2011학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시

수리 영역

문 과

성명	

수험번호							

○ 먼저 문제지에 성명과 수험 번호를 기입하시오.

○ 답안지에 성명과 수험 번호를 정확하게 표기하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 이 포함된 경우에는 0 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=7$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3n-1}{a_n-1}$의 값은? [2점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

2. 두 사건 , B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=0.4,\ \mathrm{P}(B)=0.5,\ \mathrm{P}(A\cup B)=0.8$$

일 때, $\mathrm{P}(A^{C}|B)+\mathrm{P}(A|B^{C})$의 값은? [2점]

① 1.1　② 1.2　③ 1.3　④ 1.4　⑤ 1.5

3. 행렬 $\left.\begin{matrix} a & -2 \\ 1 & b \end{matrix}\right)$에 대하여 $A \ = A$, $A^4 = E$가 성립할 때, 두 실수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, E는 단위행렬이다.) [2점]

① -5　　② -3　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

4. $10^{0.76}$의 정수부분은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$로 계산한다.) [3점]

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

5. 이 자연수일 때, 집합 을

$$A_n = \ x \mid x^n = 2011,\ x \quad \text{실수}\}$$

라 하자. 집합 A_n의 원소의 개수를 $f(n)$이라 할 때, ${}^{2011}_{n=1}(-1)^n f(n)$의 값은? [3점]

① 502 ② 1004 ③ 1005

④ 2010 ⑤ 2011

6. 등비수열 $a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 256, \quad \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} = 4$$

가 성립할 때, $a_1 a_{10}$의 값은? [3점]

① 64 ② 32 2 ③ 32

④ $16\sqrt{2}$ ⑤ 16

7. 수열 $\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

$$a_{n+1}=a_n+2(n-1)\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$a_{10}=100$일 때, a_1의 값은? [3점]

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

8. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 것이다. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이고, 모든 자연수 n에 대하여 점 $(n,\ a_n)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점일 때, 두 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① $-\log_3 2$ ② $1-\log_3 2$ ③ $2-\log_3 2$ ④ $3-\log_3 2$ ⑤ $4-\log_3 2$

9. 모든 실수 에 대하여 부등식

$$2^{x} + a \cdot 2^{2x-1} + 10 > \frac{3}{4}a$$

를 만족시키는 자연수 a의 최댓값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

10. 두 사격선수 A, B가 한 번의 사격에서 10점을 얻을 확률은 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$라고 한다. 두 선수가 임의로 순서를 정하여 각각 한 번씩 사격하였더니 먼저 사격한 선수만 10점을 얻었다고 한다. 이때, 먼저 사격한 선수가 A이었을 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{17}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{9}{13}$

11. 어느 지역에서 사관학교에 지원한 학생들을 대상으로 안경 착용 여부를 조사하였더니 그 결과가 다음 표와 같았다.

	남학생	여학생
안경을 쓴 학생	명	100명
안경을 안 쓴 학생	180명	$(n+30)$명

이 학생들 중에서 임의로 한 명을 선택할 때, 그 학생이 남학생일 사건을 , 안경을 쓴 학생일 사건을 B라 하자. 두 사건 A, B가 서로 독립일 때, 자연수 n의 값은? [3점]

① 80 ② 100 ③ 120 ④ 150 ⑤ 180

12. 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수 X와 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}\ X \geqq 58) = \mathrm{P}(Z \geqq -1)$
(나) $\mathrm{P}(X \leqq 55) = \mathrm{P}(Z \geqq 2)$

$m+\sigma$ 의 값은? [3점]

① 62 ② 63 ③ 64 ④ 65 ⑤ 66

13. 어떤 기계 장치는 작동하기 시작한 순간부터 시간이 지남에 따라 그 정확도가 점점 떨어진다고 한다. 이 기계가 작동하기 시작하여 시간이 되는 순간의 정확도를 (%)라 하면 관계식

$I = a\log(t+7)+b$ (a, b는 상수, $0 \leqq t \leqq 200$)

가 성립한다고 한다. 처음 이 기계가 작동하기 시작한 순간의 정확도는 100이며, 작동하기 시작하여 28시간이 되는 순간의 정확도는 79라고 한다. 이 기계가 작동하기 시작하여 63시간이 되는 순간의 정확도는? (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [3점]

