수리 영역(문과)

1. ②	**2.** ④	**3.** ②	**4.** ①	**5.** ②
6. ①	**7.** ②	**8.** ⑤	**9.** ②	**10.** ③
11. ③	**12.** ③	**13.** ④	**14.** ②	**15.** ③
16. ①	**17.** ⑤	**18.** ④	**19.** ⑤	**20.** ④
21. ⑤	**22.** ③	**23.** ①	**24.** ④	**25.** 16
26. 256	**27.** 228	**28.** 11	**29.** 142	**30.** 59

1. 수열의 극한

정답 ②

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=7$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$

주어진 식의 분모, 분자를 각각 n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3n-1}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a_n}{n}+3-\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n}-\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{2\cdot 3+3}{3}=3$$

2. 확률

정답 ④

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=0.4+0.5-0.8=0.1$

$$\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

$$=\frac{0.5-0.1}{0.5}=0.8$$

$$\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)}{1-\mathrm{P}(B)}$$

$$=\frac{0.4-0.1}{1-0.5}=0.6$$

$\therefore \mathrm{P}(A^C|B)+\mathrm{P}(A|B^C)=0.8+0.6=1.4$

3. 행렬과 그래프

정답 ②

$A^3=A$, $A^4=E$이므로

$A^4=A^3A=AA=A^2=E$

$$A^2=\begin{pmatrix}a&-2\\1&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-2\\1&b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a^2-2&-2a-2b\\a+b&-2+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$a^2-2=1$ 에서 $a^2=3$ ······

$-2a-2b=0$ 에서 $a+b=0$ ······ ㉡

$-2a+b^2=1$ 에서 $b^2=3$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 에 대입하면

$0=3+2ab+3$, $2ab=-6$

$\therefore ab=-3$

4. 지수함수와 로그함수

정답 ①

$10^{0.76}$ 에 상용로그를 취하면

$\log 10^{0.76}=0.76$

그런데 $\log 5=1-\log 2=0.6990$,

$\log 6=\log 2+\log 3=0.7781$ 이므로

$\log 5<\log 10^{0.76}<\log 6$

$\therefore 5<10^{0.76}<6$

따라서 $10^{0.76}$ 의 정수부분은 5 이다.

5. 수열

정답 ②

$$f(n)=\begin{cases}2 & (n\text{이 짝수})\\ 1 & (n\text{이 홀수})\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{2011}(-1)^n f(n)$$

$=-f(1)+f(2)-f(3)+f(4)-\ldots$

$-f(2009)+f(2010)-f(2011)$

$=(-1+2)+(-1+2)+\ldots+(-1+2)+(-1)$

$=1\times 1005-1$

$=1004$

6. 수열

정답 ①

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r 라 하면

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=256 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$a_n=ar^{n-1}$에 대하여 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\frac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{r^{10}}\right)}{1-\frac{1}{r}}$$

$$=\frac{r^{10}-1}{ar^9(r-1)}=4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $\frac{r^{10}-1}{r-1}=\frac{256}{a}$

이를 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{ar^9}\cdot\frac{256}{a}=4$, $a^2r^9=64$

$\therefore a_1a_{10}=a\cdot ar^9=a^2r^9=64$

7. 수열

정답 ②

$a_{n+1}=a_n+2(n-1)$에서 $a_{n+1}-a_n=2n-2$ 이므로

수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면

$b_n=2n-2$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-2)$$

$$=a_1+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}-2(n-1)$$

$$=a_1+n^2-3n+2$$

이때, $a_{10}=100$이므로

$a_{10}=a_1+10^2-30+2$

$=a_1+72=100$

$\therefore a_1=28$

8. 지수함수와 로그함수

정답 ⑤

지수함수 $y=a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼

평행이동시킨 그래프를 나타내는 함수의 식은

$y=f(x)=a^{x-b}$

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 3 인 등비수열이므로

$a_n=2\times 3^{n-1}$

모든 자연수 에 대하여 점 $n, 2\times 3^{\ -1})$은 함수

$y=a^{x-b}$ 의 그래프 위의 점이므로

$2\times 3^{n-1}=a^{n-b}=a^{n-1+(1-b)}=a^{1-b}\times a^{n-1}$

따라서 $a^{1-b}=2$, $a=3$이어야 한다.

