제 3 교 시

2012학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

# 수 리 영 역 문과

| 성명 | |
|---|---|

| 수험번호 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

○ 먼저 문제지에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ 답안지에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 0이 포함된 경우에는 0을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

육 군 사 관 학 교

공 란

1. 자연수 $n$에 대하여 $a_n = \sqrt{4n+1-2\sqrt{4n^2+2n}}$, $b_n = \sqrt{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $1$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 함수 $f(x) = x\lim_{n\to\infty}\frac{2-x^{2n}}{2+x^{2n}}$에 대하여 $\lim_{x\to-1-0} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to1-0} f(x) = \beta$라 할 때, $\alpha\beta$의 값은? [2점]

① $-4$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $4$

3. $0$이 아닌 서로 다른 세 실수 $p$, $q$, $r$에 대하여 삼차함수 $f(x)=(x-p)(x-q)(x-r)$라 할 때, $\frac{p^2}{f'(p)}+\frac{q^2}{f'(q)}+\frac{r^2}{f'(r)}$의 값은? [3점]

① $-1$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $0$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $1$

4. 이차정사각행렬 $A$가 $A^2-2A=E$와 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$를 만족시킬 때, 행렬 $A^2$의 모든 성분의 합은? (단, $E$는 단위행렬이다.) [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

5. 정육면체 모양의 주사위 한 개를 세 번 던져서 나온 눈의 수를 나온 순서대로 $x$, $y$, $z$라 할 때, $x-y+z=7$이 될 확률은? [3점]

① $\frac{5}{72}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{7}{72}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

6. 이산확률변수 $X$가 값 $x$를 가질 확률이

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_6\mathrm{C}_x}{k} \quad (\text{단, } x=1, 2, 3, 4, 5, 6\text{이고, } k\text{는 상수이다.})$$

일 때, 확률변수 $X$의 기댓값을 $m$이라 하면 $mk^2=2^a\times 3^b\times 7^c$이다. 세 자연수 $a, b, c$의 합 $a+b+c$의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

7. 지질학에서 암석의 연대를 측정하는 방법 중 하나로 포타슘-40은 방사선 분해과정을 거쳐 일정한 비율로 아르곤-40으로 바뀌는 점을 이용한 포타슘-아르곤연대측정법을 사용한다. 암석이 생성되어 $t$ 년이 되었을 때, 포타슘-40과 아르곤-40의 양을 각각 $P(t)$, $A(t)$ 라 하면

$$2^t = \left\{1 + 8.3 \times \frac{A(t)}{P(t)}\right\}^c$$ (단, $c$는 상수이다.)

이 성립한다고 하자.

이 방법으로 암석의 연대를 측정하였을 때 포타슘-40의 양이 아르곤-40의 양의 20 배인 암석이 생성된 것은 $k$년 전이다. $k$의 값은? (단, $\log 1.415 = 0.15$, $\log 2 = 0.30$ 으로 계산한다.) [3점]

① $\frac{1}{3}c$ ② $\frac{1}{2}c$ ③ $2c$ ④ $3c$ ⑤ $4c$

8. 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 $S$라 하자. $S$의 부분집합인 세 사건 $A$, $B$, $C$는 다음 조건을 만족한다.

| |
|---|
| (가) $A \cup B \cup C = S$ |
| (나) 사건 $A \cap B$와 사건 $C$는 서로 배반이다. |
| (다) 사건 $A$와 사건 $B$는 서로 독립이다. |

$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(C) = \frac{2}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A|C) + \mathrm{P}(B|C)$의 값은? [3점]

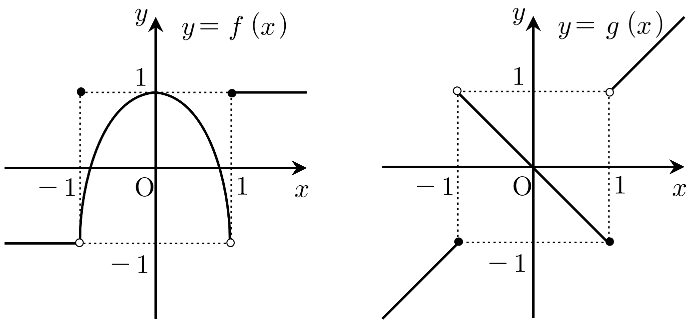
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

9. 곡선 $y=x^4+x^2$과 직선 $y=\frac{2}{n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $a_n$이라 하자.

