# 수리 영역(문과)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. ⑤ | 2. ④ | 3. ⑤ | 4. ② | 5. ① |
| 6. ③ | 7. ② | 8. ④ | 9. ④ | 10. ⑤ |
| 11. ③ | 12. ③ | 13. ③ | 14. ② | 15. ⑤ |
| 16. ③ | 17. ① | 18. ② | 19. ④ | 20. ① |
| 21. ④ | 22. ① | 23. ② | 24. ③ | 25. 15 |
| 26. 145 | 27. 54 | 28. 60 | 29. 32 | 30. 28 |

### 1. 수열의 극한 　　정답 ⑤

$$= \quad 4n+1-2 \quad 4n^2+2n$$

$$= \quad (2n+1)+2n-2 \quad 2n(2n+1)$$

$$= \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$$

$$b_n = \sqrt{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}$$

$$= \sqrt{(n+1)+n-2\sqrt{n(n+1)}}$$

$$= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{2+\frac{1}{n}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

### 2. 함수의 극한과 연속 　　정답 ④

(ⅰ) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \infty$이므로

$$f(x) = x\lim_{n\to\infty} \frac{2-x^{2n}}{2+x^{2n}} = x\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{x^{2n}}-1}{\frac{2}{x^{2n}}+1} = -x$$

$$\therefore \alpha = \lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0}(-x) = 1$$

(ⅱ) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$이므로

$$f(x) = x\lim_{n\to\infty} \frac{2-x^{2n}}{2+x^{2n}} = x$$

$$\therefore \beta = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} x = 1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha\beta = 1$이다.

### 3. 다항함수의 미분법 　　정답 ⑤

$f(x) = (x-p)(x-q)(x-r)$에서

$f'(x) = (x-q)(x-r)+(x-p)(x-r)+(x-p)(x-q)$

이므로

$$\frac{p^2}{f'(p)} + \frac{q^2}{f'(q)} + \frac{r^2}{f'(r)}$$

$$= \frac{p^2}{(p-q)(p-r)} + \frac{q^2}{(q-p)(q-r)} + \frac{r^2}{(r-p)(r-q)}$$

$$= \frac{-p^2(q-r)-q^2(r-p)-r^2(p-q)}{(p-q)(q-r)(r-p)}$$

이때,

$-p^2(q-r)-q^2(r-p)-r^2(p-q)$

$=-p^2(q-r)+p(q+r)(q-r)-qr(q-r)$

$=-(q-r)\{p^2-p(q+r)+qr\}$

$=-(q-r)(p-q)(p-r)$

$=(p-q)(q-r)(r-p)$

$$\therefore \frac{p^2}{f'(p)} + \frac{q^2}{f'(q)} + \frac{r^2}{f'(r)} = 1$$

### 4. 행렬과 그래프 　　정답 ②

$$\left.\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots$$

양변의 왼쪽에 행렬 $A$를 곱하면

$$A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

그런데 $A^2-2A=E$에서 $A^2=2A+E$이므로

$$A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = (2A+E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$= 2A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + E\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $A\left.\begin{matrix}1 & 3\\2 & 4\end{matrix}\right) = \begin{pmatrix}3 & 7\\4 & 10\end{pmatrix}$이므로

$$A = \begin{pmatrix}3 & 7\\4 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 7\\4 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & -2\\-4 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2 = 2A+E$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 2\\4 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A^2$의 모든 성분의 합은

$3+2+4+3=12$

**《다른 풀이》**

$A^2-2A=E$에서 $A^{-1}=A-2E$이므로

㉠의 양변의 왼쪽에 $A^{-1}$를 곱하면

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = (A-2E)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$$

### 5. 확률 　　정답 ①

$x-y+z=7$에서 $x+z=7+y$

(ⅰ) $y=1$일 때, $x+z=8$이므로

순서쌍 $(x,\ z)$를 정하는 방법은 $(6,\ 2)$, $(5,\ 3)$, $(4,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(2,\ 6)$의 5가지이다.

