수리 영역(이과)

1. ②	**2.** ①	**3.** ②	**4.** ②	**5.** ④
6. ④	**7.** ③	**8.** ③	**9.** ①	**10.** ②
11. ④	**12.** ①	**13.** ①	**14.** ⑤	**15.** ④
16. ③	**17.** ⑤	**18.** ②	**19.** ⑤	**20.** ③
21. ④	**22.** ③	**23.** ③	**24.** ①	**25.** 17
26. 69	**27.** 12	**28.** 17	**29.** 379	**30.** 18

1. 지수함수와 로그함수 정답 ②

$$\times 24^{-\frac{2}{3}} = 3^{10})^{\frac{1}{6}} \times (2^3 \times 3)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= 3^{\frac{5}{3}} \times 2^{-2} \times 3^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

2. 함수의 극한과 연속 정답 ①

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2x-\pi)^2}$ 에서 $x - \frac{\pi}{2} = t$라 치환하면

$2x - \pi = 2t,\ \cos\ \frac{\pi}{2} + t\Big) = \sin t$

$x \to \frac{\pi}{2}$일 때, $t \to 0$이므로

$\therefore \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin^2 t}{(2t)^2} = \frac{1}{4} \quad \because \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\Big)$

3. 미분법 정답 ②

$x^2 + xy + y^2 = 7$에서 y를 x에 대한 함수로 보고, 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y}{x+2y}$ (단, $x \neq -2y$) ……

따라서 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $x=2,\ y=1$을 ㉠에 대입하면 $-\frac{5}{4}$이다.

4. 적분법 정답 ②

$$4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ {}_{k=1}^{n}\quad 2-\left(\frac{k}{n}\right)^2 = 4\ {}_0^1\quad 2-x^2\,dx$$

$x = \quad 2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면

$\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2}\cos\theta$이고

$x=0$일 때, $\theta = 0,\ x=1$일 때, $\theta = \frac{\pi}{4}$이므로

$$4\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 4\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi + 2$$

5. 통계 정답 ④

표본의 크기가 25인 표본평균 는 정규분포

$\mathrm{N}\ 50,\ \frac{10^2}{25}\Big) = \mathrm{N}\ 50,\ 2^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}\ 48 \le \overline{X} \le 54) = \mathrm{P}\left(\frac{48-50}{2} \le Z \le \frac{54-50}{2}\right)$$

$$= \mathrm{P}\ -1 \le Z \le 2)$$

$$= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$$

6. 순열과 조합 정답 ④

정회원 2명에게 사은품을 각각 2개, 준회원 2명에게 사은품을 각각 1개씩 나누어 준 후 남은 4개의 사은품을 4명에게 나누어 주면 된다. 즉, 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수를 구하면

$${}_{4+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_3$$

$$= \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 35$$

7. 지수함수와 로그함수

정답 ③

네 점 $A\left(\frac{b}{4},\ a^{\frac{b}{4}}\right)$, $B(a,\ a^a)$, $C(b,\ b^b)$, $D(1,\ b)$에서 두 점 A와 C의 y좌표가 같으므로

$a^{\frac{b}{4}} = b^b$ …… ㉠

두 점 B와 D의 y좌표가 같으므로

$a^a = b$ …… ㉡

㉡의 양변을 b제곱하면 $a^{ab} = b^b$

㉠에서 $a^{\frac{b}{4}} = a^{ab}$

$\frac{b}{4} = ab,\ a = \frac{1}{4}$ $(\because b > 0)$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$

$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$

8. 지수함수와 로그함수

정답 ③

현재$(t=0)$의 개체 수가 5000이므로

$\log 5000 = k$

개체 수가 처음으로 1000보다 적어지는 때는 n년 후이므로

$\log 1000 > \log 5000 + n\log\frac{4}{5}$

$= \log 5000 + n\{\log 2^2 - (1 - \log 2)\}$

$= \log 5000 + n(-0.097)$ $(\because \log 2 = 0.3010)$

$\log\frac{1}{5} > n(-0.097),\ 0.699 < 0.097n,\ n > 7.206\cdots$

$\therefore n = 8$

9. 일차변환과 행렬

정답 ①

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$에서 점 $B(-1,\ -1)$

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 점 $D(2,\ 0)$

$\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} \bullet (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB})$