① 55 ② 60 ③ 65 ④ 70 ⑤ 75

14. 양수 a에 대하여 $\log a$의 가수를 $g(a)$라 하자. 두 함수 $y=g(3|x|+1)$, $y=mx+1$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

15. 다음은 　이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1\cdot 2}{n+1}+\frac{2\cdot 3}{n+2}+\frac{3\cdot 4}{n+3}+\cdots+\frac{n(n+1)}{n+n}<\frac{n+1)}{4}\ \cdots\ (*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

부등식 $(*)$의 좌변을 $_n$이라 하자

(i) $n=2$일 때, (좌변) $=S_2=\boxed{\text{(가)}}$, (우변)$=\frac{9}{4}$ 이므로 $(*)$은 성립한다.

(ii) $n=m$ $(m=2,3,4,\cdots)$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하자.

$S_m=\frac{1\cdot 2}{m+1}+\frac{2\cdot 3}{m+2}+\frac{3\cdot 4}{m+3}+\cdots+\frac{m(m+1)}{m+m}$이고,

$S_{m+1}=\frac{1\cdot 2}{(m+1)+1}+\frac{2\cdot 3}{(m+1)+2}+\cdots+\frac{(m+1)(m+2)}{(m+1)+m+1}$이므로

$S_{m+1}-S_m=-2\ \frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+2}+\frac{3}{m+3}+\cdots+\frac{m}{2m}\Big)+\boxed{\text{(나)}}+\frac{m+2}{2}$

한편, $\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+2}+\cdots+\frac{m}{2m}>\frac{1}{m+m}+\frac{2}{m+m}+\cdots+\frac{m}{2m}=\boxed{\text{(다)}}$ 이고

$\boxed{\text{(나)}}<\frac{2m+1}{4}$ 이므로 $S_{m+1}-S_m<\frac{2m+3}{4}$ 이다.

따라서 $S_{m+1}<S_m+\frac{2m+3}{4}<\frac{(m+2)^2}{4}$이므로 $(*)$은 $n=m+1$일 때도 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

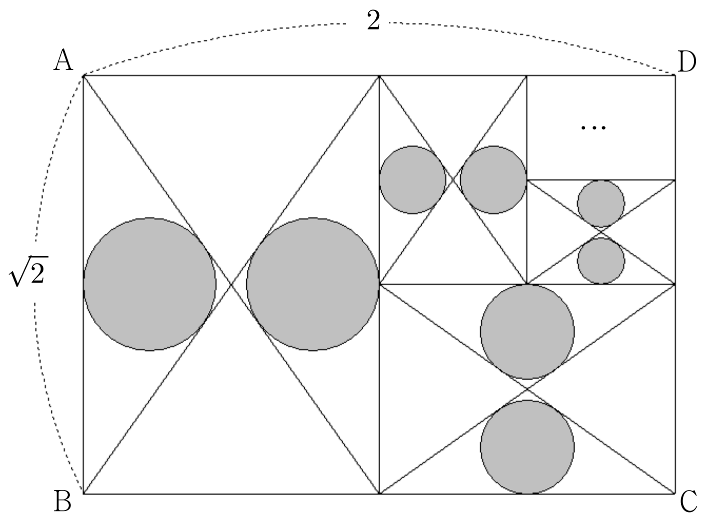
위의 증명에서 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $af(3)g(3)$의 값은? [3점]

① $\frac{13}{7}$　② $\frac{20}{7}$　③ $\frac{26}{7}$

④ $\frac{33}{7}$　⑤ $\frac{39}{7}$

16. 그림과 같이 AB 2, AD $=2$인 직사각형 ABCD 에서 다음 [단계]와 같은 순서로 도형을 만들어 나간다.