(ⅱ) $y=2$일 때, $x+z=9$이므로

순서쌍 $(x,\ z)$를 정하는 방법은 $(6,\ 3)$, $(5,\ 4)$, $(4,\ 5)$, $(3,\ 6)$의 4가지이다.

(ⅲ) $y=3$일 때, $x+z=10$이므로

순서쌍 $(x,\ z)$를 정하는 방법은 $(6,\ 4)$, $(5,\ 5)$, $(4,\ 6)$의 3가지이다.

(ⅳ) $y=4$일 때, $x+z=11$이므로

순서쌍 $(x,\ z)$를 정하는 방법은 $(6,\ 5)$, $(5,\ 6)$의 2가지이다.

(ⅴ) $y=5$일 때, $x+z=12$이므로

순서쌍 $(x,\ z)$를 정하는 방법은 $(6,\ 6)$의 1가지이다.

(ⅰ)~(ⅴ)에서 구하는 확률은

$$\frac{5+4+3+2+1}{6\times6\times6} = \frac{5}{72}$$

## 6. 통계

정답 ③

$$\sum_{x=1}^{6}\mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{6}{}_6\mathrm{C}_x=1\text{이고,}$$

$\sum_{x=1}^{6}{}_6\mathrm{C}_x=2^6-1=63$이므로 $k=63$이다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{x=1}^{6}x\cdot\mathrm{P}(X=x)$$

$$=\frac{1}{63}\sum_{x=1}^{6}x\cdot{}_6\mathrm{C}_x$$

$$=\frac{1}{63}\{{}_6\mathrm{C}_1+2\cdot{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+6\cdot{}_6\mathrm{C}_6\}$$

$$=\frac{1}{63}(6\cdot 2^5)=m$$

$$\therefore\ mk^2=\frac{6\cdot 2^5}{63}\cdot 63^2=2^6\cdot 3^3\cdot 7$$

$\therefore\ a=6,\ b=3,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=10$

## 7. 지수함수와 로그함수

정답 ②

암석이 생성된 지 $k$년 후에 포타슘$-40$의 양이 아르곤$-40$의 양의 $20$배가 되었으므로

$P(k)=20A(k)$이다.

따라서

$$2^k=\left\{1+8.3\times\frac{A(k)}{20A(k)}\right\}^c$$

$$=\left(1+8.3\times\frac{1}{20}\right)^c$$

즉, $2^k=1.415^c$

양변에 상용로그를 취하면

$k\log 2=c\log 1.415$

$$\therefore\ k=\frac{\log 1.415}{\log 2}c$$

$$=\frac{0.15}{0.30}c=\frac{1}{2}c$$

## 8. 확률

정답 ④

조건 (가)에서 $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=1$

조건 (나)에서

$\mathrm{P}((A\cap B)\cap C)=\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\varnothing$

조건 (다)에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$$
$$-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)$$
$$+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)+0$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B\cap C)+\mathrm{P}(C\cap A)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A|C)+\mathrm{P}(B|C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(C)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

## 9. 다항함수의 적분법

정답 ④

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots$$
$$+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_{n+1})\}$$

$$=a_1$$

따라서 $S$는 곡선 $y=x^4+x^2$과 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$x^4+x^2=2,\ (x^2+2)(x^2-1)=0$에서 $x^2=1$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-1$

$$\therefore\ S=\int_{-1}^{1}\{2-(x^4+x^2)\}dx$$

$$=2\left[2x-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=2\left(2-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{44}{15}$$