$S=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 이라 할 때, $S$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{15}$　② $\frac{22}{15}$　③ $\frac{11}{5}$　④ $\frac{44}{15}$　⑤ $\frac{11}{3}$

10. 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.




<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. $\lim_{x \to -1} f(x)g(x) = -1$

ㄴ. $\lim_{x \to 1} f(x)g(x) = 1$

ㄷ. 함수 $y=f(x)g(x)$의 불연속점의 개수는 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

11. 이차함수 $f(x)$와 연속함수 $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$(x-2)g(x)=f(x)-f(2)$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. $\lim_{x\to 2} g(x)=f'(2)$

ㄴ. 모든 실수 $x$에 대하여 $(x-2)g'(x)=f'(x)-g(x)$

ㄷ. $x>2$일 때, $g(x)<f'(x)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

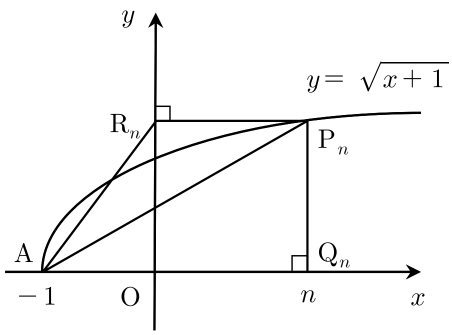
12. $x, y$에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_2 \dfrac{1}{y} = 1 \\ \log_9 3x + \log_{\frac{1}{2}} y = 1 - \dfrac{k}{2} \end{cases}$$

의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$라 할 때, $\alpha \leq \beta$를 만족시키는 정수 $k$의 최댓값은? [3점]

① $-5$ ② $-4$ ③ $-3$ ④ $-2$ ⑤ $-1$

13. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+1}$과 자연수 $n$에 대하여 그림과 같이 $y = f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}_n(n, f(n))$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{Q}_n$, $y$축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{R}_n$이라 하자.
점 $\mathrm{A}(-1, 0)$에 대하여 사각형 $\mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n$의 넓이를 $S_n$, 삼각형 $\mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n$의 넓이를 $T_n$이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} \dfrac{S_n + T_n}{S_n - T_n}$의 값은? [3점]




① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

14. 함수 $f(x)$를

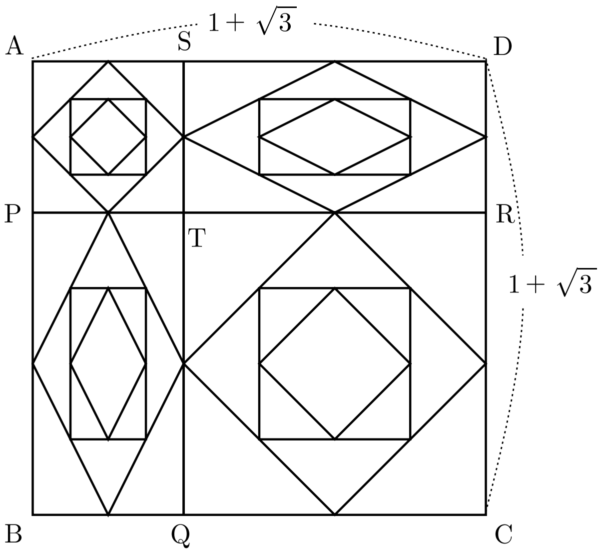
$$f(x)=\begin{cases} -x(x-1) & (0 \le x < 1) \\ -\dfrac{1}{4^n}(x-n)(x-n-1) & (n \le x < n+1) \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이라 정의하자. $S_n=\displaystyle\int_0^{n+1} f(x)\,dx$라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

15. 그림과 같이 한 변의 길이가 $1+\sqrt{3}$ 인 정사각형 ABCD 가 있다. 두 변 AB 와 BC 를 $1 : \sqrt{3}$ 으로 내분하는 점을 각각 P, Q 라 하고, 두 변 CD 와 DA 를 $\sqrt{3} : 1$ 로 내분하는 점을 각각 R, S 라 하자. 이 때, 두 선분 PR, QS 의 교점을 T 라 하고, 네 사각형 APTS, PBQT, TQCR, STRD 를 만든다.

