴ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}$의 값이 존재한다.

ㄷ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

19. 구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 일차함수 $f(x)=ax+b$ $(0 \le x \le 1)$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\dfrac{a}{2}+b=1$

ㄴ. $\mathrm{E}(X)=m$일 때, $\mathrm{P}(0 \le X \le m)=\mathrm{P}(m \le X \le 1)$이다.

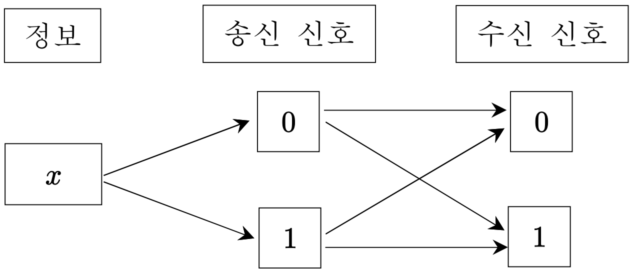
ㄷ. $\mathrm{E}(X)$의 최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=4x^3-4x$이고, $f(x)$의 극댓값이 k일 때, 직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\dfrac{8\sqrt{2}}{15}$ ② $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$
④ $\dfrac{14\sqrt{2}}{15}$ ⑤ $\dfrac{16\sqrt{2}}{15}$

21. 그림은 어떤 정보 x를 0과 1의 두 가지 중 한 가지의 송신 신호로 바꾼 다음 이를 전송하여 수신 신호를 얻는 경로를 나타낸 것이다.



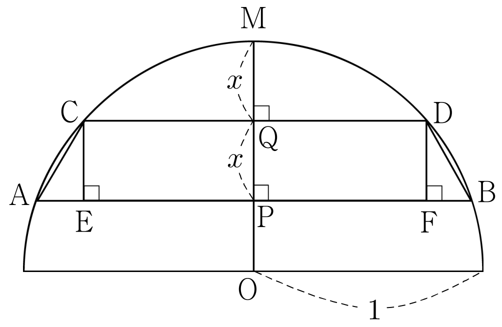
이때 송신 신호가 전송되는 과정에서 수신 신호가 바뀌는 경우가 생기는 데, 각각의 경우에 따른 확률은 다음과 같다.

(가) 정보 x가 0, 1의 송신 신호로 바뀔 확률은 각각 0.4, 0.6이다.
(나) 송신 신호 0이 수신 신호 0, 1로 전송될 확률은 각각 0.95, 0.05이다.
(다) 송신 신호 1이 수신 신호 0, 1로 전송될 확률은 각각 0.05, 0.95이다.

정보 x를 전송한 결과 수신 신호가 1이었을 때, 송신 신호가 1이었을 확률은? [4점]

① $\frac{54}{59}$ ② $\frac{55}{59}$ ③ $\frac{56}{59}$ ④ $\frac{57}{59}$ ⑤ $\frac{58}{59}$

22. 그림과 같이 반지름의 길이가 1 이고 중심이 O 인 반원의 호를 이등분하는 점을 M 이라 하고, 선분 OM 위의 점 P 를 지나고 선분 OM 에 수직인 직선과 반원이 만나는 점을 각각 A , B 라 하자.
또, 선분 PM 의 중점 Q 를 지나고 선분 OM 에 수직인 직선과 반원이 만나는 점을 각각 C , D 라 하고, 점 C , D 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 각각 E , F 라 하자. $\overline{\mathrm{PM}}=2x$ 일 때, 사다리꼴 ABDC 와 직사각형 EFDC 의 넓이를 각각 $S(x)$, $T(x)$ 라 하자. $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{T(x)}{S(x)}$ 의 값은? [4점]



① $\sqrt{2}-1$
② $2-\sqrt{2}$
③ $\sqrt{3}-1$
④ $2(\sqrt{2}-1)$
⑤ $2(2-\sqrt{3})$

23. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

> (가) $a_1 = 0$, $b_1 = 2$
>
> (나) n이 짝수이면 $a_n = a_{n-1} + \dfrac{b_{n-1}}{n}$, $b_n = b_{n-1} - \dfrac{b_{n-1}}{n}$이다.
>
> (다) n이 1보다 큰 홀수이면 $a_n = a_{n-1} - \dfrac{a_{n-1}}{n}$, $b_n = b_{n-1} + \dfrac{a_{n-1}}{n}$이다.

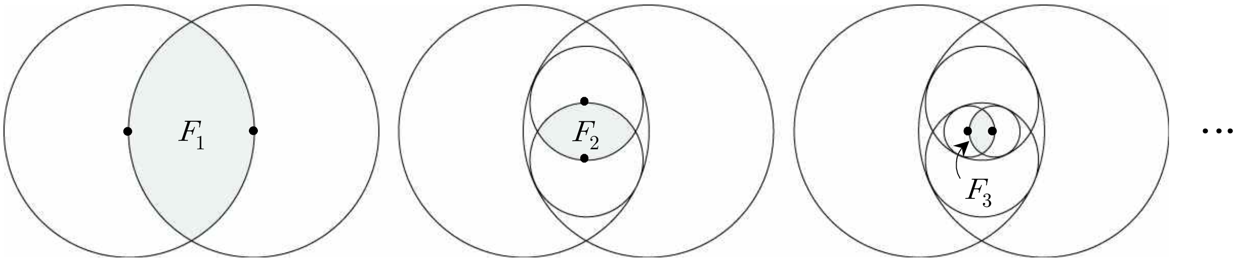
$a_{41} = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

① 79 ② 80 ③ 81 ④ 82 ⑤ 83

24. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1이라 하자.

F_1의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2라 하자.

F_2의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3이라 하자.



이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n을 그려 나갈 때, F_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]

① $2\pi(1+\sqrt{7})$　② $\frac{8\pi}{3}(1+\sqrt{7})$　③ $\frac{4\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

④ $2\pi(2+\sqrt{7})$　⑤ $\frac{5\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

25. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^3 의 계수를 구하시오. [3점]

26. 부등식

$$\log_2(x+y-4)+\log_2(x+y)\le 1+\log_2 x+\log_2 y$$

를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $7y-x$의 최댓값을 구하시오. [3점]

27. 집합 $A=\{1, 2, 3\}$에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 집합 A의 원소로 이루어진 수열이다. 이 수열이 등식 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{104}{333}$를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 프로야구 한국시리즈는 두 팀이 출전하여 7번의 경기 중 4번을 먼저 이기는 팀이 우승팀이 된다. A, B 두 팀이 한국시리즈에 출전하여 우승팀이 정해지기까지 치른 경기의 수를 확률변수 X라 하자. 매 경기마다 각 팀이 이길 확률은 모두 $\frac{1}{2}$로 같다고 할 때, $\mathrm{E}(16X)$의 값을 구하시오. (단, 두 팀이 경기를 할 때 무승부는 없다고 가정한다.) [4점]

29. 다음과 같이 두 수 0과 1만을 사용하여 제 n행에 n자리의 자연수를 크기순으로 모두 나열해 나간다. ($n=1, 2, 3, \cdots$)

제 1 행	1
제 2 행	10, 11
제 3 행	100, 101, 110, 111
제 4 행	1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111
$\cdots$	$\cdots$

제 n행에 나열한 모든 수의 합을 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=21$, $a_3=422$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{20^n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $g(1)=2$
(나) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)$이다.

이때 $\int_0^3 \{f(x)+g(x)+h(x)\}\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

공　　　　란