제 3 교 시

2012학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

수 리 영 역 이과

성명		수험번호							

○ 먼저 **문제지**에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ **답안지**에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 0이 포함된 경우에는 0을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

육 군 사 관 학 교

공 란

1. 자연수 n에 대하여 $a_n = \sqrt{4n+1-2\sqrt{4n^2+2n}}$, $b_n = \sqrt{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 함수 $f(x) = x\ln x$에 대하여 등식 $f(e^2)-f(e) = e(e-1)f'(c)$를 만족시키는 c가 열린 구간 (e, e^2)에 존재한다. $\ln c$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{e}$ ② $\frac{e+2}{e}$ ③ $\frac{2}{e-1}$ ④ $\frac{e}{e-1}$ ⑤ $\frac{2e}{e+1}$

3. 자연수 n에 대하여 $S_n = \frac{3}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n+2k}$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}(S_n+1)$ 의 값은? [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

4. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 x, y 좌표가 각각 $x = t - \sin 2t$, $y = 1 - \cos 2t$ 일 때, 점 P 의 속력의 최댓값은? (단, $t \geq 0$) [3점]

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

5. $0 < x < 2\pi$ 에서 삼각방정식 $3\sin x + 3\sin x\cos 2x - 6\sin x\cos x - \cos x + 1 = 0$ 의 모든 실근의 합은? [3점]

① $\frac{5}{2}\pi$ ② 3π ③ $\frac{7}{2}\pi$ ④ 4π ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

6. 이산확률변수 X가 값 x를 가질 확률이

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{{}_6\mathrm{C}_x}{k}$$ (단, $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$이고, k는 상수이다.)

일 때, 확률변수 X의 기댓값을 m이라 하면 $mk^2 = 2^a \times 3^b \times 7^c$이다. 세 자연수 a, b, c의 합 $a + b + c$의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

7. 지질학에서 암석의 연대를 측정하는 방법 중 하나로 포타슘-40은 방사선 분해과정을 거쳐 일정한 비율로 아르곤-40으로 바뀌는 점을 이용한 포타슘-아르곤연대측정법을 사용한다. 암석이 생성되어 t 년이 되었을 때, 포타슘-40과 아르곤-40의 양을 각각 $P(t)$, $A(t)$ 라 하면

$$2^t = \left\{1 + 8.3 \times \frac{A(t)}{P(t)}\right\}^c \quad \text{(단, } c\text{는 상수이다.)}$$

이 성립한다고 하자.

이 방법으로 암석의 연대를 측정하였을 때 포타슘-40의 양이 아르곤-40의 양의 20 배인 암석이 생성된 것은 k 년 전이다. k 의 값은? (단, $\log 1.415 = 0.15$, $\log 2 = 0.30$ 으로 계산한다.) [3점]

① $\frac{1}{3}c$ ② $\frac{1}{2}c$ ③ $2c$ ④ $3c$ ⑤ $4c$

8. 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 S라 하자. S의 부분집합인 세 사건 A, B, C는 다음 조건을 만족한다.

(가) $A \cup B \cup C = S$
(나) 사건 $A \cap B$ 와 사건 C는 서로 배반이다.
(다) 사건 A 와 사건 B는 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(C) = \frac{2}{3}$ 일 때, $\mathrm{P}(A \mid C) + \mathrm{P}(B \mid C)$ 의 값은? [3점]

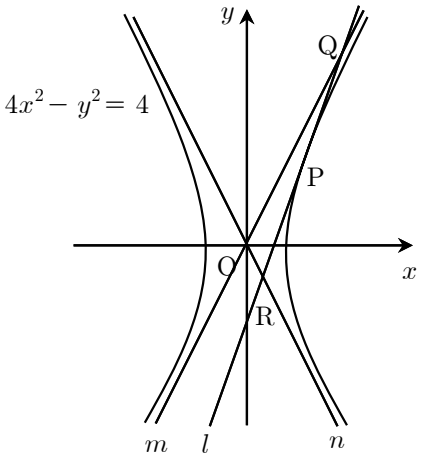
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

