수리 영역(이과)

1. ⑤	**2.** ④	**3.** ②	**4.** ①	**5.** ②
6. ③	**7.** ②	**8.** ④	**9.** ⑤	**10.** ③
11. ⑤	**12.** ④	**13.** ③	**14.** ①	**15.** ⑤
16. ③	**17.** ①	**18.** ②	**19.** ⑤	**20.** ⑤
21. ④	**22.** ①	**23.** ②	**24.** ③	**25.** 15
26. 145	**27.** 140	**28.** 60	**29.** 16	**30.** 20

1. 수열의 극한

정답 ⑤

$= \quad 4n+1-2 \quad 4n^2+2n$

$= \quad (2n+1)+2n-2 \quad 2n(2n+1)$

$= \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}$

$b_n = \sqrt{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}$

$= \sqrt{(n+1)+n-2\sqrt{n(n+1)}}$

$= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{2+\frac{1}{n}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. 미분법

정답 ④

$f(x)=x\ln x$에서 $f'(x)=\ln x+1$이고,

c가 등식 $f(e^2)-f(e)=e(e-1)f'(c)$를 만족시키므로

$2e^2-e=e(e-1)(\ln c+1)$

$$\therefore \ln c = \frac{e(2e-1)}{e(e-1)}-1 = \frac{e}{e-1}$$

3. 적분법

정답 ②

$$_n = \frac{3}{n\sqrt{n}} \quad ^{n}_{k=1} \sqrt{n+2k}$$

$$= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{2k}{n}}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{2k}{n}}\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \frac{3}{2} \quad ^{3}_{1}\sqrt{x}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^3$$

$$= 3\sqrt{3}-1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(S_n+1) = \lim_{n\to\infty}S_n+1 = 3\sqrt{3}$$

4. 미분법

정답 ①

$x=t-\sin 2t,\ y=1-\cos 2t$에서

$\frac{dx}{dt}=1-2\cos 2t,\ \frac{dy}{dt}=2\sin 2t$이므로

점 P 의 시각 t에서의 속력은

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$= \quad (1-2\cos 2t)^2+4\sin^2 2t$

$= \sqrt{1-4\cos 2t+4\cos^2 2t+4\sin^2 2t}$

$= \sqrt{5-4\cos 2t}$

이때, $-4 \le 4\cos 2t \le 4$이므로 점 P 의 속력의 최댓값은 3이다.

5. 삼각함수

정답 ②

$3\sin x+3\sin x\cos 2x-6\sin x\cos x-\cos x+1$

$=3\sin x+3\sin x(2\cos^2 x-1)-6\sin x\cos x$

$-\cos x+1$

$=6\sin x\cos^2 x-6\sin x\cos x-\cos x+1$

$=6\sin x\cos x(\cos x-1)-(\cos x-1)$

$=(\cos x-1)(6\sin x\cos x-1)$

$=(\cos x-1)(3\sin 2x-1)=0$

$\therefore \sin 2x=\frac{1}{3}(\because\ 0<x<2\pi)$

$0<a<\frac{\pi}{4}$에 대하여 $\sin 2a=\frac{1}{3}$이라 두면

$0<x<2\pi$에서 방정식 $\sin 2x=\frac{1}{3}$의 네 근은

$a,\ \frac{\pi}{2}-a,\ \pi+a,\ \frac{3}{2}\pi-a$이므로 구하는 모든 실근의 합은 3π이다.

6. 통계

정답 ③

$\sum_{x=1}^{6}\mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{6}{}_6\mathrm{C}_x=1$이고,

$\sum_{x=1}^{6}{}_6\mathrm{C}_x=2^6-1=63$이므로 $k=63$이다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{x=1}^{6}x\cdot\mathrm{P}(X=x)$$

$$=\frac{1}{63}\sum_{x=1}^{6}x\cdot{}_6\mathrm{C}_x$$

$$=\frac{1}{63}\ {}_6\mathrm{C}_1+2\cdot{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+6\cdot{}_6\mathrm{C}_6\}$$

$$=\frac{1}{63}(6\cdot 2^5)=m$$

$$\therefore\ mk^2=\frac{6\cdot 2^5}{63}\cdot 63^2=2^6\cdot 3^3\cdot 7$$

$\therefore\ a=6,\ b=3,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=10$

7. 지수함수와 로그함수

정답 ②

암석이 생성된 지 k년 후에 포타슘-40의 양이 아르곤-40의 양의 20배가 되었으므로 $P(k)=20A(k)$이다.

