2011학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시

수리 영역

이 과

성명		수험번호							

○ 먼저 문제지에 성명과 수험 번호를 기입하시오.

○ 답안지에 성명과 수험 번호를 정확하게 표기하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 이 포함된 경우에는 0 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 수열 a }에 대하여 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{}} \dfrac{a_n}{n} - 3\Big) = 7$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n + 3n - 1}{a_n - 1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2. 두 사건 , B에 대하여

$$\mathrm{P}(A) = 0.4,\ \mathrm{P}(B) = 0.5,\ \mathrm{P}(A \cup B) = 0.8$$

일 때, $\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}} | B) + \mathrm{P}(A | B^{\mathrm{C}})$의 값은? [2점]

① 1.1 ② 1.2 ③ 1.3 ④ 1.4 ⑤ 1.5

3. 두 벡터 $a, \vec{b}$가 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{a}+\vec{b}|=7$을 만족시킬 때, $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$의 값은? [2점]

① -1 ② -3 ③ -5

④ -7 ⑤ -9

4. $10^{.76}$의 정수부분은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$로 계산한다.) [3점]

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

5. 무리방정식

$$1-x\ +2\sqrt{x}\ =1+\sqrt{3}$$

의 두 실근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{4}$

6. 부등식 $\frac{1}{2\ \ -1}+\frac{1}{4^x+2^x+1}\leqq\frac{8}{8^x-1}$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 0　② 1　③ 2

④ 3　⑤ 4

7. 좌표평면에서 직선 $\quad =mx+8$이 곡선 $y=x \quad +2x^2-3x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

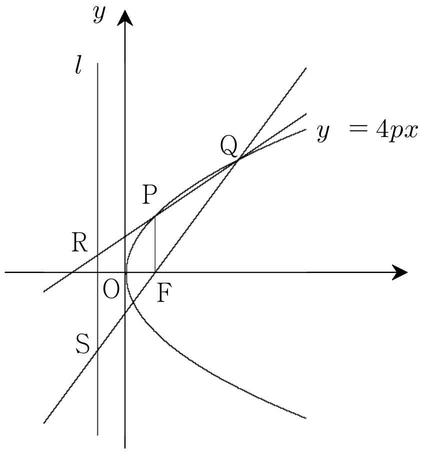
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

8. 함수 $f(x)=\frac{x^3}{9}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\ {}_{k=1}^{\ \ n}\ g\ \ \frac{3k}{n}\Big)\frac{1}{n}$의 값은? [3점]

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{21}{4}$

④ $\frac{27}{4}$ ⑤ $\frac{33}{4}$

9. 좌표평면에서 포물선 $\quad =4px$ $(p>0)$의 초점을 F, 준선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선과 포물선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 또, 제1사분면에 있는 포물선 위의 점 Q에 대하여 두 직선 QP, QF가 준선 l과 만나는 점을 각각 R, S라 하자. PF : QF $=2:5$일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{QF}}}{\mathrm{FS}}$ 의 값은? [3점]



① $\dfrac{5}{3}$　② $\dfrac{3}{2}$　③ $\dfrac{4}{3}$　④ $\dfrac{5}{4}$　⑤ $\dfrac{6}{5}$

10. 두 사격선수 A, B가 한 번의 사격에서 10점을 얻을 확률은 각각 $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{2}{3}$라고 한다. 두 선수가 임의로 순서를 정하여 각각 한 번씩 사격하였더니 먼저 사격한 선수만 10점을 얻었다고 한다. 이때, 먼저 사격한 선수가 A이었을 확률은? [3점]

① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{9}{17}$　③ $\dfrac{3}{5}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{9}{13}$

11. 세 곡선 $\;=\;\; x+2$, $y=\sqrt{}-x+2$, $y=\sqrt{}2x-4$ 로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는? [3점]

① 10π　② 12π　③ 14π
④ 16π　⑤ 18π

12. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(\alpha,0)$, $\mathrm{B}(\beta,0)$, $\mathrm{C}(\gamma,0)$ $(\alpha<\beta<\gamma)$에서 만난다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. 방정식 $f(x)=k$ (k는 실수)가 서로 다른 세 실근을 가지면 함수 $f(x)$의 극댓값은 k이다.
ㄴ. $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 갖기 위한 필요충분조건은 $f(\alpha)<0$, $f(\gamma)<0$이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

