수리 영역(문과)

1. ②	2. ①	3. ⑤	4. ④	5. ④
6. ④	7. ③	8. ③	9. ①	10. ②
11. ③	12. ②	13. ①	14. ⑤	15. ②
16. ③	17. ⑤	18. ②	19. ③	20. ⑤
21. ④	22. ④	23. ③	24. ①	25. 160
26. 32	27. 103	28. 93	29. 379	30. 18

1. 지수함수와 로그함수 정답 ②

$$\times 24^{-\frac{2}{3}} = 3^{10})^{\frac{1}{6}} \times (2^3 \times 3)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= 3^{\frac{5}{3}} \times 2^{-2} \times 3^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

2. 행렬과 그래프 정답 ①

$^{-1} = - \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$A\ X-B) = B$에서 $AX - AB = B$, $AX = B + AB$

양변의 왼쪽에 A^{-1}을 곱하면 $X = A^{-1}B + B$

$X = (A^{-1} + E)B$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 19 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 값은 $-5 + 19 + 6 - 3 = 17$

3. 행렬과 그래프 정답 ⑤

$\begin{pmatrix} k-2 & 3 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$의 해가 존재하지 않아야 하므로

행렬 $\begin{pmatrix} k-2 & 3 \\ 1 & k \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다. 즉,

$(k-2)k - 3 = 0$, $k^2 - 2k - 3 = 0$, $(k+1)(k-3) = 0$

$k = -1$ 또는 $k = 3$

(ⅰ) $k = -1$인 경우

행렬 $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$에서 무수히 많은 해가 존재한다.

(ⅱ) $k = 3$인 경우

행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$에서 해가 존재하지 않는다.

$\therefore k = 3$

4. 다항함수의 미분법 정답 ④

$f(x) = 2x^4$이라 하면 주어진 식은

$$\lim_{x \to 0} \frac{f\ x + \frac{1}{2}) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x} = f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$f'(x) = 8x^3$에서 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

5. 통계 정답 ④

표본의 크기가 25인 표본평균 X는 정규분포

$\mathrm{N}\ 50,\ \frac{10^2}{25}) = \mathrm{N}\ 50,\ 2^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}\ 48 \le \overline{X} \le 54) = \mathrm{P}\left(\frac{48-50}{2} \le Z \le \frac{54-50}{2}\right)$$

$$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$$

$$= 0.3413 + 0.4772$$

$$= 0.8185$$

6. 확률 정답 ④

정회원 명에게 사은품을 각각 2개, 준회원 2명에게 사은품을 각각 1개씩 나누어 준 후 남은 4개의 사은품을 4명에게 나누어 주면 된다. 즉, 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수를 구하면

$$_{+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_3$$

$$= \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 35$$

7. 지수함수와 로그함수 정답 ③

네 점 A $\frac{b}{4},\ a^{\frac{b}{4}}\Big)$, B $a,\ a^a)$, C$\left(b,\ b^b\right)$, D$(1,\ b)$에서 두 점 A와 C의 y좌표가 같으므로

$$a^{\frac{b}{4}} = b^b \qquad \cdots\cdots$$

두 점 B와 D의 y좌표가 같으므로

$$a^a = b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변을 b제곱하면 $a^{ab} = b^b$

㉠에서 $a^{\frac{b}{4}} = a^{ab}$

$$\frac{b}{4} = ab,\ a = \frac{1}{4} \quad \because b > 0) \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면 $b = \ \frac{1}{4}\Big)^{\frac{1}{4}}$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{16}$$

8. 지수함수와 로그함수 정답 ③

현재$(t=0)$의 개체 수가 5000이므로

$$\log 5000 = k$$

개체 수가 처음으로 1000보다 적어지는 때는 n년 후이므로

$$\log 1000 > \log 5000 + n\log\frac{4}{5}$$

$$= \log 5000 + n\ \ \log 2^2 - (1 - \log 2)\}$$

$$= \log 5000 + n(-0.097)\,(\because \log 2 = 0.3010)$$

$$\log\frac{1}{5} > n(-0.097),\ 0.699 < 0.097n$$

$$n > 7.206\cdots$$

$$\therefore n = 8$$

9. 다항함수의 적분법 정답 ①

$$x(10) = \ {}_{0}^{10} v(t)\,dt$$

$$= \int_0^8 v(t)\,dt + \int_8^{10} v(t)\,dt$$

$$= 8k - k$$

$$= 7k = \frac{35}{3}$$

$$\therefore k = \frac{5}{3}$$

10초 동안 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{10} |\,v(t)\,|\,dt = \int_0^8 v(t)\,dt - \int_8^{10} v(t)\,dt$$