따라서

$$2^k=\left\{1+8.3\times\frac{A(k)}{20A(k)}\right\}^c$$

$$=\left(1+8.3\times\frac{1}{20}\right)^c$$

즉, $2^k=1.415^c$

양변에 상용로그를 취하면

$k\log 2=c\log 1.415$

$$\therefore\ k=\frac{\log 1.415}{\log 2}c$$

$$=\frac{0.15}{0.30}c=\frac{1}{2}c$$

8. 확률

정답 ④

조건 (가)에서 $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=1$

조건 (나)에서

$\mathrm{P}((A\cap B)\cap C)=\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\varnothing$

조건 (다)에서

$$\mathrm{P}\quad\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B\cup C)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)\\&-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)\\&+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)+0$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B\cap C)+\mathrm{P}(C\cap A)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|C)+\mathrm{P}(B|C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(C)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

9. 일차변환과 행렬 정답 ⑤

점 $\mathrm{A}(a, b)$라 하고, 점 A를 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전시킨 점을 $\mathrm{B}(a', b')$이라 하면

$$\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a-\quad\frac{3}{2}b\\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \mathrm{B}\ \frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\Big)$$

이때, 점 B의 x좌표가 -1이므로

$$\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-1\quad\cdots\cdots$$

또, 점 B를 원점을 중심으로 $-\frac{7}{12}\pi$만큼 회전시킨 점은 점 A를 원점을 중심으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 회전시킨 점과 같으므로 점 $\mathrm{C}(a'', b'')$이라 하면

$$\begin{pmatrix}a''\\b''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\ -\frac{\pi}{4}\Big) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b\end{pmatrix}$$

이때, 점 C는 x축 위의 점이므로

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=0\quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1,\quad b=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$$

따라서 점 A의 x좌표와 y좌표의 곱은

$$ab=(\sqrt{3}+1)\quad=4+2\sqrt{3}$$

10. 이차곡선 정답 ③

쌍곡선 $4x^2-y^2=4$ 즉, $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 위의

점 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$$l:\ \sqrt{2}x-\frac{y}{2}=1$$

주어진 쌍곡선의 두 점근선은 $y=\pm 2x$이므로 직선 l과의 교점을 구하면

$$\mathrm{Q}(\sqrt{2}+1,\ 2(\sqrt{2}+1)),\ \mathrm{R}(\sqrt{2}-1,\ -2(\sqrt{2}-1))$$

이때, 두 점 Q, R의 중점이 P이므로 $\mathrm{QR}=2\overline{\mathrm{PQ}}$

$\therefore\ k=2$

11. 함수의 극한과 연속 정답 ⑤

ㄱ. (거짓) $\displaystyle\lim_{x\to-1-0}g(f(x))=g(-1)=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}g(f(x))=\lim_{t\to-1+0}g(t)=1$

그러므로 $\displaystyle\lim_{x\to-1}g(f(x))$는 존재하지 않는다.

ㄴ. (참) $\displaystyle\lim_{x\to-1-0}f(g(x))=\lim_{t\to-1-0}f(t)=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(g(x))=\lim_{s\to1-0}f(s)=-1$

$\displaystyle\therefore\lim_{x\to-1}f(g(x))=-1$

ㄷ. (참) ㄴ에서 $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(g(x))=-1$이고,

$f(g(-1))=f(-1)=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-1}f(g(x))\neq f(g(-1))$

즉, 함수 $f(g(x))$는 $x=-1$에서 불연속이다.