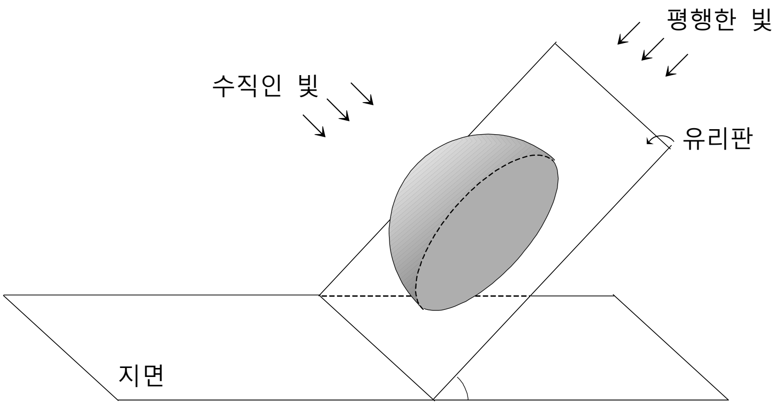
13. 어떤 기계 장치는 작동하기 시작한 순간부터 시간이 지남에 따라 그 정확도가 점점 떨어진다고 한다. 이 기계가 작동하기 시작하여 시간이 되는 순간의 정확도를 (%)라 하면 관계식

$I = a\log(t+7) + b$ (a, b는 상수, $0 \leq t \leq 200$)

가 성립한다고 한다. 처음 이 기계가 작동하기 시작한 순간의 정확도는 100이며, 작동하기 시작하여 28시간이 되는 순간의 정확도는 79라고 한다. 이 기계가 작동하기 시작하여 63시간이 되는 순간의 정확도는? (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [3점]

① 55　② 60　③ 65　④ 70　⑤ 75

14. 그림과 같이 지면과 이루는 각의 크기가 θ인 평평한 유리판 위에 반구가 엎어져있다. 햇빛이 유리판에 수직인 방향으로 비출 때 지면 위에 생기는 반구의 그림자의 넓이를 S, 햇빛이 유리판과 평행한 방향으로 비출 때 지면 위에 생기는 반구의 그림자의 넓이를 S_2라 하자.
$S_1 : S_2 = 3 : 2$일 때, $\tan\theta$의 값은? (단, θ는 예각이다.) [4점]



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{4}$

15. 다음은 이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1\cdot 2}{n+1}+\frac{2\cdot 3}{n+2}+\frac{3\cdot 4}{n+3}+\cdots+\frac{n(n+1)}{n+n}<\frac{n+1)}{4}\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

부등식 $(*)$의 좌변을 $_n$이라 하자

(i) $n=2$일 때, (좌변) $=S_2=\boxed{\text{(가)}}$, (우변)$=\frac{9}{4}$ 이므로 $(*)$은 성립한다.

(ii) $n=m$ $(m=2, 3, 4, \cdots)$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하자.

$$S_m=\frac{1\cdot 2}{m+1}+\frac{2\cdot 3}{m+2}+\frac{3\cdot 4}{m+3}+\cdots+\frac{m(m+1)}{m+m}$$이고,

$$S_{m+1}=\frac{1\cdot 2}{(m+1)+1}+\frac{2\cdot 3}{(m+1)+2}+\cdots+\frac{(m+1)(m+2)}{(m+1)+m+1}$$이므로

$$S_{m+1}-S_m=-2\ \frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+2}+\frac{3}{m+3}+\cdots+\frac{m}{2m}\Big)+\boxed{\text{(나)}}+\frac{m+2}{2}$$

한편, $\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+2}+\cdots+\frac{m}{2m}>\frac{1}{m+m}+\frac{2}{m+m}+\cdots+\frac{m}{2m}=\boxed{\text{(다)}}$ 이고

$\boxed{\text{(나)}}<\frac{2m+1}{4}$ 이므로 $S_{m+1}-S_m<\frac{2m+3}{4}$ 이다.