이때, $3^{1-b}=2$ 의 양변에 밑이 3 인 로그를 취하면

$1-b=\log_3 2$, $b=1-\log_3 2$

$\therefore\ a+b=3+(1-\log_3 2)=4-\log_3 2$

9. 지수함수와 로그함수 정답 ②

$2^{4x}+a\cdot 2^{2x-1}+10>\frac{3}{4}a$

$\Leftrightarrow\ 4^{2x}+\frac{a}{2}\cdot 4^{x}+10-\frac{3}{4}a>0$

$4^{x}=t(t>0)$ 로 치환하면

$t^{2}+\frac{a}{2}t+10-\frac{3}{4}a>0$

$\Leftrightarrow\ t+\frac{a}{4}\Big)^{2}+10-\frac{3}{4}a-\frac{a^{2}}{16}>0$

$f(t)=\left(t+\frac{a}{4}\right)^{2}+10-\frac{3}{4}a-\frac{a^{2}}{16}$이라 하면

a 가 자연수이므로 이차함수 $y=f(t)$ 의 그래프의 대칭축

$t=-\frac{a}{4}<0$이다. 따라서 모든 양수 t 에 대하여 부등식

$f(t)>0$ 이 성립하려면 $f(0)\geq 0$이어야 한다.

$f(0)=10-\frac{3}{4}a\geq 0$

$\therefore\ a\leq\frac{40}{3}=13.\times\times$

따라서 자연수 의 최댓값은 13 이다.

10. 확률 정답 ③

두 사격선수 A, B 가 한 번의 사격에서 10 점을 얻는

사건을 각각 , B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

두 선수가 각각 한 번씩 사격하였을 때, 먼저 사격한 선수만

10 점을 얻는 사건을 E라 하면

(i) A 가 먼저 사격했을 경우

$\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

(ii) B 가 먼저 사격했을 경우

$\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{3}{5}$

11. 확률 정답 ③

안경 착용 여부를 조사한 결과, 각 경우에 해당하는 학생

수는 다음 표와 같다.

	남학생	여학생	계
안경을 쓴 학생	n	100	$n+100$
안경을 안 쓴 학생	180	$n+3$	$n+210$
계	$n+180$	$n+130$	$2n+310$

위의 표에서 전체 학생 수는 $(2n+310)$ 이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{n+180}{2n+310}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{n+100}{2n+310}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n}{2n+310}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\mathrm{B})$ 에서

$\frac{n}{2n+310}=\frac{n+180}{2n+310}\cdot\frac{n+100}{2n+310}$

$n^{2}+30n-18000=0$, $(n+150)(n-120)=0$

$\therefore\ n=120$ ($\because$ n은 자연수)

12. 통계 정답 ③

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^{2})$ 을 따르고, 확률변수

Z가 정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$ 을 따르므로

$\mathrm{P}(X\geq 58)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{58-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\geq -1)$

에서 $\frac{58-m}{\sigma}=-1$

$\therefore\ m-\sigma=58$ ……

$\mathrm{P}(X\leq 55)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{55-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 2)=\mathrm{P}(Z\leq -2)$

에서 $\frac{55-m}{\sigma}=-2$

$\therefore\ m-2\sigma=55$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=61$, $\sigma=3$

$\therefore\ m+\sigma=64$

13. 지수함수와 로그함수 정답 ④

이 기계가 작동하기 시작한 순간의 정확도가 100 이므로

$100=a\log 7+b$ …… ㉠

이 기계가 작동하기 시작하여 28 시간이 되는 순간의

정확도가 79 이므로

$79=a\log 35+b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$21=a(\log 7-\log 35)=a\log\frac{1}{5}$

$a\log 5=a(1-\log 2)=a(1-0.3)=-21$

$0.7a=-21$

$\therefore\ a=-30,\ b=100+30\log 7$

따라서 이 기계가 작동하기 시작하여 63 시간이 되는

순간의 정확도 I는

$I=a\log(63+7)+b$

$=-30\log 70+100+30\log 7$

$=30(\log 7-\log 70)+100$

$=-30+100$

$=70$

14. 지수함수와 로그함수 정답 ②

$3|x|+1\geq 1$이므로 $\log(3|x|+1)\geq 0$이다.