또, $\displaystyle\lim_{x\to1+0}f(g(x))=\lim_{t\to1+0}f(t)=1$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(g(x))=\lim_{s\to-1+0}f(s)=-1$

이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

그러므로 함수 $f(g(x))$의 불연속점의 개수는 2이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

12. 공간도형과 공간좌표 정답 ④

평면 ABC의 x, y, z절편이 각각 2, 2, 4이므로

평면 ABC의 방정식은 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$

즉, $2x+2y+z-4=0$

따라서 선분 DH의 길이는 점 $\mathrm{D}(2,\ 2,\ 4)$에서

평면 $2x+2y+z-4=0$에 이르는 거리이므로

$$\mathrm{DH}=\frac{|2\cdot2+2\cdot2+1\cdot4-4|}{2^2+2^2+1^2}=\frac{8}{3}$$

13. 수열의 극한 정답 ③

$$\triangle\mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n=\frac{1}{2}\mathrm{AQ}_n\times\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\frac{1}{2}(n+1)\sqrt{}n+1$$

$$\triangle\mathrm{AP}_n\mathrm{R}_n=\frac{1}{2}\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{1}{2}n\sqrt{n+1}$$

이므로

$$_n=\square\mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n=\triangle\mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n+\triangle\mathrm{AP}_n\mathrm{R}_n$$

$$=\frac{1}{2}(2n+1)\sqrt{n+1}$$

$$T_n=\triangle\mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n=\frac{1}{2}(n+1)\sqrt{n+1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n+T_n}{S_n-T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(3n+2)\sqrt{n+1}}{\frac{1}{2}n\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=3$$

14. 미분법 정답 ①

$g(x)=e^{-x}f(x)$에서

$g'(x)=-2xe^{-x^2}f(x)+e^{-x^2}f'(x)$

ㄱ. (참) $g'(0)=f'(0)$이고

주어진 함수 $f(x)$의 그래프에서 $x=0$에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $f'(0)>0$이다.

$\therefore\ g'(0)>0$

ㄴ. (거짓) 그림에서 $f'(a)=0$이고,

$a>0,\ e^{-a^2}>0,\ f(a)>0$이므로

$f'(a)+g'(a)=g'(a)=-2ae^{-a^2}f(a)<0$

ㄷ. (거짓) 그림에서 $'(b)=0$이고,

$b>0,\ e^{\ b}>0,\ f(b)<0$이므로

$g(b)=e^{-b^2}f(b)<0$

$g'(b)=-2be^{-b^2}f(b)>0$

$\therefore\ g(b)g'(b)<0$

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

15. 수열의 극한 정답 ⑤

사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형의 넓이는 처음 사각형의 $\frac{1}{2}$ 배가 되므로

$a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$에서 $a_n=\ \frac{1}{2}\Big)^n$

$b_1=\ \ \frac{3}{2},\ b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$에서 $b_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$c_1=\frac{3}{2},\ c_{n+1}=\frac{1}{2}c_n$에서 $c_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$d_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\ d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n$에서 $d_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \ _{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+c_n-d_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{1}{2^n}\ (1-\sqrt{3}+3-\sqrt{3})\Big\}$

$=(4-2\sqrt{3})\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=4-2\sqrt{3}$

따라서 $p+q=4+(-2)=2$이다.

16. 행렬과 그래프 정답 ③

ㄱ. (참) 행렬 B의 역행렬이 존재한다고 가정하면

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$A^2B^3=O$의 양변의 오른쪽에 $B^{-1}A^{-1}$을 곱하면

$(A^2B^3)(B^{-1}A^{-1})=O,\ A^2B^2A^{-1}=O$

다시 양변의 오른쪽에 A를 곱하면 $A^2B^2=O$이다.

또, 양변의 오른쪽에 $B^{-1}A^{-1}$을 곱하면

$(A^2B^2)(B^{-1}A^{-1})=O,\ A^2BA^{-1}=O$

다시 양변의 오른쪽에 A를 곱하면 $A^2B=O$이다.