## 10. 함수의 극한과 연속

정답 ⑤

ㄱ. (거짓) $\lim_{x\to-1-0}f(x)g(x)$

$$=\lim_{x\to-1-0}f(x)\times\lim_{x\to-1-0}g(x)$$

$$=(-1)\times(-1)=1$$

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)g(x)$$

$$=\lim_{x\to-1+0}f(x)\times\lim_{x\to-1+0}g(x)$$

$$=(-1)\times 1=-1$$

그러므로 $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. (참) $\lim_{x\to1-0}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)\times\lim_{x\to1-0}g(x)$

$$=(-1)\times(-1)=1$$

$$\lim_{x\to1+0}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)\times\lim_{x\to1+0}g(x)$$

$$=1\times1=1$$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}f(x)g(x)=1$$

ㄷ. (참) ㄱ에서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

또, ㄴ에서 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=1$이고,

$f(1)g(1)=1\times(-1)=-1$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)\neq f(1)g(1)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$의 불연속점의 개수는 $2$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

## 11. 다항함수의 미분법

정답 ③

$x\neq 2$일 때, $(x-2)g(x)=f(x)-f(2)$에서

$$g(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

ㄱ. (참) $f(x)$는 미분가능한 함수이므로

$$\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

ㄴ. (참) 함수 $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 미분가능하므로 $(x-2)g(x)=f(x)-f(2)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$g(x)+(x-2)g'(x)=f'(x)$$

$$\therefore\ (x-2)g'(x)=f'(x)-g(x)$$

ㄷ. (거짓) $x>2$일 때,

$g'(x)>0$이면 ㄴ에서 $g(x)<f'(x)$이고,

$g'(x)<0$이면 ㄴ에서 $g(x)>f'(x)$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

### 12. 지수함수와 로그함수 정답 ③

$\log \quad = \quad , \log_2 y = Y$라 하면 주어진 연립방정식은

$\log_3 x + \log_2 \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow X - Y = 1 \quad \cdots\cdots$

$\log_9 3x + \log_{\frac{1}{2}} y = 1 - \frac{k}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \log_3 x) - \log_2 y = 1 - \frac{k}{2}$

$\Leftrightarrow X - 2Y = 1 - k \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$X = \log_3 \alpha = k + 1,\ Y = \log_2 \beta = k$

$\therefore\ \alpha = 3^{k+1},\ \beta = 2^k$

$\alpha \le \beta$에서 $3^{k+1} \le 2^k \Leftrightarrow 3 \le \ \frac{2}{3}\Big)^k$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4} < 3,\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8} > 3$

따라서 $\alpha \le \beta$를 만족시키는 정수 $k$의 최댓값은 $-3$이다.

### 13. 수열의 극한 정답 ③

$\triangle \mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n = \frac{1}{2}\mathrm{AQ}_n \times \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = \frac{1}{2}(n+1) \quad n+1$

$\triangle \mathrm{AP}_n\mathrm{R}_n = \frac{1}{2}\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \frac{1}{2}n\sqrt{n+1}$

이므로

$S_n = \square \mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n = \triangle \mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n + \triangle \mathrm{AP}_n\mathrm{R}_n$

$= \frac{1}{2}(2n+1)\sqrt{n+1}$

$T_n = \triangle \mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n = \frac{1}{2}(n+1)\sqrt{n+1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{S_n + T_n}{S_n - T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}(3n+2)\sqrt{n+1}}{\frac{1}{2}n\sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3$$

### 14. 다항함수의 적분법 정답 ②

$S_n = \quad {}^{n+1}_{0} f(x)dx$

$= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)dx$

에서

$\int_0^1 \{-x(x-1)\}dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

$\int_k^{k+1} \ - \frac{1}{4^k}(x-k)(x-k-1)\Big\}dx$

$= -\frac{1}{4^k}\int_k^{k+1} \ x^2 - (2k+1)x + k(k+1)\}dx$

$= -\frac{1}{4^k}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2k+1)x^2 + k(k+1)x\right]_k^{k+1}$

$= - \ \frac{1}{6 \cdot 4^k}\ [2x^3 - 3(2k+1)x^2 + 6k(k+1)x]_k^{k+1}$

$= \frac{1}{6 \cdot 4^k}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ \frac{1}{6} + \ {}^{n}_{k=1} \frac{1}{6 \cdot 4^k}\Big)$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \ \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}$