(i) $0\leq\log(3|x|+1)<1$일 때

$1\leq 3|x|+1<10$, $0\leq|x|<3$

따라서 $-3<x<3$이고,

$g(3|x|+1)=\log(3|x|+1)$

$=\begin{cases}\log(3x+1) & (0<x<3)\\ \log(-3x+1) & (-3<x<0)\end{cases}$

(ii) $1\leq\log(3|x|+1)<2$일 때

$10\leq 3|x|+1<100$, $3\leq|x|<33$

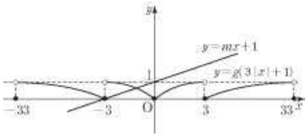
따라서 $\le x < 33$ 또는 $-33 < x \le -3$ 이고,

$g(3|x|+1)$

$= \log(3|x|+1) - 1$

$$= \begin{matrix} \log(3x+1)-1 & (3 < x < 33) \\ \log(-3x+1)-1 & (-33 < x < -3) \end{matrix}$$

(i), (ii)에서 함수 $y = g(3|x|+1)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y = mx+1$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 항상 지나는 직선이므로 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m 이 최대가 되려면 위의 그림과 같이 직선 $y = mx+1$ 이 점 $(-3, 0)$을 지나야 한다.

따라서 실수 m 의 최댓값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

15. 수열 **정답 ③**

(i) $n = 2$ 일 때,

(좌변) $= \quad = \frac{1 \cdot 2}{2+1} + \frac{2 \cdot 3}{2+2} = \boxed{\frac{13}{6}}$

(우변) $= \frac{(2+1)^2}{4} = \frac{9}{4}$

이때, $\frac{13}{6} < \frac{9}{4}$ 이므로 (*)은 성립한다.

(ii) $n = m$ $(m = 2, 3, 4, \cdots)$일 때 (*)이 성립한다고 가정하자.

$$S_m = \frac{1 \cdot 2}{m+1} + \frac{2 \cdot 3}{m+2} + \frac{3 \cdot 4}{m+3} + \cdots + \frac{m(m+1)}{m+m}$$

이고,

$$S_{m+1} = \frac{1 \cdot 2}{(m+1)+1} + \frac{2 \cdot 3}{(m+1)+2} + \cdots + \frac{(m+1)(m+2)}{(m+1)+m+1}$$

이므로

$S_{m+1} - S_m$

$$= -\frac{2}{m+1} - \frac{4}{m+2} - \frac{6}{m+3} - \cdots - \frac{2m}{2m} + \frac{m(m+1)}{(m+1)+m} + \frac{(m+1)(m+2)}{(m+1)+m+1}$$

$$= -2\ \frac{1}{m+1} + \frac{2}{m+2} + \frac{3}{m+3} + \cdots + \frac{m}{2m}\Big) + \boxed{\frac{m(m+1)}{2m+1}} + \frac{m+2}{m}$$

한편,

$\frac{1}{m+1} + \frac{2}{m+2} + \cdots + \frac{m}{2m}$

$> \frac{1}{m+m} + \frac{2}{m+m} + \cdots + \frac{m}{2m}$

$= \frac{1}{2m}(1+2+\cdots+m)$

$= \frac{1}{2m} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$

$= \boxed{\frac{m+1}{4}}$

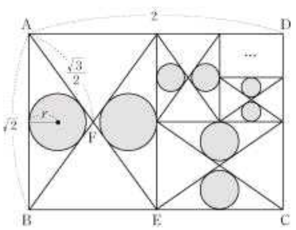
이고 $\frac{m(m+1)}{2m+1} < \frac{2m+1}{4}$ 이므로

$S_{m+1} - S_m < \frac{2m+3}{4}$ 이다.

