수리 영역(이과)

1. ②	2. ④	3. ⑤	4. ①	5. ④
6. ②	7. ③	8. ①	9. ②	10. ③
11. ②	12. ③	13. ④	14. ⑤	15. ③
16. ①	17. ⑤	18. ④	19. ④	20. ③
21. ⑤	22. ③	23. ①	24. ④	25. 16
26. 11	27. 16	28. 11	29. 142	30. 59

1. 수열의 극한 정답 ②

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=7$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$

주어진 식의 분모, 분자를 각각 n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3n-1}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a_n}{n}+3-\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n}-\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{2\cdot 3+3}{3}=3$$

2. 확률 정답 ④

$\mathrm{P}(\ \ \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=0.4+0.5-0.8=0.1$

$$\mathrm{P}(A\ \ |B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

$$=\frac{0.5-0.1}{0.5}=0.8$$

$$\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)}{1-\mathrm{P}(B)}$$

$$=\frac{0.4-0.1}{1-0.5}=0.6$$

$\therefore \mathrm{P}(A^C|B)+\mathrm{P}(A|B^C)=0.8+0.6=1.4$

3. 벡터 정답 ⑤

$(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2$

$=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2$ ……

이때, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{a}+\vec{b}|=7$이므로

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+5^2$

$=7^2=49$

$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}=15$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

(주어진 식) $=4\cdot 3^2+2\cdot 15-3\cdot 5^2$

$=-9$

4. 지수함수와 로그함수 정답 ①

$10^{0.76}$에 상용로그를 취하면 $\log 10^{0.76}=0.76$

그런데 $\log 5=1-\log 2=0.6990$,

$\log 6=\log 2+\log 3=0.7781$이므로

$\log 5<\log 10^{0.76}<\log 6$

$\therefore 5<10^{0.76}<6$

따라서 $10^{0.76}$의 정수부분은 5이다.

5. 방정식과 부등식 정답 ④

주어진 무리방정식의 양변을 제곱하여 정리하면

$4\ \ x(1-x)\ =\ \sqrt{3}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$16x^2-16x+3=0$, $(4x-1)(4x-3)=0$

$\therefore x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{3}{4}$ 또는 $\alpha=\frac{3}{4}$, $\beta=\frac{1}{4}$이므로

$|\alpha-\beta|=\ \frac{1}{4}-\frac{3}{4}\Big|=\frac{1}{2}$

6. 방정식과 부등식 정답 ②

$\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{4^x+2^x+1}\le\frac{8}{8^x-1}$에서

$\frac{(4^x+2^x+1)+(2^x-1)}{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}-\frac{8}{8^x-1}\le 0$

$\frac{4^x+2\cdot 2^x-8}{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}\le 0$

$\frac{(2^x+4)(2^x-2)}{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}\le 0$

그런데 $2^x+4>0$, $4^x+2^x+1>0$이므로

$\frac{2^x-2}{2^x-1}\le 0 \Leftrightarrow (2^x-2)(2^x-1)\le 0$, $2^x\ne 1$

따라서 $1<2^x\le 2$에서 $0<x\le 1$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $x=1$의 1개뿐이다.

7. 미분법 정답 ③

$f(x)=x^3+2x^2-3x$, $g(x)=mx+8$이라 하자.

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$와 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=g(x)$가 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 접선이어야 한다.

이때, 접점의 x좌표를 a라 하면

$f(a)=g(a)$, $f'(a)=m$

이 성립하므로

(i) $f(a)=g(a)$에서

$a^3+2a^2-3a=ma+8$ …… ㉠

(ii) $f'(a)=m$에서

$3a^2+4a-3=m$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^3+2a^2-3a=(3a^2+4a-3)\cdot a+8$

$a^3+a^2+4=0$, $(a+2)(a^2-a+2)=0$

$\therefore a=-2$

이를 다시 ㉡에 대입하면

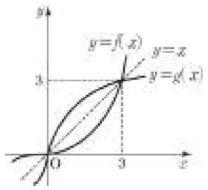
$m=3\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)-3=1$

8. 적분법 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\ {}_{k=1}^{n}\ g\left(\frac{3k}{n}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\ {}_{0}^{3}\ g(x)dx$$