$= \frac{2}{9}$

### 15. 수열의 극한 정답 ⑤

사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형의 넓이는

처음 사각형의 $\frac{1}{2}$배가 되므로

$a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$에서 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$b_1 = \ \frac{\sqrt{3}}{2},\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$에서 $b_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$c_1 = \frac{3}{2},\ c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$에서 $c_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$d_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n$에서 $d_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n + c_n - d_n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2^n}(1 - \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3})\right\}$

$= (4 - 2\sqrt{3}) \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 - 2\sqrt{3}$

따라서 $p + q = 4 + (-2) = 2$이다.

### 16. 행렬과 그래프 정답 ③

ㄱ. (참) 행렬 $AB$의 역행렬이 존재한다고 가정하면

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$A^2B^3 = O$의 양변의 오른쪽에 $B^{-1}A^{-1}$을 곱하면

$(A^2B^3)(B^{-1}A^{-1}) = O,\ A^2B^2A^{-1} = O$

다시 양변의 오른쪽에 $A$를 곱하면 $A^2B^2 = O$이다.

또, 양변의 오른쪽에 $B^{-1}A^{-1}$을 곱하면

$(A^2B^2)(B^{-1}A^{-1}) = O,\ A^2BA^{-1} = O$

다시 양변의 오른쪽에 $A$를 곱하면 $A^2B = O$이다.

양변의 왼쪽에 $B^{-1}A^{-1}$을 곱하면

$(B^{-1}A^{-1})(A^2B) = O,\ B^{-1}AB = O$

다시 양변의 왼쪽에 $B$를 곱하면 $AB = O$이다.
그러므로 행렬 $AB$의 역행렬이 존재한다는 가정에

모순이다. 즉, 행렬 $AB$의 역행렬은 존재하지 않는다.

ㄴ. (거짓) 【반례】 $A = \ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\Big),\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이라 하면

행렬 $A$의 역행렬은 존재하고 $B^2 = O$이므로

$A^2B^3 = O$를 만족시키지만

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

으로 $AB \ne BA$이다.

ㄷ. (참) $2A - B = E$에서 $B = 2A - E$

$AB = A(2A - E) = 2A^2 - A$

$BA = (2A - E)A = 2A^2 - A$

$\therefore\ AB = BA$

$\therefore\ (AB)^{2012} = A^{2012}B^{2012}$

$= (A^2B^3)(A^{2010}B^{2009})$

$= O$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

### 17. 수열 정답 ①

$n^2 + n \le \frac{1}{2}n + 5$에서

$2n^2 + n - 10 = (2n+5)(n-2) \le 0$

따라서 $\le 2$일 때, $n \ +n \le \frac{1}{2}n+5$가 성립한다.

(ⅰ) $n=1,\ 2$일 때,

$_n \subset B_n$이므로 $A_n - B_n = \varnothing$

$\therefore\ a_n = 0$

(ⅱ) $n \ge 3$일 때,

$B_n \subset A_n$이므로

$$a_n = n(A_n) - n(B_n)$$

$$= n^2+n-\left[\frac{1}{2}n+5\right]$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$\sum_{n=1}^{20} a_n = \sum_{n=3}^{20}\ n^2+n-\left[\frac{1}{2}n+5\right]\Big)$$

$$= \sum_{n=3}^{20}\ n^2+n) - \sum_{n=3}^{20}\left(\left[\frac{1}{2}n+5\right]\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{20}(n^2+n) - \sum_{n=1}^{2}(n^2+n)\Big\}$$

$$-(6+7+7+\cdots+14+14+15)$$

$$= \frac{20\cdot 21\cdot 41}{6} + \frac{20\cdot 21}{2} - 8 - 189$$

$$= 2883$$

**18. 수열** 정답 ②

(1) $n=1$일 때, (좌변) $=[\log 3]$, (우변) $=[\log 3]$이므로 (*)이 성립한다.