따라서 $S_{m+1}<S_m+\frac{2m+3}{4}<\frac{(m+2)^2}{4}$이므로 $(*)$은 $n=m+1$일 때도 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

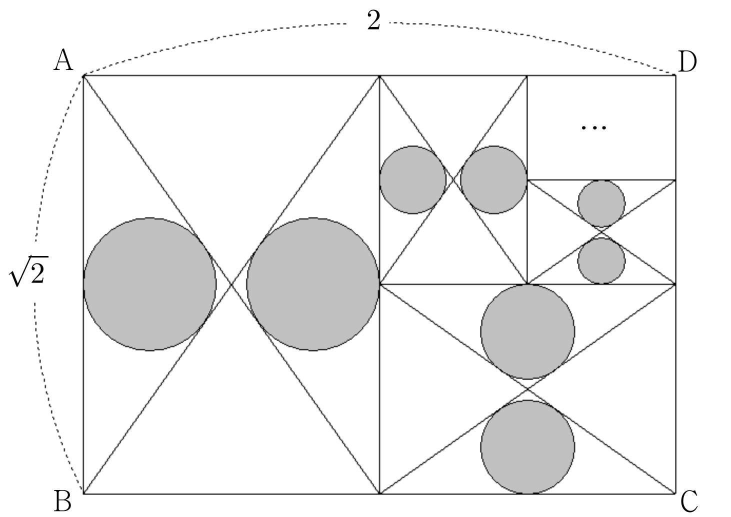
위의 증명에서 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $af(3)g(3)$의 값은? [3점]

① $\frac{13}{7}$ ② $\frac{20}{7}$ ③ $\frac{26}{7}$

④ $\frac{33}{7}$ ⑤ $\frac{39}{7}$

16. 그림과 같이 AB 2, AD $=2$인 직사각형 ABCD 에서 다음 [단계]와 같은 순서로 도형을 만들어 나간다.

> [단계 1] 직사각형 ABCD 의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 이라 하자.
>
> [단계 2] [단계 1]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_2라 하자.
>
> [단계 3] [단계 2]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_3이라 하자.
>
> ⋮



이와 같은 과정을 계속하여 [단계 n]에서 그려진 두 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, ${}_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

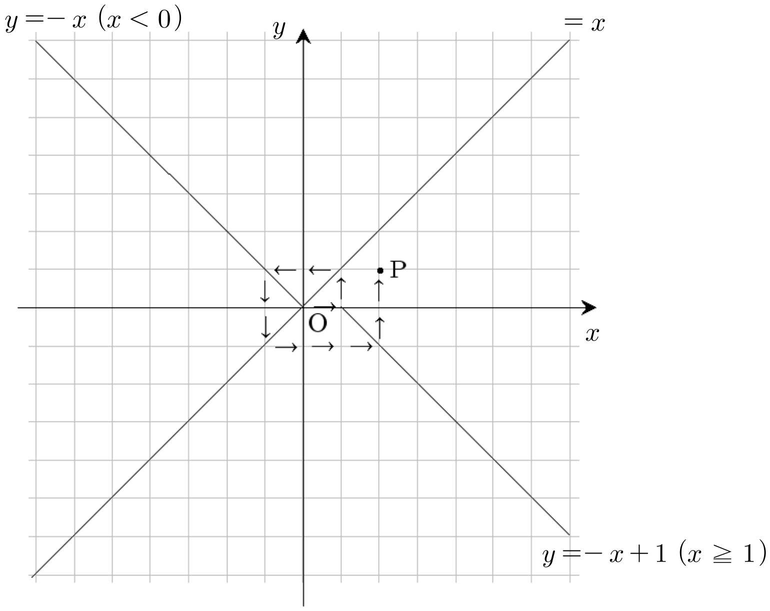
① $2\pi(5-2\sqrt{6})$ ② $2\pi(3-\sqrt{6})$ ③ $2\pi(5-\sqrt{6})$

④ $4\pi(3-\sqrt{6})$ ⑤ $4\pi(5-\sqrt{6})$

17. 좌표평면 위를 움직이는 점 P는 다음과 같은 규칙으로 축 또는 y축과 평행한 방향으로 이동한다.