$$= 8k + k = 9k$$

$$\therefore 9k = 15$$

10. 수열

정답 ②

$+y=1,\ xy=-1$에서 두 실수 $x,\ y$는 근과 계수의 관계에서 이차방정식 $t\ \ -t\boxed{-1}=0$의 두 근이다.
이차방정식의 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{1+\quad 5}{2},\ y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\quad \because x>y)$$

$$a_n = \ \overset{n}{\underset{k=1}{}}\ x^{n-k}y^{k-1}$$

$$=x^{n-1}+x^{n-2}y+\ \cdots\ +y^{n-1}\qquad \cdots\cdots(*)$$

$(*)$은 첫째항이 x^{n-1}이고 공비가 $\frac{y}{x}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$a_n=\frac{x^{n-1}\ \ 1-\ \frac{y}{x}\Big)^n\Big\}}{1-\frac{y}{x}}$$

$$=\frac{x^{n-1}-\ \frac{y^n}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

$$=\frac{x^n-y^n}{x-y}=\boxed{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}}$$

$$\therefore m=-1,\ f(n)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$f(3)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\times$$

$$1+\quad 5\ \Big)+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\Big\}$$

$$=\sqrt{5}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-1+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$=2\sqrt{5}$$

$$\therefore m+\{f(3)\}^2=-1+\ \ 2\sqrt{5})^2=19$$

11. 수열

정답 ③

$a_{n+1}=a_n-2n+9\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$$a_n=a_{n-1}-2(n-1)+9$$

$$a_{n-1}=a_{n-2}-2(n-2)+9$$

$$\vdots$$

$$a_2=a_1-2+9$$

위 식의 각 변을 모두 더하면 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k+9)$

$$\therefore a_n=-n^2+10n+11\quad \because a_1=20)$$

수열 $\{a_n\}$의 일반항을 n에 대한 완전제곱 꼴로 바꾸면,
$a_n=-(n-5)^2+36$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 최댓값은 $n=5$일 때, 36

12. 지수함수와 로그함수

정답 ②

실수 k에 대하여

$\log_{25}(a-b)=\log_9 a=\log_{15} b=k$라 하면

$$a-b=25^k=5^{2k}\qquad \cdots\cdots$$

$$a=9^k=3^{2k}\qquad \cdots\cdots ㉡$$

$$b=15^k=3^k\times 5^k\qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢의 양변을 제곱하면

$$b^2=3^{2k}\times 5^{2k}=a(a-b),\ b^2=a^2-ab\qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉣의 양변을 $a^2\ \ a^2>0)$으로 나누면

$$\ \frac{b}{a}\Big)^2=1-\frac{b}{a},\ \left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}-1=0$$

$\frac{b}{a}$에 대한 이차방정식의 근의 공식을 이용하면

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ (\because a>0,\ b>0)$$

13. 다항함수의 적분법

정답 ①

양수 에 대하여 $f\ x) = ax(x-3)$이라 하면

$$(x) = \ {}^{x} f(t)\,dt = \int_1^x at(t-3)\,dt$$

$$= a\left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2}\right]_1^x$$

$$= a\ \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{7}{6}\Big)$$

$S'(x) = ax(x-3) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 3$

$x = 0$일 때, $S(0) = \frac{7}{6}a$

$x = 3$일 때, $S(3) = -\ \frac{10}{3}\ a$

$a > 0$이므로 극댓값은 $\frac{7}{6}a$, 극솟값은 $-\frac{10}{3}a$

$M - m = \frac{7}{6}a - \ -\frac{10}{3}a\Big) = 6,\ a = \frac{4}{3}$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{S(x)}{x-1} = \frac{4}{3}\times\lim_{x\to1}\frac{\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{7}{6}}{x-1}$$

$$= \frac{4}{3}\times\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\frac{x^2}{3} - \ \frac{7x}{6}\ - \frac{7}{6}\right)}{x-1}$$

$$= -\ \frac{8}{3}$$

14. 다항함수의 적분법

정답 ⑤

$$f(x) = \int_1^x\ x^2 - t)\,dt$$

$$= \left[x^2 t - \frac{t^2}{2}\right]_1^x = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$f'(x) = 3x^2 - 3x$

직선 $y = 6x - k$가 곡선 $y = f(x)$에 접하므로

접점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$f'(a) = 6,\ 3a^2 - 3a = 6,\ a^2 - a - 2 = 0$

$(a-2)(a+1) = 0$에서 $a = -1$ 또는 $a = 2$

(ⅰ) $a = -1$일 때, 접선의 방정식은 $y = 6x + 4$

(ⅱ) $a = 2$일 때, 접선의 방정식은 $y = 6x - \frac{19}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 양수 k의 값은 $\frac{19}{2}$이다.