(2) 임의의 자연수 $i$에 대하여

$$a_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{[\log 3^k]}{k}$$

$$b_i = (i+1)(a_{i+1}-a_i)$$

$$= (i+1)\ \frac{[\log 3^{i+1}]}{i+1}\Big)$$

$$= \boxed{[\log 3^{i+1}]}$$

이다.

이때, $n \le m$($m$은 자연수)일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$a_i \le [\log 3^i]$ (단, $i$는 $m$ 이하의 자연수이다.)

이제, $n=m+1$일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m} b_k = (m+1)a_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k - a_1$$

이므로

$$(m+1)a_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{m} b_k + a_1$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{m} [\log 3^{k+1}] + [\log 3]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k + \boxed{\sum_{k=1}^{m+1} [\log 3^k]}$$

그런데

$[\log 3^k]+[\log 3^{m+1-k}] \le [\log 3^{m+1}]$이므로

$$(m+1)a_{m+1} \le \sum_{k=1}^{m} [\log 3^k] + \sum_{k=1}^{m+1} [\log 3^k]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} ([\log 3^k]+[\log 3^{m+1-k}])$$

$$+\boxed{[\log 3^{m+1}]}$$

$$\le m[\log 3^{m+1}] + [\log 3^{m+1}]$$

$$= (m+1)[\log 3^{m+1}]$$

$\therefore\ a_{m+1} \le [\log 3^{m+1}]$

그러므로 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 (1)과 (2)에 의해 모든 자연수 $n$에 대하여 (*)이 성립한다.

$\therefore\ f(n)+g(n)-h(n)$

$$= [\log 3^{n+1}] + \sum_{k=1}^{n+1} [\log 3^k] - [\log 3^{n+1}]$$

$$= [\log 3] + [\log 3^2] + \cdots + [\log 3^{n+1}] = 9$$

$\therefore\ n=6$

**19. 함수의 극한과 연속** 정답 ④

ㄱ. (참) $f(1)=0$이고,

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{|x-1|}{[x]+1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{-(x-1)}{[x]+1} = 0$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{|x-1|}{[x]+1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{[x]+1} = 0$$

이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. (거짓) $\lim_{x\to 2}|x-1|=1$이고,

$\lim_{x\to 2-0}([x]+1)=2$, $\lim_{x\to 2+0}([x]+1)=3$에서

$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 2+0} f(x) = \frac{1}{3}$

이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄷ. (참) $x-1 < [x] \le x$이므로

$x>1$일 때, $\frac{x-1}{x+1} \le f(x) < \frac{x-1}{x}$

이때, $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} = 1$이므로

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**20. 다항함수의 미분법** 정답 ①

$x\ f(x+y)-f(x-y)\}=4y\{f(x)+g(y)\}$에서

$y=h$를 대입하면

$$x\{f(x+h)-f(x-h)\}=4h\{f(x)+g(h)\}$$

$$x\ \frac{\{f(x+h)-f(x-h)\}}{h} = 4\{f(x)+g(h)\}$$

양변에 극한을 취하면

(좌변) $= x\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x-h)\}}{h}$

$$= x\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x-h)-f(h)+f(h)\}}{h}$$

$$= 2xf'(x)$$

(우변) $= \lim_{h\to 0} 4\{f(x)+g(h)\}$

$$= 4\{f(x)+1\}\quad (\because\ g(0)=1)$$

$\therefore\ xf'(x) = 2\{f(x)+1\}$

$f(x)$가 최고차항의 계수가 $a$인 $n$차 함수라 하면

$xf'(x)$의 최고차항의 계수는 $an$이고,

$2\{f(x)+1\}$의 최고차항의 계수는 $2a$이므로 $n=2$이다.

따라서 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$x(2ax+b)=2(ax^2+bx+c+1)$에서 $b=0$, $c=-1$

또한, $f(1)=a+b+c=a+0-1=4$에서 $a=5$이다.