$= (-1,\ -1) \bullet (3,\ 1) = -4$ …… ㉠

두 벡터 $\overrightarrow{OB}$와 $\overrightarrow{BD}$가 이루는 각의 크기가 θ이므로

$\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{OB}| \times |\overrightarrow{BD}| \times \cos\theta$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{10}\cos\theta$

$= 2\sqrt{5}\cos\theta$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $2\sqrt{5}\cos\theta = -4$

$\therefore \cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

10. 수열

정답 ②

$x + y = 1,\ xy = -1$에서 두 실수 $x,\ y$는 근과 계수의 관계에서 이차방정식 $t^2 - t \boxed{-1} = 0$의 두 근이다.
이차방정식의 근의 공식을 이용하면

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $(\because x > y)$

$a_n = \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1}$

$= x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}$ …… (*)

(*)은 첫째항이 x^{n-1}이고 공비가 $\frac{y}{x}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$= \frac{x^{n-1}\left\{1-\left(\frac{y}{x}\right)^n\right\}}{1-\frac{y}{x}} = \frac{x^{n-1}-\frac{y^n}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

$$= \frac{x^n-y^n}{x-y} = \frac{\boxed{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}}{5}$$

$$\therefore m=-1,\ f(n)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$f(3)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\times$$

$$\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}$$

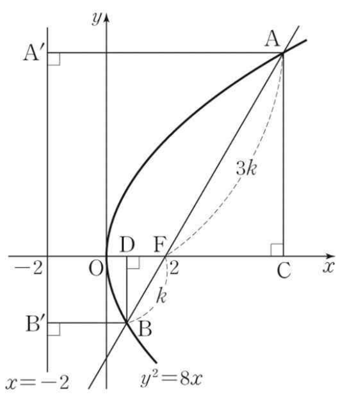
$$=\sqrt{5}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-1+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$=2\sqrt{5}$$

$$\therefore m+\{f(3)\}^2=-1+(2\sqrt{5})^2=19$$

11. 이차곡선

정답 ④



초점은 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이고, 준선이 $x=-2$인 포물선 $y^2=8x$가 $\mathrm{AF} : \mathrm{BF}=3:1$이므로 적당한 양수 k에 대하여

$\overline{\mathrm{AF}}=3k,\ \overline{\mathrm{BF}}=k$

두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}=\mathrm{AA'},\ \overline{\mathrm{BF}}=\mathrm{BB'}$

두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면 두 삼각형 $\triangle\mathrm{AFC}$와 $\triangle\mathrm{BFD}$는 서로 합동이다.

$\overline{\mathrm{AF}} : \overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{CF}} : \overline{\mathrm{DF}}$에서

$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{AA'}}-4,\ \overline{\mathrm{DF}}=4-\overline{\mathrm{BB'}}$이므로

$3:1=3k-4:4-k$

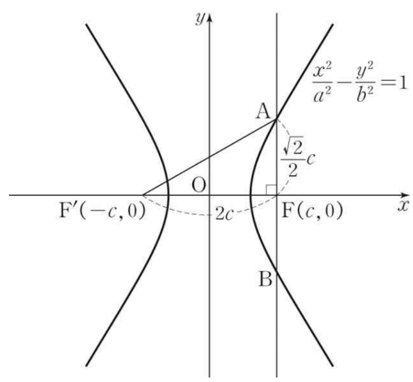
$3k-4=12-3k,\ 6k=16$

$\therefore k=\frac{8}{3}$

따라서 선분 AB의 길이는 $4k=\frac{32}{3}$

12. 이차곡선

정답 ①



쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$이므로 또 다른 초점을 $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$이라 하자.

직각삼각형 $\triangle\mathrm{AFF'}$에서 피타고라스의 정리를 이용하면

$\overline{\mathrm{AF'}}^2=\overline{\mathrm{AF}}^2+\mathrm{FF'}^2$

$$\overline{\mathrm{AF'}}^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(2c)^2=\frac{1}{2}c^2+4c^2=\frac{9}{2}c^2$$

$$\overline{\mathrm{AF'}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}c\ (\because c>0)$$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=2a$

$$2a=\frac{3\sqrt{2}}{2}c-\frac{\sqrt{2}}{2}c=\sqrt{2}c$$

$c = \quad 2a$
쌍곡선에서 $a \quad + b^2 = c^2$ 이므로 $a^2 + b^2 = 2a^2$
$a^2 = b^2$
$\therefore a = b (\because a > 0,\ b > 0)$