> (가) 1회 이동거리는 1이고, 처음에는 원점을 출발하여 점 $(1, 0)$으로 이동한다.
> (나) 점 P가 반직선 $y=-x+1\ (x \geqq 1)$ 위의 점에 도착하면 y축의 양의 방향으로 이동하고, 반직선 $y=x\ (x>0)$ 위의 점에 도착하면 x축의 음의 방향으로 이동한다.
> (다) 점 P가 반직선 $y=-x\ (x<0)$ 위의 점에 도착하면 y축의 음의 방향으로 이동하고, 반직선 $y=x\ (x<0)$ 위의 점에 도착하면 x축의 양의 방향으로 이동한다.

예를 들어, 그림과 같이 점 P가 원점을 출발하여 11회 이동하면 점 $(2, 1)$에 도착한다.



점 P가 원점을 출발하여 k회 이동하면 점 $(0, 10)$에 도착한다. k의 값은? (단, 각각의 반직선에 도착하기 전에는 진행방향을 바꾸지 않는다.) [4점]

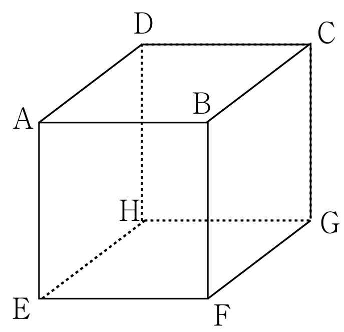
① 350　② 360　③ 370　④ 380　⑤ 390

18. 좌표공간에 개의 점 A$(0, 0, 4-t)$, B$(t, 0, 0)$, C$(0, t, 0)$, D$(-t, 0, 0)$, E$(0, -t, 0)$을 꼭짓점으로 하는 사각뿔 A－BCDE가 있다. $0<t<4$일 때, 이 사각뿔의 부피가 최대가 되도록 하는 실수 t의 값은? [4점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2

④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

19. 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 ABCD－EFGH를 다음 두 조건을 만족시키도록 좌표공간에 놓는다.



(가) 꼭짓점 A는 원점에 놓이도록 한다.
(나) 꼭짓점 G는 y축 위에 놓이도록 한다.

위의 조건을 만족시키는 상태에서 이 정육면체를 y축의 둘레로 회전시킬 때, 점 B가 그리는 도형은 점 $(0, a, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이다. 이때, a, r의 곱 ar의 값은? (단, 점 G의 y좌표는 양수이다.) [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

20. 두 함수 $\ \ (x)=[x]$, $g(x)=\sin\pi x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

<보기>

ㄱ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $(f\circ g)(x)$는 모든 정수에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 이차정사각행렬을 원소로 갖는 집합 을 다음과 같이 정의하자.

$M \quad A \mid A \quad = A\}$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보기>

ㄱ. $X^2 \quad M$이면 $X \in M$이다.

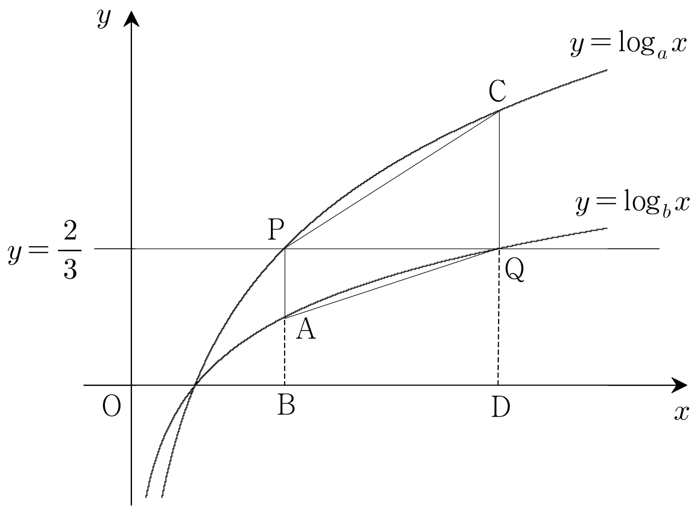
ㄴ. $X \in M$이면 $E - X \in M$이다.