$\therefore a = \frac{13}{6}$, $f(m) = \frac{m(m+1)}{2m+1}$, $g(m) = \frac{m+1}{4}$

$\therefore af(3)g(3) = \frac{13}{6} \cdot \frac{12}{7} \cdot 1 = \frac{26}{7}$

16. 수열의 극한 **정답 ①**



위의 그림에서 $\mathrm{BE} = 1$이므로 직각삼각형 ABE 에서 $\mathrm{AE} = \quad 3$ 이고, [단계 n]에서 그려진 원의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면 삼각형 ABF 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\ \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) r_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore r_1 = \frac{1}{\sqrt{6}+2} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

$\therefore S_1 = 2 \cdot \pi {r_1}^2$

$= 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)^2$

$= \pi(5 - 2\sqrt{6})$

또, [단계 n]과 [단계 $(n+1)$]에서 그려진 직사각형들의 닮음비가 $\sqrt{2} : 1$이므로 [단계 n]과 [단계 $(n+1)$]에서 각각 그려진 원의 반지름의 길이 r_n, r_{n+1} 사이의 닮음비도 $r_n : r_{n+1} = \sqrt{2} : 1$이고 $S_n : S_{n+1} = 2 : 1$이다.

따라서 수열 $S_n\}$은 첫째항이 $\pi(5-2\sqrt{6})$이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 무한등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi(5-2\sqrt{6})}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi(5-2\sqrt{6})$$

17. 수열 **정답 ⑤**

점 P 가 원점을 출발하여 점 $(0, n)$ 에 도착할 때까지의 이동 횟수를 a_n 이라 하면

$a_1 = 3$

$a_2 = 3 + 11 = 14$

$a_3 = 3 + 11 + 19 = 33$

$a_4 = 3 + 11 + 19 + 27 = 60$

$\vdots$

이때, 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면

$\{b_n\}$: 11, 19, 27, $\cdots$

$b_n = 11 + (n-1) \cdot 8 = 8n + 3$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(8k+3)$$

$$= 3 + 8 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 3(n-1)$$

$$= 4n^2 - n$$

따라서 점 $(0, 10)$ 에 도착할 때까지의 이동 횟수 k는

$k = a_{10}$

$= 4 \cdot 10^2 - 10$

$= 390$

18. 확률 **정답 ④**

개의 과일을 4명에게 나누어 주면 어느 한 명은 반드시 과일을 2 개 받게 되므로, 나누어 주는 방법의 수는

$$C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{3!} \times 4! = 240(\text{가지})$$

(i) 한 학생이 사과를 2 개 받을 경우

학생을 고르는 방법의 수는 4(가지)

사과 2 개를 고르는 방법의 수는 ${}_3C_2 = 3$(가지)

나머지 세 학생에게 과일을 나누어 주는 방법의 수는 $3! = 6$(가지)

$\therefore 4 \times 3 \times 6 = 72$(가지)

(ii) 한 학생이 복숭아를 2 개 받을 경우

학생을 고르는 방법의 수는 4(가지)

복숭아 2 개를 고르는 방법의 수는 ${}_2C_2 = 1$(가지)

나머지 세 학생에게 과일을 나누어 주는 방법의 수는 $3! = 6$(가지)

$\therefore 4 \times 1 \times 6 = 24$(가지)

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{72}{240} + \frac{24}{240} = \frac{2}{5}$$

19. 순열과 조합 **정답 ⑤**

조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이다.

또, 조건 (나)에서 합성함수 $f \circ f$가 정의되려면 함수 f의 치역이 함수 f의 정의역과 같아야 하므로

함수 f의 치역은 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$이다.

조건 (다)에서 $(f \circ f)(1) = 1$이므로

(i) $f(1) = 1$인 경우

정의역의 남은 4개의 원소를 치역의 각 원소에 대응시키는 방법의 수는 $4! = 24$(가지)

(ii) $f(1) = a\ (a \neq 1)$인 경우

조건 (나)에 의해 $f(a) = 1$이므로 정의역의 남은 3개의 원소를 치역의 각 원소에 대응시키는 방법의 수는 $3! = 6$(가지)

이때, a가 될 수 있는 원소는 4가지가 있으므로

$4 \times 6 = 24$(가지)

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$24 + 24 = 48$(가지)

20. 수열의 극한 **정답 ④**

ㄱ. (참) $0 < a_n < b_n$ 이고, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n^{\ 2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \times \frac{a_n}{b_n}\Big) = 0$$

ㄴ. (거짓) 【반례】 $a_n\} : 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

$\{b_n\} : 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

이면 수열 $\{a_n\}$은 발산하고 수열 $a_n b_n\}$은 수렴하지만 $\lim_{n\to\infty} b_n$은 발산한다.