9. 좌표평면 위에서 원점을 중심으로 하여 $\frac{\pi}{3}$ 만큼 회전시키는 회전변환에 의하여 점 A 가 옮겨지는 점을 B 라 하고, 원점을 중심으로 하여 $-\frac{7}{12}\pi$ 만큼 회전시키는 회전변환에 의하여 점 B 가 옮겨지는 점을 C 라 하자. 점 B 의 x 좌표가 -1 이고, 점 C 는 x 축 위의 점일 때, 점 A 의 x 좌표와 y 좌표의 곱은? [3점]

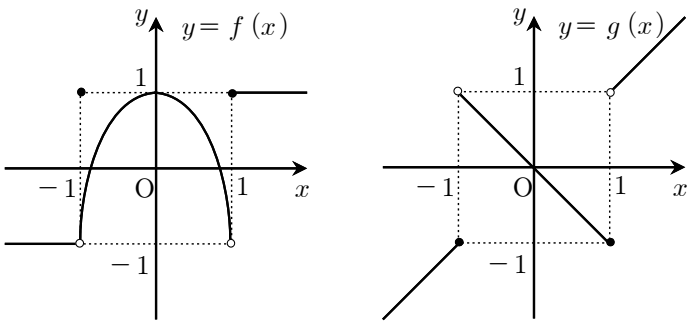
① $2-2\sqrt{3}$ ② $4-2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}-1$ ④ $2+2\sqrt{3}$ ⑤ $4+2\sqrt{3}$

10. 그림과 같이 쌍곡선 $4x^2-y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(\sqrt{2}, 2)$에서의 접선을 l이라 하고, 이 쌍곡선의 두 점근선 중 기울기가 양수인 것을 m, 기울기가 음수인 것을 n이라 하자. l과 m의 교점을 Q, l과 n의 교점을 R라 할 때, $\overline{\mathrm{QR}}=k\overline{\mathrm{PQ}}$를 만족시키는 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$
② $\frac{3}{2}$
③ 2
④ $\frac{7}{3}$
⑤ $1+\sqrt{2}$



11. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. $\lim_{x\to -1} g(f(x))=1$

ㄴ. $\lim_{x\to -1} f(g(x))=-1$

ㄷ. 함수 $y=f(g(x))$의 불연속점의 개수는 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

12. 좌표공간 위의 네 점 $\mathrm{A}(2,0,0)$, $\mathrm{B}(0,2,0)$, $\mathrm{C}(0,0,4)$, $\mathrm{D}(2,2,4)$ 에 대하여 그림과 같이 사면체 DABC 의 꼭짓점 D 에서 삼각형 ABC 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 선분 DH 의 길이는? [3점]

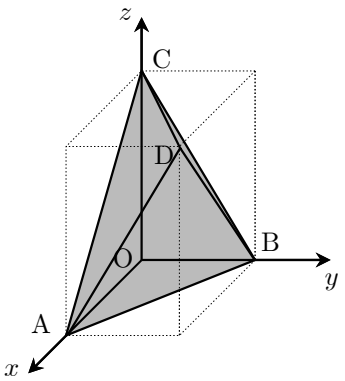
① $\frac{5}{3}$

② 2

③ $\frac{7}{3}$

④ $\frac{8}{3}$

⑤ 3



13. 무리함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$ 과 자연수 n 에 대하여 그림과 같이 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}_n(n, f(n))$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q_n, y 축에 내린 수선의 발을 R_n 이라 하자.
점 $\mathrm{A}(-1,0)$ 에 대하여 사각형 $\mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n$ 의 넓이를 S_n, 삼각형 $\mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n$ 의 넓이를 T_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n+T_n}{S_n-T_n}$ 의 값은? [3점]