양변의 왼쪽에 $B^{-1}A^{-1}$을 곱하면

$(B^{-1}A^{-1})(A^2B)=O,\ B^{-1}AB=O$

다시 양변의 왼쪽에 B를 곱하면 $AB=O$이다.

그러므로 행렬 AB의 역행렬이 존재한다는 가정에 모순이다. 즉, 행렬 AB의 역행렬은 존재하지 않는다.

ㄴ. (거짓) 【반례】 $A=\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}\Big),\ B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$이라 하면

행렬 A의 역행렬은 존재하고 $B^2=O$이므로

$A^2B^3=O$를 만족시키지만

$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

으로 $AB\neq BA$이다.

ㄷ. (참) $2A-B=E$에서 $B=2A-E$

$AB=A(2A-E)=2A^2-A$

$BA=(2A-E)A=2A^2-A$

$\therefore\ AB=BA$

$\therefore\ (AB)^{2012}=A^{2012}B^{2012}$

$=(A^2B^3)(A^{2010}B^{2009})$

$=O$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17. 수열 정답 ①

$n^2+n\le\frac{1}{2}n+5$에서

$2n^2+n-10=(2n+5)(n-2)\le 0$

따라서 $n\le 2$일 때, $n^2+n\le\frac{1}{2}n+5$가 성립한다.

(i) $n=1,\ 2$일 때,

$A_n\subset B_n$이므로 $A_n-B_n=\varnothing$

$\therefore\ a_n=0$

(ii) $n\ge 3$일 때,

$B_n\subset A_n$이므로

$a_n=n(A_n)-n(B_n)$

$=n^2+n-\left[\frac{1}{2}n+5\right]$

(i), (ii)에서

$\sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{n=3}^{20}\left(n^2+n-\left[\frac{1}{2}n+5\right]\right)$

$=\sum_{n=3}^{20}\ n^2+n)-\sum_{n=3}^{20}\left(\left[\frac{1}{2}n+5\right]\right)$

$=\ \sum_{n=1}^{20}(n^2+n)-\sum_{n=1}^{2}(n^2+n)\Big\}$

$-(6+7+7+\ \cdots\ +14+14+15)$

$=\frac{20\cdot 21\cdot 41}{6}+\frac{20\cdot 21}{2}-8-189$

$=2883$

18. 수열 정답 ②

(1) $n=1$일 때, (좌변) $=[\log 3]$, (우변) $=[\log 3]$이므로 (*)이 성립한다.

(2) 임의의 자연수 i에 대하여

$a_i=\sum_{k=1}^{i}\frac{[\log 3^k]}{k}$

$b_i=(i+1)(a_{i+1}-a_i)$

$=(i+1)\left(\frac{[\log 3^{i+1}]}{i+1}\right)$

$=\boxed{[\log 3^{i+1}]}$

이다.

이때, $n\le m$(m은 자연수)일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$a_i\le[\log 3^i]$ (단, i는 m 이하의 자연수이다.)

이제, $n=m+1$일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$\sum_{k=1}^{m}b_k=(m+1)a_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}a_k-a_1$

이므로

$(m+1)a_{m+1}=\sum_{k=1}^{m}a_k+\sum_{k=1}^{m}b_k+a_1$

$=\sum_{k=1}^{m}a_k+\sum_{k=1}^{m}[\log 3^{k+1}]+[\log 3]$

$=\sum_{k=1}^{m}a_k+\boxed{\sum_{k=1}^{m+1}[\log 3^k]}$

그런데

$[\log 3^k]+[\log 3^{m+1-k}]\le[\log 3^{m+1}]$이므로

$(m+1)a_{m+1}\le\sum_{k=1}^{m}[\log 3^k]+\sum_{k=1}^{m+1}[\log 3^k]$

$=\sum_{k=1}^{m}([\log 3^k]+[\log 3^{m+1-k}])$

$+\boxed{[\log 3^{m+1}]}$

$\le m[\log 3^{m+1}]+[\log 3^{m+1}]$

$=(m+1)[\log 3^{m+1}]$

$a_{\ \ +1} \le [\log 3^{m+1}]$

그러므로 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 (1)과 (2)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