ㄷ. (참) $a_n < b_n < c_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$이고

$\lim_{n\to\infty} (n+1)a_n = \lim_{n\to\infty} (n-1)c_n = 1$이므로

$a_n = \frac{1}{n+a}$, $c_n = \frac{1}{n+b}\ (a > b)$꼴이다.

따라서 $\frac{1}{n+a} < b_n < \frac{1}{n+b}(a > b)$에서

$\frac{n}{n+a} < nb_n < \frac{n}{n+b}$ 이므로

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+a} \le \lim_{n\to\infty} nb_n \le \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+b} = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} nb_n = 1$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. 행렬과 그래프 **정답 ⑤**

ㄱ. (거짓) 【반례】 $= \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\Big)$이라 하면

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$X^4 = X^2 = O$이므로 $X^2 \quad M$이지만

$X^2 \neq X$이므로 $X \notin M$이다.

ㄴ. (참) $X \in M$ 이므로 $X^2 = X$

$$\begin{aligned}(E-X)^2 &= E - 2X + X^2 \\ &= E - 2X + X \\ &= E - X\end{aligned}$$

$\therefore E - X \in M$

ㄷ. (참) (i) $X \in M$이면 $X^2 = X$

$X^3 = X^2 X = X^2 = X$

$\vdots$

$X^m = X$ (단, m은 자연수)

(ii) $Y \in M$이면 $Y^2 = Y$

$Y^3 = Y^2 Y = Y^2 = Y$

$\vdots$

$Y^n = Y$ (단, n은 자연수)

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} + Y^n)^2 &= (X+Y)^2 \\ &= X^2 + XY + YX + Y^2 \\ &= X + (-YX) + YX + Y \\ &= X + Y = X^m + Y^n \end{aligned}$$

$\therefore X^m + Y^n \in M$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

22. 지수함수와 로그함수 **정답 ③**

$\mathrm{PA} = \overline{\mathrm{AB}}$이고, $\mathrm{PB} = \frac{2}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{AB}} = \frac{1}{3}$

점 B 의 좌표를 $(t, 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{PB}} : \overline{\mathrm{AB}} = \log_a t : \log_b t = 2 : 1$

$\therefore b = a^2$

따라서 $\overline{\mathrm{CD}} : \mathrm{QD} = 2 : 1$이므로

$\overline{\mathrm{CQ}} = \overline{\mathrm{QD}} = \frac{2}{3}$

이때, 사각형 PAQC 의 넓이가 1 이므로

$\square\mathrm{PAQC} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\Big) \times \overline{\mathrm{BD}} = 1$

$\therefore \overline{\mathrm{BD}} = 2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

그런데 $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{PQ}}$이고 점 $\mathrm{P}\left(t, \frac{2}{3}\right)$가 곡선 $y = \log_a x$ 위의 점이므로

$2 \quad = \log \quad t \Leftrightarrow t = a^{\frac{2}{3}}$

점 C의 좌표를 $\; s,\ \frac{4}{3}\Big)$라 하면 점 C도 곡선 $y = \log_a x$

위의 점이므로

$\frac{4}{3} = \log_a s \Leftrightarrow s = a^{\frac{4}{3}}$

㉠에서 $\mathrm{BD} = s - t = a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 2$

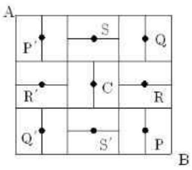
$a^{\frac{2}{3}} = \quad (X > 0)$라 치환하면

$X^2 - X - 2 = 0,\ (X-2)(X+1) = 0$

$\therefore X = a^{\frac{2}{3}} = 2,\ a = 2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore ab = a^3 = 2^{\frac{9}{2}} = 16 \quad 2$

23. 순열과 조합 정답 ①



(i) 점 P (또는 P′)를 지나는 경우

$\frac{4!}{2!2!} \times 1 = 6$(가지)