그러므로 $f(x)=5x^2-1$, $f'(x)=10x$이다.

$\therefore\ f'(2)=20$

**21. 함수의 극한과 연속** 정답 ④

(ⅰ) $x=0$일 때, $f(x)=0$

(ⅱ) $x \ne 0$일 때, $0 < \frac{9}{9+x^{2p}} < 1$이므로

$$(x)=\sum_{=1}^{\infty}\frac{9^n x^{18}}{(9+x^{2p})^n}$$

$$=x^{18}\times\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{9+x^{2p}}\right)^n$$

$$=x^{18}\times\frac{\frac{9}{9+x^{2p}}}{1-\frac{9}{9+x^{2p}}}$$

$$=x^{18}\times\frac{9}{x^{2p}}=9x^{2(9-p)}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서

연속이기 위해서는

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}9x^{2(9-p)}=0$$

그러므로 $9-p>0$ 즉, $p<9$이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 $p$는 1, 2, ⋯, 8의 총 8개이다.

**22. 다항함수의 미분법** 정답 ①

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로

접선 $l$의 방정식은

$y-a^2=2a(x-a)$ 즉, $y=2ax-a^2$

$\therefore$ A $\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$

또, 직선 $m$의 방정식은 $y=-2ax+a^2$이고,

직선 $n$의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2a}\left(x-\frac{a}{2}\right)=-\frac{x}{2a}+\frac{1}{4}$$

$\therefore$ B$(0,\ a^2)$, C$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$

따라서

$$(a)=\left(\frac{1}{4}-a^2\right)\times\frac{a}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{16}(4a^3-a)\quad\left(\because\ 0<a<\frac{1}{2}\right)$$

$$S'(a)=-\frac{1}{16}(12a^2-1)$$

$$=-\frac{3}{4}\left(a+\frac{3}{6}\right)\left(a-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

그러므로 $S(a)$는 $a=-\frac{\sqrt{3}}{6}$에서 극솟값을 가지고,

$a=\frac{\sqrt{3}}{6}$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $S(a)$의 극댓값은

$$S\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=-\frac{1}{16}\times\left(4\times\frac{3\sqrt{3}}{6^3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{144}$$

**23. 지수함수와 로그함수** 정답 ②

P$(a,\ 1)$, Q$(b,\ 1)$, R$\left(\frac{1}{a},\ -1\right)$, S$\left(\frac{1}{b},\ -1\right)$이므로

$$\alpha=(\text{직선 PS의 기울기})=\frac{2}{a-\frac{1}{b}}=\frac{2b}{ab-1}$$

$$\beta=(\text{직선 PR의 기울기})=\frac{2}{a-\frac{1}{a}}=\frac{2a}{a^2-1}$$

$$\gamma=(\text{직선 QS의 기울기})=\frac{2}{b-\frac{1}{b}}=\frac{2b}{b^2-1}$$

$$\delta=(\text{직선 QR의 기울기})=\frac{2}{b-\frac{1}{a}}=\frac{2a}{ab-1}$$

이때, $0<a<b<1$에서 $0<a^2<ab<b^2<1$이므로

$a^2-1<ab-1<b^2-1<0$

즉, $\frac{1}{a^2-1}>\frac{1}{ab-1}>\frac{1}{b^2-1}$

$\therefore\ \alpha>\gamma,\ \beta>\delta,\ \delta>\alpha$

$\therefore\ \gamma<\alpha<\delta<\beta$

**24. 지수함수와 로** $y=k(t)$ 정답 ③

$h(x)=|f(x)-g(x)|$

$=|a^{2x}-a^{x+1}+2|$

에서 $a^x=t\,(t>0)$라 하면

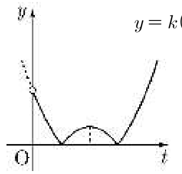
$k(t)=|t^2-at+2|$ $y=k(t)$

이차방정식 $t^2-at+2=0$의 판별식을 $D$라 하면

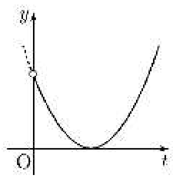
$D=a^2-8$이므로 함수 $y=k(t)$의 그래프는 다음과

같다.