> [단계 1] 직사각형 ABCD 의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 이라 하자.
>
> [단계 2] [단계 1]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_2라 하자.
>
> [단계 3] [단계 2]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_3이라 하자.
>
> ⋮



이와 같은 과정을 계속하여 [단계 n]에서 그려진 두 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\overset{\infty}{\underset{n=1}{}} S_n$의 값은? [4점]

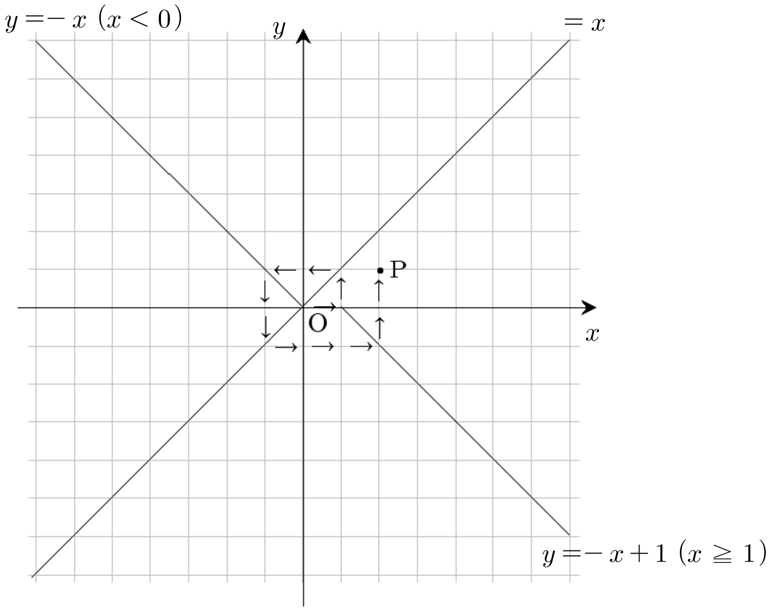
① $2\pi(5-2\sqrt{6})$ ② $2\pi(3-\sqrt{6})$ ③ $2\pi(5-\sqrt{6})$

④ $4\pi(3-\sqrt{6})$ ⑤ $4\pi(5-\sqrt{6})$

17. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 는 다음과 같은 규칙으로 축 또는 y축과 평행한 방향으로 이동한다.

> (가) 1회 이동거리는 1이고, 처음에는 원점을 출발하여 점 $(1, 0)$으로 이동한다.
> (나) 점 P가 반직선 $y=-x+1\ (x \geqq 1)$ 위의 점에 도착하면 y축의 양의 방향으로 이동하고, 반직선 $y=x\ (x>0)$ 위의 점에 도착하면 x축의 음의 방향으로 이동한다.
> (다) 점 P가 반직선 $y=-x\ (x<0)$ 위의 점에 도착하면 y축의 음의 방향으로 이동하고, 반직선 $y=x\ (x<0)$ 위의 점에 도착하면 x축의 양의 방향으로 이동한다.

예를 들어, 그림과 같이 점 P가 원점을 출발하여 11회 이동하면 점 $(2, 1)$에 도착한다.



점 P가 원점을 출발하여 k회 이동하면 점 $(0, 10)$에 도착한다. k의 값은? (단, 각각의 반직선에 도착하기 전에는 진행방향을 바꾸지 않는다.) [4점]

① 350　② 360　③ 370　④ 380　⑤ 390

18. 사과 개와 복숭아 2개가 있다. 이 5개의 과일 중에서 임의로 4개의 과일을 택하여 네 명의 학생에게 각각 하나씩 나누어 주었다. 남아있는 1개의 과일을 네 명의 학생 중 임의의 한 명에게 주었을 때, 이 학생이 가진 2개의 과일이 같은 종류일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

19. 집합 $=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 로의 함수 중에서 다음 세 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는? [4점]

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x , x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다. (나) 합성함수 $f \circ f$ 가 정의된다. (다) $(f \circ f)(1) = 1$이다.

① 24 ② 30 ③ 36

④ 42 ⑤ 48

20. 세 수열 $\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $0 < a_n < b_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{{b_n}^2} = 0$이다.

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 발산하고 수열 $\{a_n b_n\}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

ㄷ. $a_n < b_n < c_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$이고 $\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n = \lim_{n\to\infty}(n-1)c_n = 1$이면 $\lim_{n\to\infty} n b_n = 1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

21. 이차정사각행렬을 원소로 갖는 집합   을 다음과 같이 정의하자.