ㄷ. $X \in M$, $Y \in M$이고 $XY = -YX$이면 모든 자연수 m, n에 대하여 $X^m + Y^n \in M$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

22. 그림과 같이 직선 $\ \ =\frac{2}{3}$가 두 곡선 $y=\log\ x$, $y=\log_b x$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 x축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자.

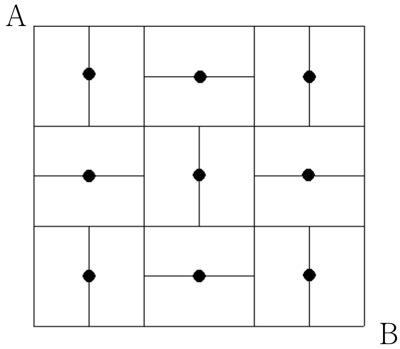


$\mathrm{PA}=\overline{\mathrm{AB}}$이고, 사각형 PAQC의 넓이가 1일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $1<a<b$이다.) [4점]

① $12\ \ 2$　② $14\sqrt{2}$　③ $16\sqrt{2}$

④ $18\sqrt{2}$　⑤ $20\sqrt{2}$

23. 그림과 같이 직사각형 모양으로 이루어진 도로망이 있고, 이 도로망의 9개의 지점에 ●이 표시되어 있다.



A지점에서 B지점까지 가는 최단경로 중에서 ●이 표시된 9개의 지점 중 오직 한 지점만을 지나는 경로의 수는? [4점]

① 30　② 32　③ 34　④ 36　⑤ 38

24. 어느 선박 부품 공장에서 만드는 부품의 길이 X는 평균이 100, 표준편차가 0.6인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 만든 부품 중에서 9개를 임의추출한 표본의 길이의 평균을 X 라 할 때, 표본평균 $\overline{X}$ 와 모평균의 차가 일정한 값 c 이상이면 부품의 제조과정에 대한 전면적인 조사를 하기로 하였다. 부품의 제조 과정에 대한 전면적인 조사를 하게 될 확률이 5% 이하가 되도록 상수 c의 값을 정할 때, c의 최솟값은? (단, 단위는 mm이고, 오른쪽 표준정규분포표를 이용한다.) [4점]

	$\mathrm{P}(0 \leq \quad \leq z)$
1.65	0.450
1.96	0.475
2.58	0.495

① 0.196　② 0.258　③ 0.330　④ 0.392　⑤ 0.475

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. , y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} -b & a-5 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ -2y \end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 실수 a, b에 대하여 좌표평면에서 점 (a, b)가 나타내는 도형의 넓이는 이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [3점]

26. 다항식 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

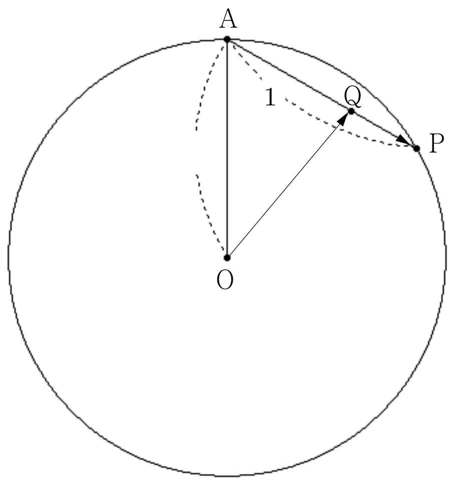
(가) $\lim_{\to\infty} \frac{f(x)}{x^2+2x+3} = \frac{11}{3}$
(나) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = -11$

$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{x-3}$의 값을 구하시오. [3점]

27. 좌표평면에서 타원 $\frac{x}{5}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\ 3,\frac{16}{5}\Big)$에서의 접선을 l이라 하자. 타원의 두 초점 F, F'과 직선 l 사이의 거리를 각각 d, d'이라 할 때, dd'의 값을 구하시오. [3점]

28. 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구 위에 고정된 점 A가 있고, $\mathrm{AP}=1$을 만족시키면서 이 구 위를 움직이는 점 P가 있다. 이때, 선분 AP 위의 점 Q가 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\bullet\vec{\mathrm{OQ}}\geq 0$을 만족시킬 때, 점 Q가 존재하는 영역의 넓이는 $\frac{q}{p}\ 3\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