먼저 사각형 APTS 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 $A_1$, 사각형 $A_1$ 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 $A_2$, 사각형 $A_2$ 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 $A_3$ 라 하자. 또, 사각형 PBQT 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 $B_1$, 사각형 $B_1$ 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 $B_2$, 사각형 $B_2$ 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 $B_3$ 라 하자. 또, 사각형 TQCR 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 $C_1$, 사각형 $C_1$ 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 $C_2$, 사각형 $C_2$ 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 $C_3$ 라 하자. 또, 사각형 STRD 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 $D_1$, 사각형 $D_1$ 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 $D_2$, 사각형 $D_2$ 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 $D_3$ 라 하자.




이와 같은 과정을 계속하여 사각형 $A_n, B_n, C_n, D_n$ 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 각각 $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ 이라 하자. 사각형 $A_n, B_n, C_n, D_n$ 의 넓이를 각각 $a_n, b_n, c_n, d_n$ 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+c_n-d_n)=p+q\sqrt{3}$ 을 만족시키는 두 유리수 $p, q$ 의 합 $p+q$ 의 값은? [3점]

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

16. 이차정사각행렬 $A$, $B$가 $A^2B^3=O$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $O$는 영행렬이고, $E$는 단위행렬이다.) [4점]

<보기>

ㄱ. 행렬 $AB$의 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄴ. 행렬 $A$의 역행렬이 존재하면 $AB=BA$이다.
ㄷ. $2A-B=E$이면 $(AB)^{2012}=O$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 자연수 $n$에 대하여 집합 $A_n$, $B_n$을

$$A_n=\{(n,k)\mid k\le n^2+n,\ k\text{는 자연수}\}$$

$$B_n=\left\{(n,k)\,\middle|\, k\le \frac{1}{2}n+5,\ k\text{는 자연수}\right\}$$

라 하자. 집합 $A_n-B_n$의 원소의 개수를 $a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은? [4점]

① 2883　② 2886　③ 2889　④ 2892　⑤ 2895

18. 다음은 모든 자연수 $n$에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{[\log 3^k]}{k} \le [\log 3^n] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 증명한 것이다. (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대 정수이다.)

<증명>

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=[\log 3]$, (우변)$=[\log 3]$이므로 (*)이 성립한다.

(2) 임의의 자연수 $i$에 대하여

$$a_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{[\log 3^k]}{k}, \quad b_i = (i+1)(a_{i+1} - a_i)$$

라 하면 $b_i = \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

이 때, $n \le m$ ($m$은 자연수)일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$a_i \le [\log 3^i]$ (단, $i$는 $m$ 이하의 자연수이다.)

이제, $n = m+1$ 일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m} b_k = (m+1)a_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k - a_1$$

이므로 $(m+1)a_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} a_k + \boxed{\text{(나)}}$

그런데 $[\log 3^k] + [\log 3^{m+1-k}] \le [\log 3^{m+1}]$ 이므로

$$\begin{aligned}(m+1)a_{m+1} &\le \sum_{k=1}^{m} [\log 3^k] + \sum_{k=1}^{m+1} [\log 3^k] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left([\log 3^k] + [\log 3^{m+1-k}]\right) + \boxed{\text{(다)}} \\ &\le m[\log 3^{m+1}] + [\log 3^{m+1}] \\ &= (m+1)[\log 3^{m+1}]\end{aligned}$$

$\therefore\ a_{m+1} \le [\log 3^{m+1}]$

그러므로 $n = m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 (1)과 (2)에 의해 모든 자연수 $n$에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(i)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(n)+g(n)-h(n)=9$를 만족시키는 자연수 $n$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

19. 양의 실수 $x$에 대하여 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{[x]+1}$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대 정수이다.) [4점]

<보기>

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x \to 2} f(x)=\dfrac{1}{2}$

ㄷ. $\lim_{x \to \infty} f(x)=1$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 임의의 실수 $x, y$에 대하여 $x\{f(x+y)-f(x-y)\}=4y\{f(x)+g(y)\}$를 만족시킨다. $f(1)=4$, $g(0)=1$일 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

21. 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n x^{18}}{(9+x^{2p})^n}$에 대하여 $f(x)$가 실수전체의 집합에서 연속이기 위한 자연수 $p$의 개수는? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