$M \quad A \mid A \quad = A\}$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보기>

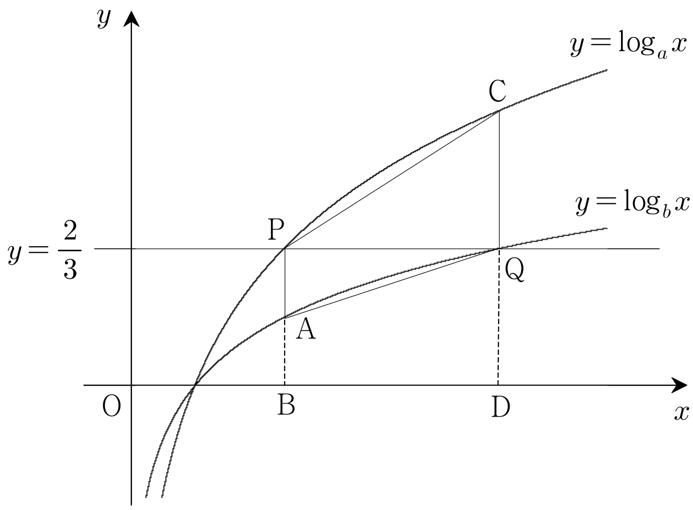
ㄱ. $X^2 \quad M$이면 $X \in M$이다.

ㄴ. $X \in M$이면 $E - X \in M$이다.

ㄷ. $X \in M$, $Y \in M$이고 $XY = -YX$이면 모든 자연수 m, n에 대하여 $X^m + Y^n \in M$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

22. 그림과 같이 직선 $=\dfrac{2}{3}$ 가 두 곡선 $y=\log\ x$, $y=\log_b x$ 와 만나는 점을 각각 P, Q 라 하자. 점 P 를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_b x$ 와 x 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하고, 점 Q 를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_a x$ 와 x 축과 만나는 점을 각각 C, D 라 하자.

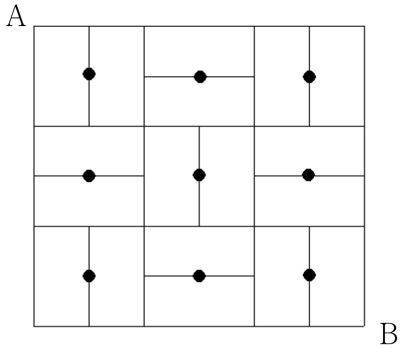


$\mathrm{PA}=\overline{\mathrm{AB}}$ 이고, 사각형 PAQC 의 넓이가 1 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $1<a<b$ 이다.) [4점]

① $12\quad 2$　　② $14\sqrt{2}$　　③ $16\sqrt{2}$

④ $18\sqrt{2}$　　⑤ $20\sqrt{2}$

23. 그림과 같이 직사각형 모양으로 이루어진 도로망이 있고, 이 도로망의 9개의 지점에 ●이 표시되어 있다.



A지점에서 B지점까지 가는 최단경로 중에서 ●이 표시된 9개의 지점 중 오직 한 지점만을 지나는 경로의 수는? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

24. 어느 선박 부품 공장에서 만드는 부품의 길이 X는 평균이 100, 표준편차가 0.6인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 만든 부품 중에서 9개를 임의추출한 표본의 길이의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, 표본평균 $\overline{X}$와 모평균의 차가 일정한 값 c 이상이면 부품의 제조과정에 대한 전면적인 조사를 하기로 하였다. 부품의 제조 과정에 대한 전면적인 조사를 하게 될 확률이 5% 이하가 되도록 상수 c의 값을 정할 때, c의 최솟값은? (단, 단위는 mm이고, 오른쪽 표준정규분포표를 이용한다.) [4점]

	P(0 ≦ ≦ z)
1.65	0.450
1.96	0.475
2.58	0.495

① 0.196 ② 0.258 ③ 0.330 ④ 0.392 ⑤ 0.475

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. , y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} -b & a-5 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ -2y \end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 실수 a, b에 대하여 좌표평면에서 점 (a, b)가 나타내는 도형의 넓이는 이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [3점]

26. 두 수 n, α가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) n은 자연수이고, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 이다.
(나) $\log n = 1 - \alpha$

등식 $\log_2 m^2 = n + \alpha$를 만족시키는 실수 m에 대하여 $3m^4$의 값을 구하시오. [3점]