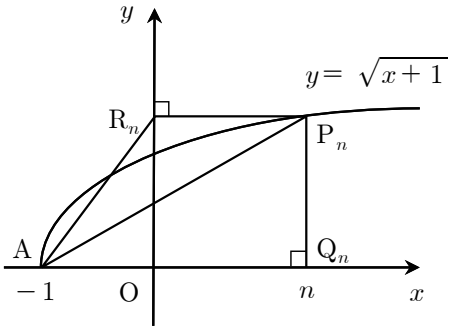
① 1

② 2

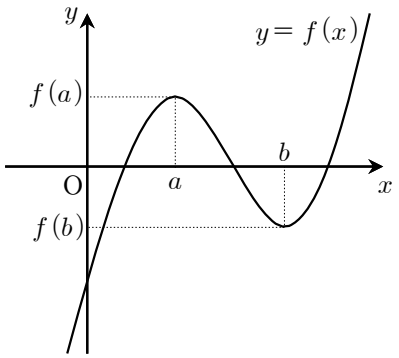
③ 3

④ 4

⑤ 5



14. 그림과 같이 $x=a$에서 극댓값, $x=b$에서 극솟값을 가지는 삼차함수 $f(x)$가 있다. $(0<a<b)$



함수 $g(x)=e^{-x^2}f(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. $g'(0)>0$

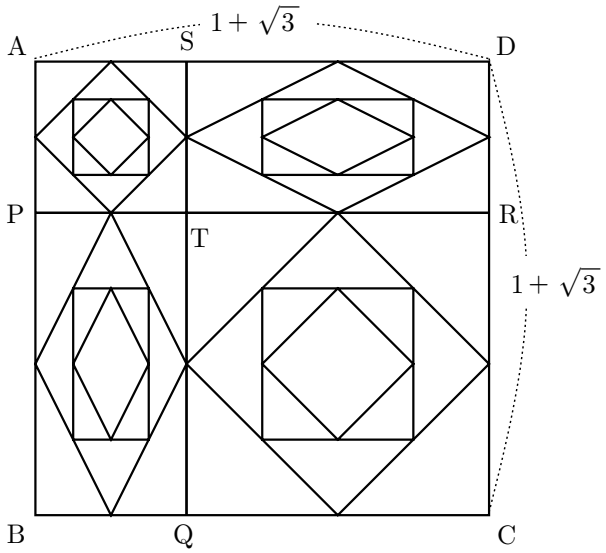
ㄴ. $f'(a)+g'(a)>0$

ㄷ. $g(b)g'(b)>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 그림과 같이 한 변의 길이가 $1+\sqrt{3}$ 인 정사각형 ABCD 가 있다. 두 변 AB 와 BC 를 $1:\sqrt{3}$ 으로 내분하는 점을 각각 P, Q 라 하고, 두 변 CD 와 DA 를 $\sqrt{3}:1$ 로 내분하는 점을 각각 R, S 라 하자. 이 때, 두 선분 PR, QS 의 교점을 T 라 하고, 네 사각형 APTS, PBQT, TQCR, STRD 를 만든다.

먼저 사각형 APTS 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_1, 사각형 A_1 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_2, 사각형 A_2 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_3 라 하자. 또, 사각형 PBQT 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_1, 사각형 B_1 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_2, 사각형 B_2 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_3 라 하자. 또, 사각형 TQCR 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_1, 사각형 C_1 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_2, 사각형 C_2 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_3 라 하자. 또, 사각형 STRD 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_1, 사각형 D_1 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_2, 사각형 D_2 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_3 라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 사각형 A_n, B_n, C_n, D_n 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 각각 $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ 이라 하자. 사각형 A_n, B_n, C_n, D_n 의 넓이를 각각 a_n, b_n, c_n, d_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+c_n-d_n)=p+q\sqrt{3}$ 을 만족시키는 두 유리수 p, q 의 합 $p+q$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

16. 이차정사각행렬 A, B가 $A^2B^3=O$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보기>

ㄱ. 행렬 AB의 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면 $AB=BA$이다.
ㄷ. $2A-B=E$이면 $(AB)^{2012}=O$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 자연수 n에 대하여 집합 A_n, B_n을

$$A_n=\{(n,k)\mid k\le n^2+n,\ k\text{는 자연수}\}$$

$$B_n=\left\{(n,k)\,\middle|\,k\le \frac{1}{2}n+5,\ k\text{는 자연수}\right\}$$

라 하자. 집합 A_n-B_n의 원소의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은? [4점]

① 2883 ② 2886 ③ 2889 ④ 2892 ⑤ 2895

18. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{[\log 3^k]}{k} \le [\log 3^n] \qquad \cdots\cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 증명한 것이다. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

<증명>

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=[\log 3]$, (우변)$=[\log 3]$ 이므로 (*)이 성립한다.