13. 미분법

정답 ①

$f \ x) = 2\sin 2x + 4\sin x - 4\cos x + 1$ 에서

$f'(x) = 4\cos 2x + 4\cos x + 4\sin x$

$= 4 \ \cos^2 x - \sin^2 x) + 4\cos x + 4\sin x$

$= 4(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + 4(\cos x + \sin x)$

$= 4(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x + 1)$

$f'(x) = 0$ 에서 $\cos x = -\sin x$ 또는 $\sin x = \cos x + 1$

(ⅰ) $\cos x = -\sin x$ 에서 $x = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi,\ \cdots$

(ⅱ) $\sin x = \cos x + 1$ 에서 $x = \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \cdots$

함수 $y = f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$
$'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	$4 \quad 2-1$	↗	5	↘	$-4\sqrt{2}-1$	↗

따라서 최댓값은 5, 최솟값은 $-4\sqrt{2}-1$ 이므로 구하는 값은 $4-4\sqrt{2}$

14. 적분법

정답 ⑤

$$f(x) = \int_1^x (x^2 - t)\,dt$$

$$= \left[x^2 t - \frac{t^2}{2}\right]_1^x = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$f'(x) = 3x^2 - 3x$

직선 $y = 6x - k$ 가 곡선 $y = f(x)$ 에 접하므로

접점 $(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$f'(a) = 6,\ 3a^2 - 3a = 6,\ a^2 - a - 2 = 0$

$(a-2)(a+1) = 0$ 에서 $a = -1$ 또는 $a = 2$

(ⅰ) $a = -1$ 일 때, 접선의 방정식은 $y = 6x + 4$

(ⅱ) $a = 2$ 일 때, 접선의 방정식은 $y = 6x - \frac{19}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 양수 k 의 값은 $\frac{19}{2}$ 이다.

15. 일차변환과 행렬

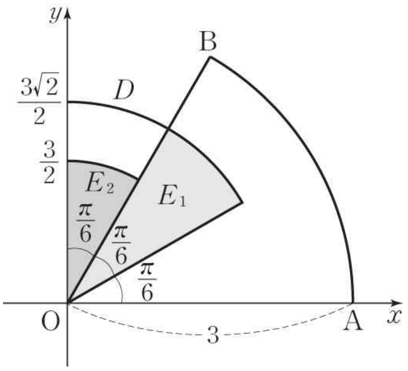
정답 ④

일차변환 f 를 나타내는 행렬을 이라 하면

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

행렬 M 은 원점을 닮음의 중심으로 하는 닮음비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 닮음변환과 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼 회전하여 옮기는 회전변환의 합성변환이다.



두 도형 　과 E_2의 넓이인 S_1과 S_2를 각각 구하면

$$S_1 \quad \frac{1}{2}\times \quad \frac{3}{\ \,2}\Big)^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{3}{8}\pi$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\times \ \frac{3}{2}\Big)^2 \times \frac{\pi}{6} = \ \frac{3}{16}\pi$$

$$\therefore S_1 + S_2 = \frac{3}{8}\pi + \frac{3}{16}\pi = \frac{9}{16}\pi$$

16. 함수의 극한과 연속 　정답 ③

ㄱ. (참) 함수 $f\ \ x-1)$에서 $x-1=t$라 치환하면 $x\to 0$일 때, $t\to -1$

$$\lim_{t\to -1} f(t) = 1 = f(-1)$$

함수 $f(x-1)$은 $x=0$에서 극한값과 함숫값이 같으므로 연속이다.

ㄴ. (거짓)

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)f(-x) = \lim_{x\to 1+0} f(x) \times \lim_{x\to 1+0} f(-x)$$

$$= -1 \times \lim_{s\to -1-0} f(s)$$

$$= -1 \times 1 = -1$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)f(-x) = \lim_{x\to 1-0} f(x) \times \lim_{x\to 1-0} f(-x)$$

$$= 0 \times \lim_{t\to -1+0} f(t)$$

$$= 0 \times 1 = 0$$

함수 $f(x)f(-x)$의 $x=1$에서의 좌극한과 우극한이 서로 다르므로 불연속이다.