$\therefore\ f(n)+g(n)-h(n)$

$=[\log 3^{n+1}]+{}_{k=1}^{n+1}[\log 3^k]-[\log 3^{n+1}]$

$=[\log 3]+[\log 3^2]+\ \cdots\ +[\log 3^{n+1}]$

$=9$

$\therefore\ n=6$

19. 이차곡선 정답 ⑤

ㄱ. (참) 점 $\mathrm{M}(x,\ y)$는 선분 AB의 중점이므로

$x=1+\ \frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}$,

$y=\quad 3\ \ 1+\frac{\sin\theta-\cos\theta}{2}\Big)$

$x-1=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2},\quad \frac{y}{\sqrt{3}}-1=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4(x-1)^2=1+2\sin\theta\cos\theta \quad \cdots\cdots$

$\frac{4}{3}(y-\sqrt{3})^2=1-2\sin\theta\cos\theta \quad \cdots\cdots$ ㉡

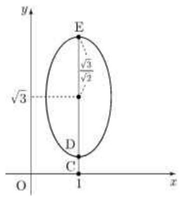
㉠, ㉡을 각 변끼리 더하면

$4(x-1)^2+\frac{4}{3}(y-\sqrt{3})^2=2$

$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{2}}+\frac{(y-\sqrt{3})^2}{\frac{3}{2}}=1$

그러므로 점 M이 그리는 도형은 타원이다.

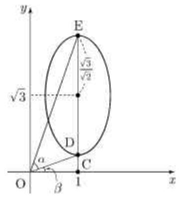
ㄴ. (참) ㄱ에서 점 M이 그리는 도형은 타원이고, 점 $\mathrm{C}(1,\ 0)$은 장축의 연장선 위에 존재하므로 그림과 같이 점 D와 E는 타원의 장축의 양 끝점이다.



$\therefore\ \mathrm{CD}=\sqrt{3}-\quad \frac{3}{2}$, $\mathrm{CE}=\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{CE}}=2\sqrt{3}$

ㄷ. (참) $\angle\mathrm{DOE}=\alpha$이므로 $\angle\mathrm{COD}=\beta$라 하면



$\tan(\alpha+\beta)=\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\tan\beta=\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{3}-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ \tan\alpha=\tan((\alpha+\beta)-\beta)$

$=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\beta}$

$=\frac{2\sqrt{\frac{3}{2}}}{1+\ \ 3-\frac{3}{2}\Big)}=\frac{2}{5}\sqrt{6}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20. 미분법 정답 ⑤

$f(x)=\ \frac{1}{x}\ln x$에서

$f'(x)=-\ \frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$

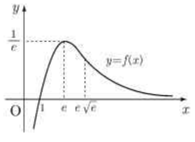
$f''(x)=-\frac{2}{x^3}(1-\ln x)-\frac{1}{x^3}=-\frac{1}{x^3}(3-2\ln x)$

ㄱ. (참) $f'(x)=0$에서 $x=e$이고, $f''(x)=0$에서 $x=e^{\frac{3}{2}}$이므로 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	변곡점	↘

또, $\lim_{x\to\infty}\ \frac{\ln x}{x}=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $f(x)=\frac{1}{x}\ln x$의 개형을 그리면 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(e)=\frac{1}{e}$



ㄴ. (참) $x>e$일 때, $f'(x)<0$ 즉, 함수 $f(x)$는 감소함수이므로

$\frac{1}{2011}\ln 2011>\frac{1}{2012}\ln 2012$

$\ln 2011^{2012}>\ln 2012^{2011}$

$\therefore\ 2011^{2012}>2012^{2011}$

ㄷ. (참) 열린 구간 $(0,\ e)$에서 $f''(x)<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. 적분법 정답 ④

$y=e^{-x}$에서 $y'=-e^{-x}$이므로 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 점 $(-1,\ e)$에서의 접선 l의 방정식은