$\therefore 6 \times 2 = 12$(가지)

(ii) 점 Q (또는 Q′)를 지나는 경우

최단경로는 각각 1가지뿐이므로

$1 \times 2 = 2$(가지)

(iii) 점 R (또는 R′)를 지나는 경우

$\frac{3!}{2!1!} = 3$(가지)

$\therefore 3 \times 2 = 6$(가지)

(iv) 점 S (또는 S′)를 지나는 경우

$\frac{3!}{2!1!} = 3$(가지)

$\therefore 3 \times 2 = 6$(가지)

(v) 점 C를 지나는 경우

$2 \times 2 = 4$(가지)

(i)~(v)에서 구하는 최단경로의 개수는

$12 + 2 + 6 + 6 + 4 = 30$(가지)

24. 통계 정답 ④

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 0.6^2)$을 따르므로

크기가 9인 표본을 임의추출하였을 때의 표본평균 X는

정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 0.2^2)$을 따른다.

이때, 모평균을 m이라 하고, $|\overline{X} - m| \geq c$이면 부품의

제조과정에 대한 전면적인 조사를 하게 되므로 전면적인

조사를 하게 될 확률이 5 % 이하가 되게 하려면

$\mathrm{P}(|\overline{X} - m| \geq c) \leq 0.05 \quad \cdots\cdots$

를 만족하여야 한다. $Z = \frac{\overline{X} - m}{0.2}$이라 하면

$\mathrm{P}(|\overline{X} - m| \geq c) = \mathrm{P} \quad \frac{|\overline{X} - m|}{0.2} \geq \frac{c}{0.2}\Big)$

$= \mathrm{P}\left(|Z| \geq \frac{c}{0.2}\right)$

$= 1 - 2\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{c}{0.2}\right)$

이를 ㉠에 대입하면

$1 - 2\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{c}{0.2}\right) \leq 0.05$

$\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{c}{0.2}\right) \geq 0.475 = \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.96)$

$\frac{c}{0.2} \geq 1.96,\ c \geq 0.392$

따라서 상수 c의 최솟값은 0.392이다.

25. 행렬과 그래프 정답 16

$\begin{pmatrix} -b & a-5 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ -2y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b & a-5 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b-1 & a-8 \\ 2a & 2b+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이 연립일차방정식이 $x = 0$, $y = 0$ 이외의 해를 가지려면

$(-b-1)(2b+2) - (a-8) \cdot 2a = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

을 만족하여야 한다. ㉠을 정리하면

$(a-4)^2 + (b+1)^2 = 16$

따라서 좌표평면에서 점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형은 중심이

$(4,\ -1)$이고 반지름의 길이가 4인 원이므로 넓이 S는

$S = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$

$\therefore \frac{S}{\pi} = \frac{16\pi}{\pi} = 16$

26. 지수함수와 로그함수 정답 256

조건 (가)에서 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2} < 1 - \alpha < 1$

$\frac{1}{2} < \log_4 n < 1$에서 $2 < n < 4$

$\therefore n = 3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이를 조건 (나)에 대입하면

$\log_4 3 = 1 - \alpha$

$\therefore \alpha = 1 - \log_4 3 = \log_4 \frac{4}{3} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 주어진 등식에 대입하면

$\log_2 m^2 = 3 + \log_4 \frac{4}{3} = \log_4 \frac{4^4}{3}$

$\log_4 m^4 = \log_4 \frac{4^4}{3},\ m^4 = \frac{4^4}{3}$

$\therefore 3m^4 = 4^4 = 256$

27. 순열과 조합 정답 228

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$를 만드는 방법의 수는

${}_5\mathrm{P}_2 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 20 \times 12 = 240$(가지)

이때, 네 수 $a,\ b,\ c,\ d$가 모두 홀수이면 네 수의 곱

$abcd$가 홀수이므로, 홀수인 것의 개수는

${}_3\mathrm{P}_2 \times {}_2\mathrm{P}_2 = 12$(가지)

따라서 네 수의 곱 $abcd$가 짝수인 것의 개수는 순서쌍

전체의 개수에서 홀수인 것의 개수를 뺀 것과 같으므로

$240 - 12 = 228$(가지)