ㄷ. (참) 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 함숫값 1로 연속이므로

$$\lim_{x\to 3} f(f(x)) = \lim_{x\to 1} f(x)\text{에서}$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 0$$

합성함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17. 행렬과 그래프 　정답 ⑤

ㄱ. (참) $B^2A = B(BA) = B(AC) = (BA)C$

$$= (AC)C = AC^2$$

ㄴ. (참) 행렬 B의 역행렬이 존재하므로

$ABAB = AABB$의 오른쪽에 B^{-1}을 연산하면

$ABA = AAB$ 　　　　　　…… ㉠

$A(BA)B = AACB$의 오른쪽에 B^{-1}을 연산하면

$ABA = AAC$ 　　　　　　…… ㉡

㉠과 ㉡에서 $A^2B = A^2C$

ㄷ. (참) AC의 역행렬이 존재하므로 A와 C의 역행렬이 각각 존재하고 $BA = AC$에서 BA의 역행렬이 존재한다. 그러므로 B의 역행렬이 존재한다. ㄴ에서 A의 역행렬을 $A^2B = A^2C$의 왼쪽에 곱하면 $B = C$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

18. 미분법 　정답 ②

극한값 $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 가 존재할 때, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

ㄱ. (거짓) $\lim_{h\to 0} \frac{f\ \ a+h^2) - f(a)}{h^2}$ 가 존재하므로 $h^2 = t$라

하면 우극한 $\lim\limits_{\to +0} f\ a+t)-f(a)$ 가 존재한다. 그러나

좌극한 $\lim\limits_{t\to -0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$ 의 존재여부는 알 수

없다.

ㄴ. (참) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\ a+h^3)-f(a)}{h^3}$ 가 존재하므로 $h^3=t$라

하면 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$ 가 존재한다.

ㄷ. (거짓) 【반례】 $f(x)=|x|$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{2h}=0$$

$x=0$일 때, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 의 값이

존재하지만 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서

미분가능하지 않다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ이다.

19. 적분법

정답 ⑤

ㄱ. (참) 닫힌 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서

$1+\sin x\ge 0,\ \sin 2x\ge 0$이므로

$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x}\ge 0$이다.

ㄴ. (참) 함수 $f(x)$는 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 연속이고, 열린

구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능하다. 또한

$f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$이므로 롤의 정리에 의하여

$f'(c)=0$인 c가 열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.

ㄷ. (참) 함수 $f(x)$의 그래프가 x축으로 둘러싸인 부분의

넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin x}dx$$

에서 $\sin x=t$라 하면 $\cos x\,dx=dt$이고,

$x=0$이면 $t=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$이면 $t=1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin x}dx=\int_0^1\frac{2t}{1+t}dt$$

$$=\int_0^1\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt$$

$$=\left[2t-2\ln(1+t)\right]_0^1$$

$$=2-2\ln 2$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20. 미분법

정답 ③

$f(x)=\dfrac{(\ln x)^6}{x^2}$ 에서

$$f'(x)=\frac{\left\{\dfrac{6(\ln x)^5}{x}\right\}x^2-(\ln x)^6(2x)}{x^4}$$

$$=\frac{6(\ln x)^5-2(\ln x)^6}{x^3}$$

$$=2(\ln x)^5\left(\frac{3-\ln x}{x^3}\right)$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=e^3$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

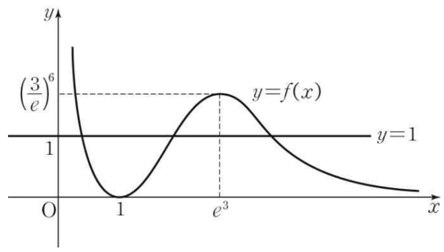
x	$\cdots$	1	$\cdots$	e^3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\left(\dfrac{3}{e}\right)^6$	↘

ㄱ. (참) 위 증가와 감소 표에서 함수 $f(x)$는 $x=e^3$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. (거짓) 위 증가와 감소 표에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서

극솟값을 갖는다.