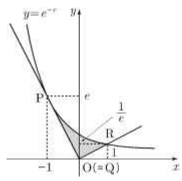
$y=-e(x+1)+e,\ \ y=-ex$

$\therefore\ \mathrm{Q}(0,\ 0)$

따라서 점 Q를 지나고 접선 l에 수직인 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{e}x$

이고, $\frac{1}{e}x=e^{-x}$에서 점 R의 좌표는 $\left(1,\ \frac{1}{e}\right)$



그러므로 구하는 회전체의 부피는

$\pi\ \ {}_{-1}^{1}(e^{-x})^2dx-\pi\int_{-1}^{0}(-ex)^2dx-\pi\int_{0}^{1}\left(\frac{x}{e}\right)^2dx$

$=\pi\left\{\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{e^2}{3}x^3\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{3e^2}x^3\right]_{0}^{1}\right\}$

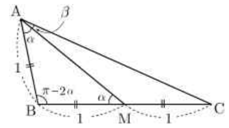
$=\pi\ \ \left(-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^2\right)-\frac{e^2}{3}-\frac{1}{3e^2}\Big\}$

$=\pi\left(\frac{e^2}{6}-\frac{5}{6e^2}\right)$

22. 삼각함수 정답 ①

점 M은 변 BC의 중점이므로 AB　BM$=1$

즉, 삼각형 ABM은 이등변삼각형이다.



$\angle ABM=\pi-2\alpha$, $\cos(\pi-2\alpha)=-\cos 2\alpha=-\frac{1}{4}$

이므로 삼각형 ABC에서 제이코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}=\quad\overline{AB}\quad+BC^2-2\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos(\pi-2\alpha)$

$=\quad 1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\ -\frac{1}{4}\Big)$

$=\quad 6$

$\angle ACM=\alpha-\beta$이므로 $\angle AMC=\pi-\alpha$이고,

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1}{4}$에서 $\sin\alpha=\ \frac{\sqrt{6}}{4}$ 이므로

삼각형 AMC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{1}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{6}}{\sin(\pi-\alpha)}$

$\therefore\ \sin\beta=\frac{1}{4}$, $\cos\beta=\quad 1-\sin^2\beta=\ \frac{\sqrt{15}}{4}$

또, $\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{4}$이므로

$\cos(2\alpha-\beta)=\cos 2\alpha\cos\beta+\sin 2\alpha\sin\beta$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4}$

$=\frac{\sqrt{15}}{8}$

$\therefore\ 8\cos(2\alpha-\beta)=\sqrt{15}$

23. 지수함수와 로그함수 정답 ②

$P(a,\ 1)$, $Q(b,\ 1)$, $R\left(\frac{1}{a},\ -1\right)$, $S\left(\frac{1}{b},\ -1\right)$이므로

$\alpha=$(직선 PS의 기울기)$=\ \frac{2}{a-\frac{1}{b}}\ =\ \frac{2b}{ab-1}$

$\beta=$(직선 PR의 기울기)$=\frac{2}{a-\frac{1}{a}}=\ \frac{2a}{a^2-1}$

$\gamma=$(직선 QS의 기울기)$=\frac{2}{b-\frac{1}{b}}=\ \frac{2b}{b^2-1}$

$\delta=$(직선 QR의 기울기)$=\frac{2}{b-\frac{1}{a}}=\frac{2a}{ab-1}$

이때, $0<a<b<1$에서 $0<a^2<ab<b^2<1$이므로

$a^2-1<ab-1<b^2-1<0$

즉, $\frac{1}{a^2-1}>\frac{1}{ab-1}>\frac{1}{b^2-1}$

$\therefore\ \alpha>\gamma,\ \beta>\delta,\ \delta>\alpha$

$\therefore\ \gamma<\alpha<\delta<\beta$

24. 지수함수와 로그함수 정답 ③

$h(x)=|f(x)-g(x)|$

$=|a^{2x}-a^{x+1}+2|$

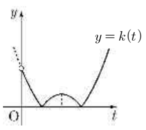
에서 $a^x=t\,(t>0)$라 하면

$k(t)=|t^2-at+2|$

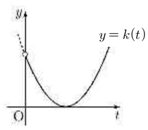
이차방정식 $t^2-at+2=0$의 판별식을 　라 하면

$D=a^2-8$이므로 함수 $y=k(t)$의 그래프는 다음과 같다.