15. 다항함수의 적분법

정답 ②

$\int_0^1 f(t)\ dt = a,\ \int_0^1 g(t)\ dt = b$라 하면

$f(x) = 2x + a + b,\ g(x) = 3x^2 + a - b$

$a = \int_0^1 (2x + a + b)\,dx = 1 + a + b$

$\therefore b = -1$

$b = \int_0^1 \left(3x^2 + a - b\right)\ dx = 1 + a - b$

$\therefore a = -3$

$\therefore f(x) = 2x - 4,\ g(x) = 3x^2 - 2$

$\therefore f(1) = -2,\ g(2) = 10$

$\therefore f(1) + g(2) = 8$

16. 함수의 극한과 연속

정답 ③

ㄱ. (참) 함수 $f(x-1)$에서 $x - 1 = t$라 치환하면 $x\to0$일 때, $t\to-1$

$$\lim_{t\to-1} f(t) = 1 = f(-1)$$

함수 $f(x-1)$은 $x = 0$에서 극한값과 함숫값이 같으므로 연속이다.

ㄴ. (거짓)

$$\lim_{\to 1+0} x)f(-x)=\lim_{x\to 1+0} f(x)\times\lim_{x\to 1+0} f(-x)$$

$$=-1\times\lim_{s\to -1-0} f(s)$$

$$=-1\times 1=-1$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)f(-x)=\lim_{x\to 1-0} f(x)\times\lim_{x\to 1-0} f(-x)$$

$$=0\times\lim_{t\to -1+0} f(t)$$

$$=0\times 1=0$$

함수 $f(x)f(-x)$의 $x=1$에서의 좌극한과 우극한이 서로 다르므로 불연속이다.

ㄷ. (참) 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 함숫값 1로 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 3} f(f(x))=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$에서

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=-1,\ \lim_{x\to 1-0} f(x)=0$$

합성함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17. 행렬과 그래프 정답 ⑤

ㄱ. (참) $^2A=B(BA)=B(AC)=(BA)C$

$$=(AC)C=AC^2$$

ㄴ. (참) 행렬 B의 역행렬이 존재하므로

$ABAB=AABB$의 오른쪽에 B^{-1}을 연산하면

$ABA=AAB$ ……

$A(BA)B=AACB$의 오른쪽에 B^{-1}을 연산하면

$ABA=AAC$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서 $A^2B=A^2C$

ㄷ. (참) AC의 역행렬이 존재하므로 A와 C의 역행렬이 각각 존재하고 $BA=AC$에서 BA의 역행렬이 존재한다. 그러므로 B의 역행렬이 존재한다. ㄴ에서 A의 역행렬을 $A^2B=A^2C$의 왼쪽에 곱하면 $B=C$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

18. 다항함수의 미분법 정답 ②

극한값 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재할 때, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

ㄱ. (거짓) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\ a+h^2)-f(a)}{h^2}$가 존재하므로 $h^2=t$라 하면 우극한 $\lim\limits_{t\to +0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$가 존재한다. 그러나 좌극한 $\lim\limits_{t\to -0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$의 존재여부는 알 수 없다.

ㄴ. (참) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}$가 존재하므로 $h^3=t$라 하면 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$가 존재한다.

ㄷ. (거짓) 【반례】 $f(x)=|x|$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{2h}=0$$

$x=0$일 때, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$의 값이 존재하지만 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ이다.

19. 통계 정답 ③

ㄱ. (참) $f(x)$는 확률밀도함수이므로

$$\int_0^1 (ax+b)\ dx = \left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{2}+b=1$$

ㄴ. (거짓) 【반례】 구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 연속확률변수의 확률밀도함수를 $f(x)=2x$라 하자.