ㄷ. (참) $3\Big) > 1\left(\because \frac{3}{e} > 1\right)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 방정식 $f\ x)=1$의 실근의 개수는 3개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. 확률 정답 ④

수신 신호가 1이었을 사건을 , 송신 신호가 1이었을 사건을 B라 하면 구하는 확률은

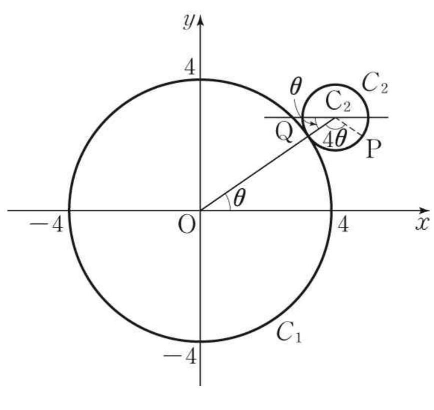
$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

$$\mathrm{P}(B)=0.4\times 0.05+0.6\times 0.95$$

$\mathrm{P}(A\cap B)=0.6\times 0.95$이므로

$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{57}{59}$$

22. 적분법 정답 ③



반지름의 길이가 각각 4, 1인 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 O, C_2라 하면 두 원의 중심을 연결한 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, C_2의 좌표는

$$\mathrm{C}_2(5\cos\theta,\ 5\sin\theta)$$

점 C_2를 지나고 x축에 평행인 직선을 그어 원 C_1과 만나는 점의 좌표를 Q라 하면 엇각의 성질에 의하여

$$\angle \mathrm{QC_2O}=\theta$$

두 원 C_1, C_2의 호의 길이의 비가 $4:1$이므로

$$\angle \mathrm{OC_2P}=4\theta$$

그러므로 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}(5\cos\theta+\cos(\pi+5\theta),\ 5\sin\theta+\sin(\pi+5\theta))$$

$$\mathrm{P}(5\cos\theta-\cos5\theta,\ 5\sin\theta-\sin5\theta)$$

따라서 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 점 P가 움직인 거리는

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-5\sin\theta+5\sin5\theta)^2+(5\cos\theta-5\cos5\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{50-50(\cos\theta\cos5\theta+\sin\theta\sin5\theta)}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{50-50\cos4\theta}\,d\theta$$

$$=5\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos4\theta}\,d\theta$$

$$=5\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\sin^2 2\theta}\,d\theta$$

$$=10\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\,d\theta$$

$$=10\left[-\frac{1}{2}\cos2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

10

23. 수열

정답 ③

주어진 조건을 이용하여 두 수열 a }, $\{b_n\}$을 구해보면

$a_1=0,\ b_1=2$

$a_2=0+\dfrac{2}{2}=1,\ b_2=2-1=1$

$a_3=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3},\ b_3=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

$a_4=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\frac{4}{3}}{4}=1,\ b_4=\dfrac{4}{3}-\dfrac{\frac{4}{3}}{4}=1$

$a_5=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5},\ b_5=1+\dfrac{1}{5}=\dfrac{6}{5}$

⋮

$a_{2n-1}=\dfrac{2n-2}{2n-1},\ a_{2n}=1$

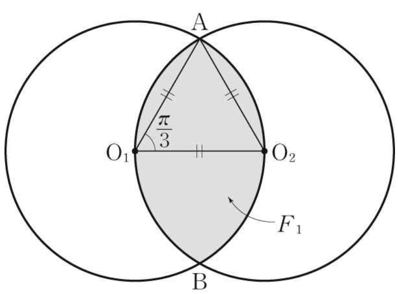
$b_{2n-1}=\dfrac{2n}{2n-1},\ b_{2n}=1$

따라서 $a_{41}=\dfrac{40}{41}$ 에서 $p=41,\ q=40$

$\therefore p+q=81$

24. 수열의 극한

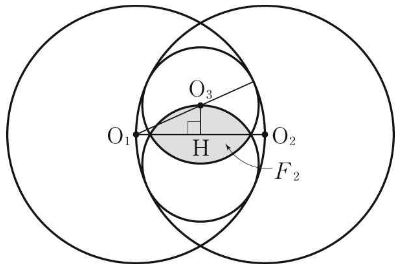
정답 ①



중심이 각각 O_1, O_2인 두 원 $_1$, O_2의 교점을 각각 A, B라 하면 두 원의 반지름의 길이가 3이므로 선분 O_1A, O_2A, O_1O_2의 길이가 모두 3이다. 그러므로 $\triangle O_1AO_2$는 정삼각형이 되므로