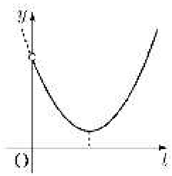
(ⅰ) $D>0$ 즉, $a>2\sqrt{2}$일 때,




(ⅱ) $D=0$ 즉, $a=2\sqrt{2}$일 때,



(ⅲ) $D<0$ 즉, $a<2\sqrt{2}$일 때,



ㄱ. (참) $a=2\sqrt{2}$일 때, $y=k(t)$의 그래프와 $x$축은

한 점에서 만나므로 $y=h(x)$의 그래프와 $x$축은

한 점에서 만난다.

ㄴ. (거짓) $a=4$일 때, $k(t)=|t^2-4t+2|$이고,

$t^2-4t+2=0$에서 $t=2\pm\sqrt{2}$이므로 $y=k(t)$의

그래프는 $0<t<2-\sqrt{2}$에서 감소하고,

$2-\sqrt{2}<t<2$에서 증가한다.

따라서 $x<\frac{1}{2}$일 때, $0<t<4^{\frac{1}{2}}=2$이므로

$h(x_1)$, $h(x_2)$의 대소를 비교할 수 없다.

ㄷ. (참) $y=k(t)$의 그래프가 직선 $y=1$과 접할 때,

$y=k(t)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에

서 만난다.

방정식 $t^2-at+2=1$ 즉, $t^2-at+1=0$이

$a=2$일 때, 중근을 가지므로 $y=h(x)$의 그래프와

직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나는 $a$의 값이

존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**25. 수열** 정답 15

수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면

$a_{10}-a_1=27$에서 $d=3$

또, $S_{10}=\frac{10(2a_1+9\cdot 3)}{2}$이고, $a_{10}=a_1+27$이므로

$S_{10}=a_{10}$에서 $5(2a_1+9\cdot 3)=a_1+27$

$\therefore\ a_1=-12$

$_0 = a_{10} = a_1 + 27 = 15$

## 26. 확률 $\boxed{\text{정답 } 145}$

$\displaystyle {}^{5}_{k=1} x_k = a,\ \sum_{k=6}^{10} x_k = b$라 하면

$a,\ b$가 음이 아닌 정수이므로 $2a+3b=8$을 만족시키는

경우는 다음의 두 가지이다.

( i ) $(a,\ b)=(4,\ 0)$인 경우

순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{10})$의 개수는

$_{5+4-1}\mathrm{C}_4 \times {}_{5+0-1}\mathrm{C}_0 = {}_8\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_0 = 70$(개)

(ii) $(a,\ b)=(1,\ 2)$인 경우

순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{10})$의 개수는

$_{5+1-1}\mathrm{C}_1 \times {}_{5+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_2 = 75$(개)

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $70+75=145$(개)이다.

## 27. 다항함수의 미분법 $\boxed{\text{정답 } 54}$

$f'(x)=g(x),\ g'(x)=h(x)$이므로

$f(x)+h(x)=2g(x)+x^4+1$에서

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.

이제, $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$로 놓으면

$g(x)=f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$h(x)=g'(x)=12x^2+6ax+2b$

이므로

$f(x)+h(x)=x^4+ax^3+(b+12)x^2$

$\qquad +(6a+c)x+2b+d \quad \cdots\cdots$

$2g(x)+x^4+1=x^4+8x^3+6ax^2+4bx+2c+1$

$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 계수를 비교하면

$a=8,\ b+12=6a,\ 6a+c=4b,\ 2b+d=2c+1$

$\therefore\ a=8,\ b=36,\ c=96,\ d=121$

$\therefore\ f(x)=x^4+8x^3+36x^2+96x+121$

$\therefore\ f(-1)=1-8+36-96+121=54$

## 28. 행렬과 그래프 $\boxed{\text{정답 } 60}$

$x^2+y^2-2x-4y-11=0$

$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+(y-2)^2=4^2$

직선 $y=2x$는 원의 중심 $(1,\ 2)$를 지나므로 선분 $\mathrm{PQ}$는

원의 지름이 된다. 즉, 삼각형 $\mathrm{PRQ}$는 $\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{2}$인

직각삼각형이다.