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 x(2x)\ dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\therefore m=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{P}(0\le X\le m)=\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{2}{3}\right)$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}} 2x\,dx=\frac{4}{9}$$

$$\mathrm{P}(m\le X\le 1)=\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}\le X\le 1\right)$$

$$=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{2}{3}\right)\ne\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}\le X\le 1\right)$$

ㄷ. (참) ㄱ에서 $b=1-\frac{a}{2}$이므로

$$f(x)=ax+\left(1-\frac{a}{2}\right)$$

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 x\left\{ax+\left(1-\frac{a}{2}\right)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{2}\right)x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{3}+\frac{1}{2}-\frac{a}{4}$$

$$=\frac{a}{12}+\frac{1}{2}$$

구간 $[0,\ 1]$의 x에 대하여 $f(x)$는 확률밀도함수이므로 $f(x)\ge 0$

$$f(0)=1-\frac{a}{2}\ge 0,\ a\le 2$$

$$f(1)=1+\frac{a}{2}\ge 0,\ a\ge -2$$

$\mathrm{E}(X)$는 a에 대한 일차함수이므로

$a=-2$일 때, 최솟값 $-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

$a=2$일 때, 최댓값 $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

20. 다항함수의 적분법 정답 ⑤

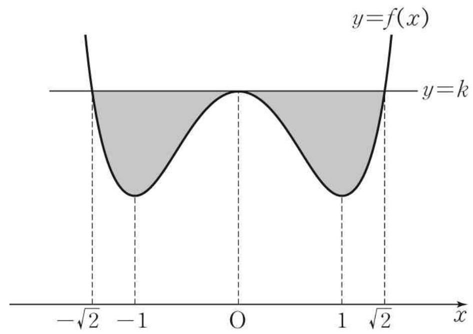
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$에서

$f'(x)=0$은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

상수 k에 대하여 $f(x)=x^4-2x^2+k$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$k-1$	↗	k	↘	$k-1$	↗



직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분은 색칠한 부분과 같다.

$$\therefore 2\int_0^{2}\{k-f(x)\}\,dx$$

$$2 \quad {}^{2} \quad k-\left(x^4-2x^2+k\right)\} \, dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}} 2x^2-x^4 \, dx$$

$$=2\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{16 \quad 2}{15}$$

21. 확률

정답 ④

수신 신호가 1 이었을 사건을 , 송신 신호가 1 이었을 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

$$\mathrm{P}(B)=0.4\times 0.05+0.6\times 0.95$$

$\mathrm{P}(A\cap B)=0.6\times 0.95$ 이므로

$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{57}{59}$$

22. 함수의 극한과 연속

정답 ④

직각삼각형 $\triangle \mathrm{OQD}$에서

$$\mathrm{QD}=\sqrt{\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{OQ}}^2}= \quad 1^2- \quad 1-x)^2$$
$$=\sqrt{2x-x^2}$$

직각삼각형 $\triangle \mathrm{OPB}$ 에서

$$\mathrm{PB}=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{1^2-(1-2x)^2}$$
$$=2\sqrt{x-x^2}$$

사다리꼴 ABDC 의 넓이는

$$S(x)= \quad 2\overline{\mathrm{QD}}+2\overline{\mathrm{PB}})\times\frac{1}{2}\times x$$

직사각형 EFDC 의 넓이는

$$T(x)=2\overline{\mathrm{QD}}\times x$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{T(x)}{S(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\overline{\mathrm{QD}}\times x}{(\overline{\mathrm{QD}}+\overline{\mathrm{PB}})\times x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2}+2\sqrt{x-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}+2\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}=2 \quad \sqrt{2}-1)$$

23. 수열

정답 ③

주어진 조건을 이용하여 두 수열 $a_n\}$, $\{b_n\}$을 구해보면

$$a_1=0,\ b_1=2$$

$$a_2=0+\frac{2}{2}=1,\ b_2=2-1=1$$

$$a_3=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},\ b_3=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$a_4=\frac{2}{3}+\frac{\frac{4}{3}}{4}=1,\ b_4=\frac{4}{3}-\frac{\frac{4}{3}}{4}=1$$

$$a_5=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5},\ b_5=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$$