(2) 임의의 자연수 i 에 대하여

$$a_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{[\log 3^k]}{k} \text{ , } b_i = (i+1)(a_{i+1} - a_i)$$

라 하면 $b_i =$ (가) 이다.

이 때, $n \le m$ (m 은 자연수)일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$a_i \le [\log 3^i]$ (단, i 는 m 이하의 자연수이다.)

이제, $n = m+1$ 일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m} b_k = (m+1)a_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_k - a_1$$

이므로 $(m+1)a_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} a_k +$ (나)

그런데 $[\log 3^k] + [\log 3^{m+1-k}] \le [\log 3^{m+1}]$ 이므로

$$\begin{aligned}(m+1)a_{m+1} &\le \sum_{k=1}^{m} [\log 3^k] + \sum_{k=1}^{m+1} [\log 3^k] \\ &= \sum_{k=1}^{m} ([\log 3^k] + [\log 3^{m+1-k}]) + \text{(다)} \\ &\le m[\log 3^{m+1}] + [\log 3^{m+1}] \\ &= (m+1)[\log 3^{m+1}]\end{aligned}$$

$\therefore\ a_{m+1} \le [\log 3^{m+1}]$

그러므로 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 (1)과 (2)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(i)$, $g(m)$, $h(m)$ 이라 할 때, $f(n)+g(n)-h(n)=9$를 만족시키는 자연수 n 의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

19. 좌표평면 위를 움직이는 두 점 $A(2+\sin\theta,\ 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin\theta)$, $B(\cos\theta,\ -\sqrt{3}\cos\theta)$ 와 점 $C(1,0)$ 에 대하여 선분 AB 의 중점을 M 이라 하고, $\overline{CM}$ 이 최대일 때 점 M 을 D, $\overline{CM}$ 이 최소일 때 점 M 을 E 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $0 \le \theta < 2\pi$) [4점]

<보기>

ㄱ. 점 M 이 그리는 도형은 타원이다.

ㄴ. $\overline{CD}+\overline{CE}=2\sqrt{3}$

ㄷ. $\angle DOE=\alpha$ 라 하면 $\tan\alpha=\frac{2}{5}\sqrt{6}$ 이다. (단, O 는 원점이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{x}\ln x$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{e}$이다.

ㄴ. $2011^{2012} > 2012^{2011}$

ㄷ. 열린 구간 $(0, e)$에서 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1, e)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q를 지나고 접선 l에 수직인 직선과 곡선 $y=e^{-x}$이 만나는 점을 R라 하자. 직선 PQ, 직선 QR과 곡선 $y=e^{-x}$으로 둘러싸인 도형을 x축 둘레로 회전한 회전체의 부피는? [4점]

① $\pi\left(\frac{e^2}{2}-\frac{5}{6e^2}\right)$ ② $\pi\left(\frac{e^2}{3}-\frac{5}{6e^2}\right)$ ③ $\pi\left(\frac{e^2}{6}-\frac{1}{2e^2}\right)$ ④ $\pi\left(\frac{e^2}{6}-\frac{5}{6e^2}\right)$ ⑤ $\pi\left(\frac{e^2}{6}-\frac{2}{3e^2}\right)$

22. $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 하고, $\angle BAM=\alpha$, $\angle CAM=\beta$라 하자. $\cos 2\alpha=\frac{1}{4}$일 때, $8\cos(2\alpha-\beta)$의 값은? [4점]

① $\sqrt{15}$ ② 4 ③ $\sqrt{17}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{19}$

23. $0 < a < b < 1$ 일 때, 직선 $y = 1$ 이 $y = \log_a x$ 의 그래프와 $y = \log_b x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q 라 하고 직선 $y = -1$ 이 $y = \log_a x$ 의 그래프와 $y = \log_b x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 R, S 라 하자. 네 직선 PS, PR, QS, QR 의 기울기를 각각 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [4점]

① $\delta < \alpha < \beta < \gamma$ ② $\gamma < \alpha < \delta < \beta$ ③ $\gamma < \alpha < \beta < \delta$
④ $\gamma < \alpha = \delta < \beta$ ⑤ $\alpha = \delta < \beta < \gamma$

24. 1 보다 큰 실수 a 에 대하여 두 함수 $f(x)=a^{2x}$, $g(x)=a^{x+1}-2$ 가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$ 를 $h(x)=|f(x)-g(x)|$ 라 하자. $y=h(x)$ 의 그래프에 대한 설명으로 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $a=2\sqrt{2}$ 일 때 $y=h(x)$ 의 그래프와 x 축은 한 점에서 만난다.