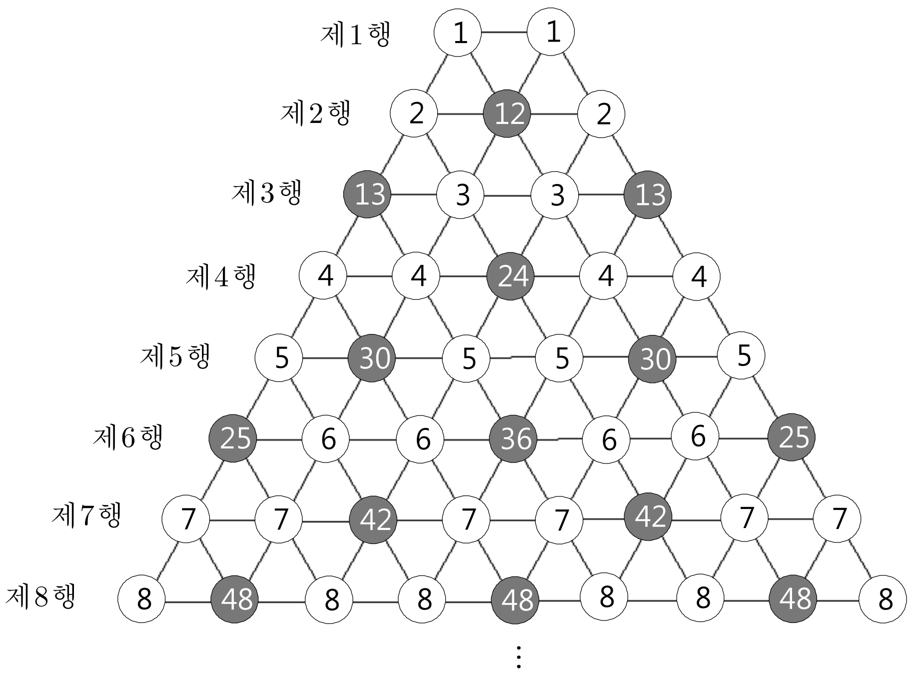
[4점]



29. 그림과 같이 정삼각형을 붙여서 만든 도형 위에 흰색과 검은색의 바둑돌을 정삼각형의 각 꼭짓점 위에 나열하는데, 제 행에는 $(n+1)$개의 돌을 다음과 같은 규칙으로 나열한다. $(n=1, 2, 3, \cdots)$

> (가) 제 1행에는 모두 흰색의 바둑돌을 나열한다.
> (나) 제 $(3n-1)$행에는 맨 왼쪽부터 흰색, 검은색, 흰색의 바둑돌 3개를 n회 반복하여 나열한다.
> (다) 제 $3n$행에는 맨 왼쪽에 검은색의 바둑돌을 1개 놓은 다음 그 오른쪽으로 흰색, 흰색, 검은색의 바둑돌 3개를 n회 반복하여 나열한다.
> (라) 제 $(3n+1)$행에는 맨 왼쪽에 흰색의 바둑돌을 2개 나열한 다음 그 오른쪽으로 검은색, 흰색, 흰색의 바둑돌 3개를 n회 반복하여 나열한다.

위의 규칙대로 바둑돌을 나열한 다음 제 n행에 놓인 흰색의 바둑돌에는 n을 적고, 각 행에 놓인 검은색의 바둑돌에는 그 돌과 가장 가까운 4개 또는 6개의 흰색의 바둑돌에 적힌 숫자의 합을 적는다. 이때, 198이 적힌 바둑돌의 개수를 구하시오. [4점]



30. 주머니 속에 빨간 공 개, 파란 공 5개가 들어있다. 이 주머니에서 5개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중에서 더 많은 색의 공의 개수를 확률변수 라 하자. 예를 들어 꺼낸 공이 빨간 공 2개, 파란 공 3개이면 $X=3$이다. $Y=14X+14$라 할 때 확률변수 Y의 평균을 구하시오. [4점]