$$\vdots$$

$$a_{2n-1}=\frac{2n-2}{2n-1},\ a_{2n}=1$$

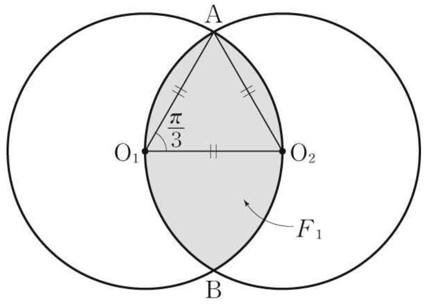
$$b_{2n-1}=\frac{2n}{2n-1},\ b_{2n}=1$$

따라서 $a_{41}=\dfrac{40}{41}$ 에서 $p=41,\ q=40$

$$\therefore p+q=81$$

24. 수열의 극한

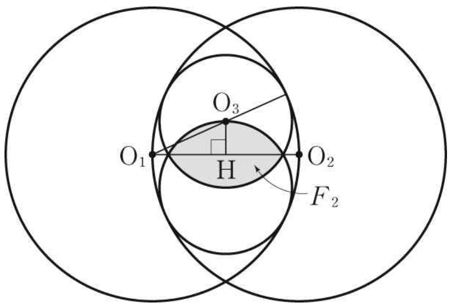
정답 ①



중심이 각각 O O_2인 두 원 $_1$, O_2의 교점을 각각 A, B라 하면 두 원의 반지름의 길이가 3이므로 선분 O_1A, O_2A, O_1O_2의 길이가 모두 3이다. 그러므로 $\triangle O_1AO_2$는 정삼각형이 되므로

$$\angle AO_1O_2 = \frac{\pi}{3},\ \angle AO_1B = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore l_1 = 3\times\frac{2}{3}\pi\times 2 = 4\pi$$



중심이 O_3인 원 O_3의 반지름의 길이를 r $0<r<3)$라 하고 중심 O_3에서 선분 O_1O_2에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle O_1HO_3$은 직각삼각형이다. 그러므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$O_1H^2 + \overline{O_3H}^2 = O_1O_3^2$$

$\overline{O_1H} = \frac{3}{2}$, $\overline{O_3H} = \frac{r}{2}$, $\overline{O_1O_3} = 3-r$에서

$$\frac{3}{2}\Big)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = (3-r)^2,\ r^2-8r+9=0$$

이차방정식의 근의 공식에서 $r = 4-\quad 7$ $(\because 0<r<3)$

$$\therefore l_2 = \ 4-\sqrt{7})\times\frac{2}{3}\pi\times 2 = \frac{4(4-\sqrt{7})}{3}\pi$$

두 도형 F_1과 F_2의 닮음의 비는 $3 : 4-\sqrt{7}$

그러므로 수열 $l_n\}$은 첫째항이 4π, 공비가 $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$인 등비수열이다.

$$\therefore \ {}_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{4\pi}{1-\frac{4-\sqrt{7}}{3}}$$

$$= 2\pi(1+\sqrt{7})$$

25. 확률

정답 160

$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6 = \sum_{r=0}^{6} {}_6C_r\ x^2)^r\left(\frac{2}{x}\right)^{6-r}$에서 x^3의 계수는 $r=3$일 때이므로

$$\therefore {}_6C_3\times 2^3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2}\times 8 = 160$$

26. 지수함수와 로그함수

정답 32

$$\log_2(x+y-4)+\log_2(x+y) \le 1+\log_2 x+\log_2 y$$

$\log_2(x+y-4)(x+y) \le \log_2 2xy$에서

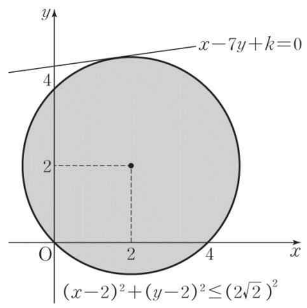
$$(x+y-4)(x+y) \le 2xy$$
$$x^2+2xy+y^2-4x-4y \le 2xy$$

$$(x-2)^2+(y-2)^2 \le (2\sqrt{2})^2 \quad \cdots\cdots$$

㉠을 만족시키는 두 실수 x, y는 중심이 $(2,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원의 경계를 포함하는 내부의 점이다.

상수 k에 대하여 $7y-x=k$라 하면 k의 최댓값은 원

$(x-2)^2+(y-2)^2 = (2\sqrt{2})^2$과 위에서 접할 때이다.



직선 $x-7y+k=0$과 이 원이 접하려면 원의 중심 $(2,\ 2)$에서 이 직선까지의 거리가 이 원의 반지름의 길이인 $2\ \ 2$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|2-14+k\ |}{1\ +\ -7)^2}=2\sqrt{2},\ |\ -12+k\ |=20$$

(i) $-12+k=20$에서 $k=32$

(ii) $-12+k=-20$에서 $k=-8$

따라서 구하는 최댓값은 32이다.