22. $0 < a < \frac{1}{2}$일 때, 곡선 $y = x^2$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(a, a^2)$에서 그은 접선 $l$이 $x$축 위의 점 A에서 만난다. 접선 $l$을 $x$축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 $m$이라 하고, 직선 $m$이 $y$축과 만나는 점을 B라 하자. 또, 점 A를 지나고 접선 $l$에 수직인 직선을 $n$이라 할 때, 직선 $n$이 $y$축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $S(a)$의 극댓값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{144}$ ② $\frac{1}{48}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{72}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{6}$

23. $0 < a < b < 1$ 일 때, 직선 $y = 1$ 이 $y = \log_a x$ 의 그래프와 $y = \log_b x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q 라 하고 직선 $y = -1$ 이 $y = \log_a x$ 의 그래프와 $y = \log_b x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 R, S 라 하자. 네 직선 PS, PR, QS, QR 의 기울기를 각각 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [4점]

① $\delta < \alpha < \beta < \gamma$
② $\gamma < \alpha < \delta < \beta$
③ $\gamma < \alpha < \beta < \delta$
④ $\gamma < \alpha = \delta < \beta$
⑤ $\alpha = \delta < \beta < \gamma$

24. $1$ 보다 큰 실수 $a$ 에 대하여 두 함수 $f(x) = a^{2x}$, $g(x) = a^{x+1} - 2$ 가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = |f(x) - g(x)|$ 라 하자. $y = h(x)$ 의 그래프에 대한 설명으로 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $a = 2\sqrt{2}$ 일 때 $y = h(x)$ 의 그래프와 $x$ 축은 한 점에서 만난다.

ㄴ. $a = 4$ 일 때 $x_1 < x_2 < \frac{1}{2}$ 이면 $h(x_1) > h(x_2)$ 이다.

ㄷ. $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 이 오직 한 점에서 만나는 $a$ 의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

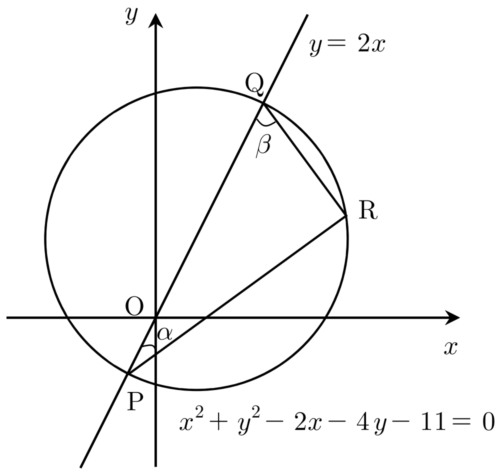
## 주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 $n$항까지의 합을 $S_n$ 이라 하자. $a_{10}-a_1=27$ , $S_{10}=a_{10}$ 일 때, $S_{10}$ 의 값을 구하시오. (단, $n=1, 2, 3, \cdots$ ) [2점]

26. $2\sum_{k=1}^{5} x_k + 3\sum_{k=6}^{10} x_k = 8$ 을 만족시키는 서로 다른 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{10})$ 의 개수를 구하시오. (단, $x_i$ 는 음이 아닌 정수이고 $i=1, 2, 3, \cdots, 10$ 이다.) [3점]

27. 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $g(x)$는 $f(x)$의 도함수이고, $h(x)$는 $g(x)$의 도함수라 하자. 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)+h(x)=2g(x)+x^4+1$이 성립할 때, $f(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 좌표평면 위에서 원 $x^2+y^2-2x-4y-11=0$ 과 직선 $y=2x$ 가 만나는 두 점을 P, Q 라 하고 직선 $y=2x$ 위에 있지 않은 원 위의 한 점을 R 라 하자. $\angle \mathrm{QPR}=\alpha$, $\angle \mathrm{RQP}=\beta$ 에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix}$ 가 $8A^2=4A+7E$ 를 만족시킬 때, 삼각형 PQR 의 넓이는 $S$ 이다. $S^2$ 의 값을 구하시오. (단, $E$ 는 단위행렬이다.) [4점]



29. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n)$이 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $f(3)=10$ |
| (나) $f(n+2)=2f(n) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,8)$ |
| (다) $f(n+10)=f(n) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ |

$\sum_{n=1}^{100} f(n)=2170$일 때, $f(100)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2$이고, $g'(x)=2x$이다. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 두 점에서 만날 때, $f(0)-g(0)$의 값들의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$, $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]