그러므로 $\mathrm{PR}=a,\ \mathrm{RQ}=b$로 놓으면 $a^2+b^2=8^2$이고,

$$A=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{b}{8} & \frac{a}{8}\\ \frac{a}{8} & \frac{b}{8}\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}b & a\\ a & b\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^2=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}b & a\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & a\\ a & b\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}a^2+b^2 & 2ab\\ 2ab & a^2+b^2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}64 & 2ab\\ 2ab & 64\end{pmatrix}$$

$8A^2=4A+7E$에 대입하면

$$\begin{pmatrix}8 & \frac{ab}{4}\\ \frac{ab}{4} & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{b}{2} & \frac{a}{2}\\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$$

$8=\dfrac{b}{2}+7,\ \dfrac{ab}{4}=\dfrac{a}{2}$이므로

$b=2,\ a=\quad 64-2^2=\quad 60$

$\therefore\ S=\sqrt{60}\times 2\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{60}$

$\therefore\ S^2=60$

## 29. 수열 $\boxed{\text{정답 } 32}$

조건 (가), (나)에서

$f(3)=f(1+2)=2f(1)=10$이므로

$f(1)=5$

이제, $f(2)=a$라 하면 조건 (나)에서

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 5 | $a$ | $2\cdot 5$ | $2a$ | $2^2\cdot 5$ |

| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $2^2a$ | $2^3\cdot 5$ | $2^3a$ | $2^4\cdot 5$ | $2^4a$ |

따라서 조건 (다)에서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{100} f(n)=10\sum_{n=1}^{10} f(n)$

$=10\{5(1+2+2^2+2^3+2^4)$

$\qquad +a(1+2+2^2+2^3+2^4)\}$

$=310\times(5+a)=2170$

$\therefore\ a=2$

$\therefore\ f(100)=f(10)=2^4a=32$

## 30. 다항함수의 적분법 $\boxed{\text{정답 } 28}$

$f(x)=\quad f'(x)\,dx$

$\displaystyle =\int 6x^2\,dx=2x^3+a$ (단, $a$는 적분상수이다.)

$\displaystyle g(x)=\int g'(x)\,dx$

$\displaystyle =\int 2x\,dx=x^2+b$ (단, $b$는 적분상수이다.)

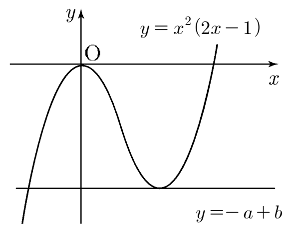
로 놓으면

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 두 점에서 만나므로

$2x^3-x^2+a-b=0$ 즉, $x^2(2x-1)=-a+b$에서

$y=-a+b$의 그래프는 $y=x^2(2x-1)$의 극소점 또는

극대점에서 접한다.




이때, $y=x^2(2x-1)$에서 $y'=2x(3x-1)$

이므로 $x=0$에서 극대, $x=\dfrac{1}{3}$에서 극소이다.

( i ) $x=0$에서 접하는 경우

$-a+b=0$이므로 $f(0)-g(0)=a-b=0$

(ii) $x=\dfrac{1}{3}$에서 접하는 경우

$-a+b=-\dfrac{1}{27}$이므로 $f(0)-g(0)=a-b=\dfrac{1}{27}$

( i ), (ii)에서

$\dfrac{q}{p}=0+\dfrac{1}{27}=\dfrac{1}{27}$

$\therefore\ p+q=27+1=28$