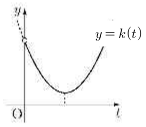
(i) $D>0$ 즉, $a>2\sqrt{2}$일 때,



(ii) $D=0$ 즉, $a=2\sqrt{2}$일 때,



(iii) $D<0$ 즉, $a<2\sqrt{2}$일 때,



ㄱ. (참) $a=2\sqrt{2}$일 때, $y=k(t)$의 그래프와 x축은 한 점에서 만나므로 $y=h(x)$의 그래프와 x축은 한 점에서 만난다.

ㄴ. (거짓) $a=4$일 때, $k(t)=|t^2-4t+2|$이고,

$t^2-4t+2=0$에서 $t=2\pm\sqrt{2}$이므로 $y=k(t)$의 그래프는 $0<t<2-\sqrt{2}$에서 감소하고,

$2-\sqrt{2}<t<2$에서 증가한다.

따라서 $x<\frac{1}{2}$일 때, $0<t<4^{\frac{1}{2}}=2$이므로

$h(x_1)$, $h(x_2)$의 대소를 비교할 수 없다.

ㄷ. (참) 　$y=k(t)$의 그래프가 직선 $y=1$과 접할 때, $y=k(t)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만난다.

방정식 $t^2-at+2=1$ 즉, $t^2-at+1=0$이 $a=2$일 때, 중근을 가지므로 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나는 a의 값이 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

25. 수열 정답 15

수열 　$a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}-a_1=27$에서 $d=3$

또, $S_{10}=\frac{10(2a_1+9\cdot3)}{2}$ 이고, $a_{10}=a_1+27$이므로

$S_{10}=a_{10}$에서 $5(2a_1+9\cdot3)=a_1+27$

$\therefore\ a_1=-12$

$\therefore\ S_{10}=a_{10}=a_1+27=15$

26. 순열과 조합 정답 145

$\sum_{k=1}^{5}x_k=a$, $\sum_{k=6}^{10}x_k=b$라 하면

a, b가 음이 아닌 정수이므로 $2a+3b=8$을 만족시키는 경우는 다음의 두 가지이다.

(i) $(a,\ b)=(4,\ 0)$인 경우

순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{10})$의 개수는

${}_{5+4-1}C_4\times{}_{5+0-1}C_0={}_8C_4\times{}_4C_0=70$(개)

(ii) $(a,\ b)=(1,\ 2)$인 경우

순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{10})$의 개수는

${}_{5+1-1}C_1\times{}_{5+2-1}C_2={}_5C_1\times{}_6C_2=75$(개)

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $70+75=145$(개)이다.

27. 방정식과 부등식 정답 140

$\frac{(x-2)}{x-4)(x-6)} \le 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2(x-4)(x-6) \le 0,\ x \ne 4,\ x \ne 6$

$\Leftrightarrow x=2$ 또는 $4<x<6$

$\therefore \quad = \{x \mid x=2$ 또는 $4<x<6$

조건 (가)에서

$A \cap B = \{2\} \cup \{x \mid 5 \le x < 6\}$

조건 (나)에서

$A^C \cap B^C = \{x \mid 3 < x \le 4\}$

즉, $A \cup B = \{x \mid x \le 3$ 또는 $x > 4\}$

이므로 $B = \{x \mid x \le 3$ 또는 $x \ge 5\}$이어야 한다.

그런데, $B = \{x \mid (x-6)f(x) \ge 0\}$이므로

$f(x)$는 $x-3,\ x-5$를 인수로 갖는다.