$\angle AO_1O_2=\dfrac{\pi}{3},\ \angle AO_1B=\dfrac{2}{3}\pi$

$\therefore l_1=3\times\dfrac{2}{3}\pi\times 2=4\pi$



중심이 O_3인 원 O_3의 반지름의 길이를 r $0<r<3)$라 하고 중심 O_3에서 선분 O_1O_2에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle O_1HO_3$은 직각삼각형이다. 그러므로 피타고라스의 정리에 의하여

$O_1H^2+\overline{O_3H}^2=O_1O_3{}^2$

$\overline{O_1H}=\dfrac{3}{2},\ \overline{O_3H}=\dfrac{r}{2},\ \overline{O_1O_3}=3-r$에서

$\left.\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{r}{2}\right)^2=(3-r)^2,\ r^2-8r+9=0$

이차방정식의 근의 공식에서 $r=4-\ \ 7\ (\because 0<r<3)$

$\therefore l_2=\ 4-\sqrt{7})\times\dfrac{2}{3}\pi\times 2=\dfrac{4(4-\sqrt{7})}{3}\pi$

두 도형 F_1과 F_2의 닮음의 비는 $3:4-\sqrt{7}$

그러므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 4π, 공비가 $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$ 인 등비수열이다.

$\therefore \ {}_{n=1}^{\infty} l_n=\dfrac{4\pi}{1-\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}}$

$=2\pi(1+\sqrt{7})$

25. 방정식과 부등식

$\boxed{\text{정답 } 17}$

$\frac{1}{\ } + \frac{1}{x-12} = \frac{2}{5}$ (단, $x \neq 0$ 또는 $x \neq 12$)에서 양변에 $5x\ x-12)$를 곱하면

$5(2x-12)=2x(x-12),\ \ 10x-60=2x\ \ -24x$

$x^2-17x+30=0,\ (x-2)(x-15)=0$

$x=2$ 또는 $x=15$

따라서 구하는 모든 실근의 합은 17

26. 벡터

$\boxed{\text{정답 } 69}$

두 점 $\mathrm{B}(1,\ -1,\ 2)$, $\mathrm{C}(5,\ -3,\ 8)$을 지나는 직선의 방정식은 $l : \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{6}$

점 $\mathrm{A}(4,\ 6,\ 7)$에서 직선 l 위에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로 임의의 실수 t에 대하여 점 H는 $\mathrm{H}(4t+1,\ -2t-1,\ 6t+2)$

직선 l의 방향벡터를 $\vec{v}=(4,\ -2,\ 6)$이라 하면

$\mathrm{A}\vec{\mathrm{H}} \perp \vec{v}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \vec{v}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(4t-3,\ -2t-7,\ 6t-5)$에서

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \vec{v}=(4t-3,\ -2t-7,\ 6t-5)\cdot(4,\ -2,\ 6)$

$=16t-12+4t+14+36t-30$

$=56t-28=0$

$\therefore t=\frac{1}{2},\ \mathrm{H}(3,\ -2,\ 5)$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ -8,\ -2)$

$\therefore\ \ \overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2=69$

27. 적분법

$\boxed{\text{정답 } 12}$

$=\pi\ {}_1^e(\ln x+3)^2-\ \ln\frac{1}{x}+3\Big)^2 dx$

$=12\pi\int_1^e \ln x\ \ dx$

부분적분법을 이용하여 적분하면

$12\pi\int_1^e \ln x\ \ dx=12\pi\left[x\ln x-x\right]_1^e$

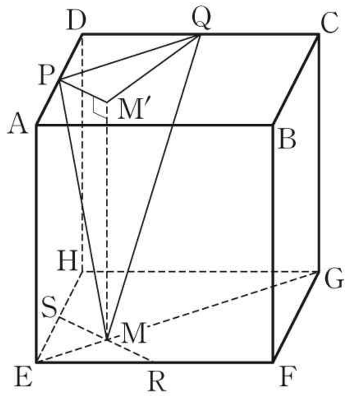
$=12\pi(e-e+1)$

$=12\pi$

$\therefore\ \frac{V}{\pi}=12$

28. 공간도형과 공간좌표

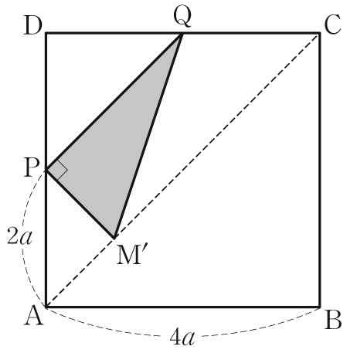
$\boxed{\text{정답 } 17}$



양수 a에 대하여 정육면체 ABCD－EFGH의 한 변의 길이를 $4a$라 하자. 점 H가 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축 위에 놓아 공간좌표 위의 공간도형이라고 하자.