28. 수열의 극한 정답 11

$\frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}$를 변형하면

$$\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n(n+1)} - \frac{b}{(n+1)(n+2)}$$

위의 항등식을 풀면

$a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \ {}^{\infty}_{=1} \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \ \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big\}$$

$$= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\frac{3}{2}\lim_{\to\infty} \ \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+ \cdots +\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\Big\}$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+ \cdots +\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{7}{4} = \frac{q}{p}$$

$\therefore p+q = 4+7 = 11$

29. 수열 **정답 142**

(i) 198 이 적힌 흰색 바둑돌의 개수

$198 = 3\times 66$이므로

제198 행에 놓인 흰색의 바둑돌의 개수는

$2\times 66 = 132$(개)

따라서 198 이 적힌 흰색의 바둑돌의 개수는 132 (개)

이다.

(ii) 198 이 적힌 검은색 바둑돌의 개수

제n 행의 검은색의 바둑돌에 198 이 적혀있다고 하면

198 은 4 개 또는 6 개의 흰색의 바둑돌에 적힌 숫자의

합이다.

① 4 개의 흰색의 바둑돌에 적힌 숫자의 합이 198 일

경우

$n-1+n+2(n+1) = 198$, $4n = 197$

이를 만족하는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

② 6 개의 흰색의 바둑돌에 적힌 숫자의 합이 198 일

경우

$2(n-1)+2n+2(n+1) = 198$, $6n = 198$

$\therefore n = 33$

그런데 $33 = 3\times 11$이므로 제33 행에는 검은색의

바둑돌이 12 개 있다. 이때, 양 끝에 놓인 검은색의

바둑돌에 적힌 수는 4 개의 흰색의 바둑돌에 적힌

숫자의 합과 같으므로 이를 제외하면 198 이 적힌

검은색의 바둑돌의 개수는 10(개)이다.

(i), (ii)에서 198 이 적힌 바둑돌의 개수는

$132+10 = 142$ (개)

30. 통계 **정답 59**

확률변수 는 3, 4, 5 의 값을 취할 수 있다.

(i) $X = 3$일 때

빨간 공을 3 개 꺼내는 경우 : $\frac{{}_5C_3\times{}_5C_2}{{}_{10}C_5} = \frac{25}{63}$

파란 공을 3 개 꺼내는 경우 : $\frac{{}_5C_2\times{}_5C_3}{{}_{10}C_5} = \frac{25}{63}$

$\therefore P(X=3) = \frac{25}{63} + \frac{25}{63} = \frac{50}{63}$

(ii) $X = 4$일 때

빨간 공을 4 개 꺼내는 경우 : $\frac{{}_5C_4\times{}_5C_1}{{}_{10}C_5} = \frac{25}{252}$

파란 공을 4 개 꺼내는 경우 : $\frac{{}_5C_1\times{}_5C_4}{{}_{10}C_5} = \frac{25}{252}$

$\therefore P(X=4) = \frac{25}{252} + \frac{25}{252} = \frac{25}{126}$

(iii) $X = 5$일 때

빨간 공을 5 개 꺼내는 경우 : $\frac{{}_5C_5\times{}_5C_0}{{}_{10}C_5} = \frac{1}{252}$

파란 공을 5 개 꺼내는 경우 : $\frac{{}_5C_0\times{}_5C_5}{{}_{10}C_5} = \frac{1}{252}$

$\therefore P(X=5) = \frac{1}{252} + \frac{1}{252} = \frac{1}{126}$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 의 확률분포표는 다음과

같다.

X	3	4	5	계
$P(X=x)$	$\frac{50}{63}$	$\frac{25}{126}$	$\frac{1}{126}$	1

이때, 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 는

$$E(X) = 3\times\frac{50}{63} + 4\times\frac{25}{126} + 5\times\frac{1}{126} = \frac{45}{14}$$

따라서 확률변수 $Y = 14X+14$의 평균 $E(Y)$ 는

$$E(Y) = E(14X+14)$$
$$= 14E(X)+14$$
$$= 14\times\frac{45}{14} + 14$$
$$= 59$$