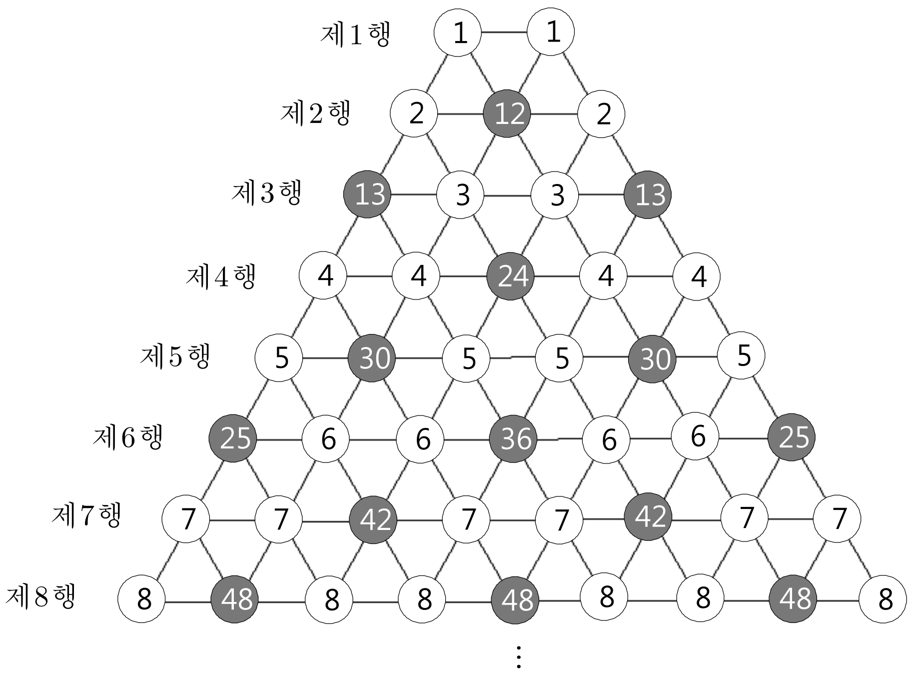
27. 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 서로 다른 두 원소를 a, b라 하고, 집합 $B=\{6, 7, 8, 9\}$의 서로 다른 두 원소를 c, d라 하자. 순서쌍 (a, b, c, d) 중에서 네 수의 곱 $abcd$가 짝수인 것의 개수를 구하시오. [3점]

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 그림과 같이 정삼각형을 붙여서 만든 도형 위에 흰색과 검은색의 바둑돌을 정삼각형의 각 꼭짓점 위에 나열하는데, 제 행에는 $(n+1)$개의 돌을 다음과 같은 규칙으로 나열한다. $(n=1, 2, 3, \cdots)$

> (가) 제 1행에는 모두 흰색의 바둑돌을 나열한다.
> (나) 제 $(3n-1)$행에는 맨 왼쪽부터 흰색, 검은색, 흰색의 바둑돌 3개를 n회 반복하여 나열한다.
> (다) 제 $3n$행에는 맨 왼쪽에 검은색의 바둑돌을 1개 놓은 다음 그 오른쪽으로 흰색, 흰색, 검은색의 바둑돌 3개를 n회 반복하여 나열한다.
> (라) 제 $(3n+1)$행에는 맨 왼쪽에 흰색의 바둑돌을 2개 나열한 다음 그 오른쪽으로 검은색, 흰색, 흰색의 바둑돌 3개를 n회 반복하여 나열한다.

위의 규칙대로 바둑돌을 나열한 다음 제 n행에 놓인 흰색의 바둑돌에는 n을 적고, 각 행에 놓인 검은색의 바둑돌에는 그 돌과 가장 가까운 4개 또는 6개의 흰색의 바둑돌에 적힌 숫자의 합을 적는다. 이때, 198이 적힌 바둑돌의 개수를 구하시오. [4점]



30. 주머니 속에 빨간 공 개, 파란 공 5개가 들어있다. 이 주머니에서 5개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중에서 더 많은 색의 공의 개수를 확률변수 라 하자. 예를 들어 꺼낸 공이 빨간 공 2개, 파란 공 3개이면 $X=3$이다. $Y=14X+14$라 할 때 확률변수 Y의 평균을 구하시오. [4점]