평면 EFGH와 평면 ABCD가 서로 평행하므로 평면 PMQ와 평면 ABCD가 이루는 예각의 크기도 θ이다. 점 M의 평면 ABCD 위로 정사영을 점 M′이라 하면

△MPQ의 넓이= △ M′PQ의 넓이$\times \cos\theta$ ……



$\triangle$ M′PQ의 넓이 $a \quad 2\times 2a\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=2a$

점 M에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 K라 하면

$\triangle$MPQ의 넓이$=\mathrm{MK}\times\mathrm{PQ}\times\dfrac{1}{2}$

두 점 P$(2a,\ 0,\ 4a)$, Q$(0,\ 2a,\ 4a)$를 지나는 직선의 방정식은

$$l:\ \frac{x}{2a}=\frac{y-2a}{-2a},\ z=4a$$

점 K는 직선 l 위의 점이므로 적당한 실수 t에 대하여

K$(2at,\ -2at+2a,\ 4a)$

M$(3a,\ a,\ 0)$에서 $\overrightarrow{\mathrm{MK}}=(2at-3a,\ -2at+a,\ 4a)$

직선 l의 방향벡터가 $(2a,\ -2a,\ 0)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{MK}}\perp(2a,\ -2a,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{MK}}\bullet(2a,\ -2a,\ 0)=0$,

$4a^2t-6a^2+4a^2t-2a^2=0,\ \therefore t=1$

$\therefore$ K$(2a,\ 0,\ 4a)$

즉, 점 K는 점 P와 같다.

직각삼각형 $\triangle$MPQ의 넓이는

$$\mathrm{MP}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\frac{1}{2}=\sqrt{18}\,a\times2\sqrt{2}\,a\times\frac{1}{2}=6a^2$$

에서 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\tan\theta=2\sqrt{2},\ \sec\theta=3$

$\therefore\tan^2\theta+\sec^2\theta=8+9=17$

29. 수열의 극한

정답 379

$a_1=1,\ a_2=21,\ a_3=422,\ a_4=8444,$

$a_5=168888,\ \cdots$에서

$a_n=2^{n-1}\times10^{n-1}+2^{n-2}\ 10^{n-2}+\cdots+10+1)$

$\quad=20^{n-1}+2^{n-2}\times\dfrac{10^{n-1}-1}{10-1}$

$\quad=\dfrac{20^n}{20}+\dfrac{20^n}{360}-\dfrac{2^n}{36}$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{20^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{20^n}{20}+\dfrac{20^n}{360}-\dfrac{2^n}{36}}{20^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{360}-\dfrac{1}{36\times5^n}}{1}$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{1}{360}$$

$$=\frac{19}{360}$$

$\therefore p+q=360+19=379$

30. 적분법

정답 18

조건 (나)에서 $x=0$을 대입하면 $f\ 1)=h(y)$

$h(y)=1\ (\because f(1)=1)$

$\therefore f(xy+1)=xg(y)+1 \qquad\cdots\cdots$ ㉠

에 $=1$을 대입하면

$f\ x+1)=xg(1)+1$

$\therefore f(x+1)=2x+1(\because g(1)=2)$

$x+1=t$라 하면 $f(t)=2(t-1)+1=2t-1$

$\therefore f(x)=2x-1$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2(xy+1)-1=xg(y)+1$

$2xy+1-xg(y)-1=0,\ x\{2y-g(y)\}=0$

모든 실수 x, y에 대하여 위 식이 항상 성립해야 하므로

$\therefore g(y)=2y$

$\therefore\ {}^{3}\{f(x)+g(x)+h(x)\}\ dx$

$=\int_0^3(2x-1+2x+1)\ dx$

$=\int_0^3 4x\ dx=\ 2x^2\Big]_0^3$

$=18$