또한, $f(x)$가 $x-6$을 인수로 가질 때,

$x \ge 5$인 모든 x에 대하여 $(x-6)f(x) \ge 0$이고,

$f(x)$는 삼차항의 계수가 1이므로

$f(x) = (x-3)(x-5)(x-6)$

$\therefore f(10) = 7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$

28. 행렬과 그래프 정답 60

$x^2+y^2-2x-4y-11=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=4^2$

직선 $y=2x$는 원의 중심 $(1, 2)$를 지나므로 선분 PQ는 원의 지름이 된다. 즉, 삼각형 PRQ는 $\angle \mathrm{PRQ} = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

그러므로 $\mathrm{PR}=a,\ \mathrm{RQ}=b$로 놓으면 $a^2+b^2=8^2$이고,

$A = \begin{matrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{matrix}\Bigg)$

$= \begin{pmatrix} \frac{b}{8} & \frac{a}{8} \\ \frac{a}{8} & \frac{b}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}$

$\therefore A^2 = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{64}\begin{matrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{matrix}\Bigg)$

$= \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 64 & 2ab \\ 2ab & 64 \end{pmatrix}$

$8A^2 = 4A+7E$에 대입하면

$\begin{pmatrix} 8 & \frac{ab}{4} \\ \frac{ab}{4} & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

$8 = \frac{b}{2}+7,\ \frac{ab}{4} = \frac{a}{2}$이므로

$b=2,\ a = \quad 64-2^2 = \quad 60$

$\therefore S = \sqrt{60} \times 2 \times \frac{1}{2} = \sqrt{60}$

$\therefore S^2 = 60$

29. 함수의 극한과 연속 정답 16

$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{a_n}{2+a_n}$ 에서

$(2+a_n)\sin\frac{\pi}{n} = a_n,\ a_n\ 1-\sin\frac{\pi}{n}\Big) = 2\sin\frac{\pi}{n}$

$\therefore a_n = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$

$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{b_n}{2-b_n}$ 에서

$(2-b_n)\sin\frac{\pi}{n} = b_n,\ b_n\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right) = 2\sin\frac{\pi}{n}$

$\therefore b_n = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$

그러므로

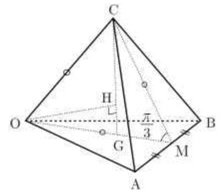
$a_n+b_n = \frac{4\sin\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}},\ a_n-b_n = \frac{4\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$

$\therefore \frac{1}{\pi^3}\lim_{n\to\infty} n^3(a_n+b_n)(a_n-b_n)$

$= \frac{1}{\pi^3}\lim_{n\to\infty} n^3 \times \frac{4\sin\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}} \times \frac{4\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{16}{\cos^4\frac{\pi}{n}} \times \left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^3 = 16$

30. 벡터 정답 20



선분 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 OAB와 삼각형 CAB가 합동인 정삼각형이므로 OM = CM이고, 삼각형 OAB와 삼각형 CAB가 이루는 이면각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 OMC는 정삼각형이다.

$\mathrm{OC} = \overline{\mathrm{OM}} = a$라 하면 $\mathrm{OG} = \frac{2}{3}\overline{\mathrm{OM}} = \frac{2}{3}a$이고,

$\angle \mathrm{COM} = \frac{\pi}{3}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{2}{3}a \cdot a \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}a^2$

또, 점 H는 선분 CG의 내분점이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\overrightarrow{\mathrm{OG}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots$

를 만족시키는 $t(0<t<1)$가 존재한다.

이때, $\overline{\mathrm{OH}} \perp \overline{\mathrm{CG}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CG}} = 0$이다.

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CG}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \ \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})$

$= \ t\overrightarrow{\mathrm{OG}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})$

$= t|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2 + (1-2t)\overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$-(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

$= \frac{4}{9}a^2t + (1-2t)\frac{1}{3}a^2 - (1-t)a^2 = 0$

$\frac{7}{9}t = \frac{2}{3}$에서 $t = \frac{6}{7}$

그런데 점 G는 삼각형 OAB의 무게중심이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{OG}} + \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$= \frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$= \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$

$\therefore p = \frac{2}{7},\ q = \frac{2}{7},\ r = \frac{1}{7}$

$\therefore 28(p+q+r) = 28 \times \frac{5}{7} = 20$