ㄴ. $a=4$ 일 때 $x_1<x_2<\frac{1}{2}$ 이면 $h(x_1)>h(x_2)$ 이다.

ㄷ. $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 오직 한 점에서 만나는 a 의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_{10}-a_1=27$, $S_{10}=a_{10}$ 일 때, S_{10} 의 값을 구하시오. (단, $n=1, 2, 3, \cdots$) [2점]

26. $2\sum_{k=1}^{5}x_k+3\sum_{k=6}^{10}x_k=8$ 을 만족시키는 서로 다른 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{10})$ 의 개수를 구하시오. (단, x_i 는 음이 아닌 정수이고 $i=1, 2, 3, \cdots, 10$ 이다.) [3점]

27. 삼차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 두 집합 A, B 를 각각

$$A=\left\{ x \,\middle|\, \frac{(x-2)^2}{(x-4)(x-6)} \le 0 \right\},\ B=\{\, x \,|\, (x-6)f(x) \ge 0 \,\}$$

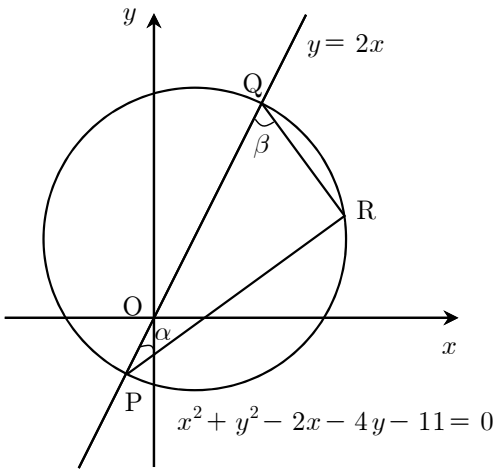
라 하면 두 집합 A 와 B 는 다음 조건을 만족시킨다.

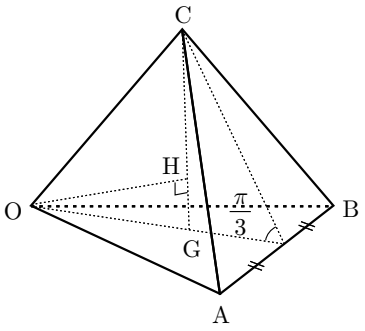
(가) $A \cap B = \{2\} \cup \{x \,|\, 5 \le x < 6\}$

(나) $A^{C} \cap B^{C} = \{x \,|\, 3 < x \le 4\}$

$f(10)$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 좌표평면 위에서 원 $x^2+y^2-2x-4y-11=0$ 과 직선 $y=2x$ 가 만나는 두 점을 P, Q 라 하고 직선 $y=2x$ 위에 있지 않은 원 위의 한 점을 R 라 하자. $\angle \mathrm{QPR}=\alpha$, $\angle \mathrm{RQP}=\beta$ 에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix}$ 가 $8A^2=4A+7E$ 를 만족시킬 때, 삼각형 PQR 의 넓이는 S이다. S^2의 값을 구하시오. (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]



29. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 3 이상인 모든 자연수 n 에 대하여 $\sin\frac{\pi}{n}=\frac{a_n}{2+a_n}=\frac{b_n}{2-b_n}$ 을 만족시킬 때, $\frac{1}{\pi^3}\lim_{n\to\infty} n^3(a_n+b_n)(a_n-b_n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 그림과 같이 사면체 OABC에서 삼각형 OAB와 삼각형 CAB는 모두 정삼각형이고, 삼각형 OAB와 삼각형 CAB가 이루는 이면각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다. 정삼각형 OAB의 무게중심을 G, 점 O에서 선분 CG에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 할 때, $\overrightarrow{OH}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ 를 만족시키는 세 상수 p, q, r 에 대하여 $28(p+q+r)$ 의 값을 구하시오. [4점]