27. 수열의 극한

정답 103

등식 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{}}\frac{a_n}{10^n}=\frac{104}{333}$ 에서

$$\frac{104}{333}=\frac{312}{999}=0.\dot{3}1\dot{2}$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\frac{2}{10^6}+\cdots$$

따라서 수열 $\ a_n\}$의 일반항은 자연수 k에 대하여

$$a_n=\begin{cases}3\ (n=3k-2)\\1\ (n=3k-1)\\2\ (n=3k)\end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\frac{1}{5^5}+\frac{2}{5^6}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}\Big)\frac{1}{5^{3\ \ n-1)}}$$

$$\therefore\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^3}}\right)=\frac{41}{62}$$

$$\therefore p+q=62+41=103$$

28. 통계

정답 93

우승팀이 정해지기까지 치르는 경기의 수가 확률변수 X이므로 확률변수 X의 값은 $4,\ 5,\ 6,\ 7$이다.

(i) $X=4$인 경우

두 팀 중에서 한 팀이 초반 4번의 경기를 모두 이기면 4번만에 우승팀이 정해지므로 이때의 확률은

$${}_4C_4\times\ \frac{1}{2}\Big)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^0\times 2=\frac{1}{8}$$

(ii) $X=5$인 경우

두 팀 중에서 한 팀이 초반 4번의 경기 중 3번을 이기고 5번째 경기를 이기면 5번 만에 우승팀이 정해지므로 이때의 확률은

$${}_4C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{4}$$

(iii) $X=6$인 경우

두 팀 중에서 한 팀이 초반 5번의 경기 중 3번을 이기고 6번째 경기를 이기면 6번 만에 우승팀이 정해지므로 이때의 확률은

$${}_5C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{5}{16}$$

(iv) $X=7$인 경우

두 팀 중에서 한 팀이 초반 6번의 경기 중 3번을 이기고 7번째 경기를 이기면 7번 만에 우승팀이 정해지므로 이때의 확률은

$${}_6C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{5}{16}$$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

		5	6	7	계
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	1

$$E(X)=4\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{5}{16}+7\times\frac{5}{16}=\frac{93}{16}$$

$$\therefore E(16X)=16E(X)=16\times\frac{93}{16}=93$$

29. 수열의 극한 $\boxed{\text{정답 } 379}$

$= 1,\ a_2 = 21,\ a_3 = 422,\ a_4 = 8444,$

$a_5 = 168888,\ \cdots$에서

$a_n = 2^{n-1} \times 10^{n-1} + 2^{n-2}\ 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1)$

$= 20^{n-1} + 2^{n-2} \times \frac{10^{n-1} - 1}{10 - 1}$

$= \frac{20^n}{20} + \frac{20^n}{360} - \frac{2^n}{36}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{20^n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{20^n}{20} + \frac{20^n}{360} - \frac{2^n}{36}}{20^n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{20} + \frac{1}{360} - \frac{1}{36 \times 5^n}}{1}$

$= \frac{1}{20} + \frac{1}{360}$

$= \frac{19}{360}$

$\therefore p + q = 360 + 19 = 379$

30. 다항함수의 적분법 $\boxed{\text{정답 } 18}$

조건 (나)에서 $x = 0$을 대입하면 $f\ 1) = h(y)$

$h(y) = 1\,(\because f(1) = 1)$

$\therefore f(xy + 1) = xg(y) + 1$ ……

㉠에 $y = 1$을 대입하면

$f(x + 1) = xg(1) + 1$

$\therefore f(x + 1) = 2x + 1\,(\because g(1) = 2)$

$x + 1 = t$라 하면 $f(t) = 2(t - 1) + 1 = 2t - 1$

$\therefore f(x) = 2x - 1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2(xy + 1) - 1 = xg(y) + 1$

$2xy + 1 - xg(y) - 1 = 0,\ x\{2y - g(y)\} = 0$

모든 실수 x, y에 대하여 위 식이 항상 성립해야 하므로

$\therefore g(y) = 2y$

$\therefore {}_0^3\{f(x) + g(x) + h(x)\}\ dx$

$= \int_0^3 (2x - 1 + 2x + 1)\ dx = \int_0^3 4x\ dx = \left[2x^2\right]_0^3$

$= 18$