그런데 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $\quad ^{3}\ (x)\,dx = 9-\int_0^3 f(x)\,dx$ 이므로

$$\frac{1}{3}\int_0^3 g(x)\,dx = \frac{1}{3}\ \ 9-\int_0^3 \frac{x^3}{9}\,dx\bigg)$$

$$=\frac{1}{3}\ \ 9-\left[\frac{x^4}{36}\right]_0^3\bigg)$$

$$=\frac{1}{3}\ \ 9-\frac{9}{4}\bigg)=\frac{9}{4}$$

9. 이차곡선 정답 ②

포물선 $y^2=4px$의 초점 F 의 좌표를 $(p,\,0)$이라 하면

준선 l의 방정식은 $x=-p$이므로 점 P 의 좌표는

$y^2=4p\cdot p=4p^2,\ y=\pm 2p$

$\therefore\ \mathrm{P}(p,\,2p)$

따라서 PF $=2p$이고, $\overline{\mathrm{PF}}:\mathrm{QF}=2:5$이므로

$\overline{\mathrm{QF}}=5p$

점 Q 에서 준선 l에 내린 수선의 발을 Q$'$이라 하면

포물선의 정의에 의해

$\mathrm{QQ}'=\overline{\mathrm{QF}}=5p$

$\therefore\ \mathrm{Q}(4p,\,4p)$

점 P 에서 직선 QQ$'$에 내린 수선의 발을 H 라 하면

두 삼각형 Q$'$SQ 과 HFQ 가 닮음이고,

$\overline{\mathrm{QQ}'}:\ \mathrm{QH}=5p:3p=5:3$이므로 $\overline{\mathrm{FS}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{QS}}:\overline{\mathrm{QF}}=(x+5p):5p=5:3$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FS}}=\frac{10}{3}p$

$\therefore\ \frac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{FS}}}=\frac{5p}{\frac{10}{3}p}=\frac{3}{2}$

10. 확률 정답 ③

두 사격선수 A, B 가 한 번의 사격에서 10 점을 얻는

사건을 각각 , B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

두 선수가 각각 한 번씩 사격하였을 때, 먼저 사격한 선수만

10 점을 얻는 사건을 E라 하면

(ⅰ) A 가 먼저 사격했을 경우

$\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

(ⅱ) B 가 먼저 사격했을 경우

$\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{3}{5}$$

11. 적분법 정답 ②

두 곡선 $y=\quad x+2$, $y=\sqrt{2x-4}$ 의 교점의 좌표를

구하면

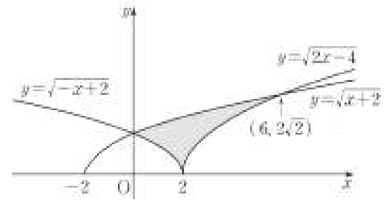
$\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-4},\ x+2=2x-4$

$\therefore\ x=6$

따라서 두 곡선 $y=\sqrt{x+2}$, $y=\sqrt{2x-4}$ 의 교점의

좌표는 $(6,\,2\sqrt{2}\,)$이므로 주어진 세 곡선을 좌표평면 위에

나타내면 다음과 같다.



위의 그림에서 구하는 회전체의 부피는

$$\pi\int_0^6(\sqrt{x+2}\,)^2dx-\pi\int_0^2(\sqrt{-x+2}\,)^2dx$$

$$-\pi\int_2^6(\sqrt{2x-4}\,)^2dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^6-\pi\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2$$

$$-\pi\ \ x^2-4x\Big]_2^6$$

$=30\pi-2\pi-16\pi=12\pi$

12. 미분법 정답 ①

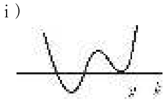
함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서

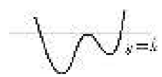
만나므로 사차함수 $y=f(x)$는 극값을 3개 가진다.

ㄱ. (거짓) 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을

가지면 그래프가 다음과 같다.

(ⅰ) (ⅱ)

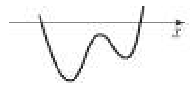




(ⅰ)에서 함수 $f(x)$의 극댓값은 k가 아니다.

ㄴ. (참) $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이면 사차함수 $y=f(x)$의

그래프는 다음과 같다.



그러므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을

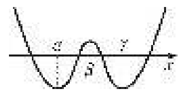
가진다.

ㄷ. (거짓) 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지

려면 다음 그림과 같이

$f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0,\ f(\gamma)<0$

이어야 한다.



따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

13. 지수함수와 로그함수 정답 ④

이 기계가 작동하기 시작한 순간의 정확도가 100 이므로

$100=a\log 7+b\quad\cdots\cdots$

이 기계가 작동하기 시작하여 28 시간이 되는 순간의

정확도가 79 이므로

$79=a\log 35+b\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$21=a(\log 7-\log 35)=a\log\frac{1}{5}$

$a\log 5=a(1-\log 2)=a(1-0.3)=-21$

$0.7a=-21$

$\therefore\ a=-30,\ b=100+30\log 7$

따라서 이 기계가 작동하기 시작하여 63 시간이 되는

순간의 정확도 I는

$a\log(63+7)+b$

$= -30\log 70+100+30\log 7$

$=30(\log 7-\log 70)+100$

$= -30+100$

$=70$

14. 공간도형과 공간좌표 정답 ⑤

반구의 밑면의 넓이를 S라 하면

$S\ \cos\theta = S$

$S_2\cos\ \frac{\pi}{2}-\theta\Big) = \frac{1}{2}S,\ 2S_2\sin\theta = S$

두 식을 연립하면

$S_1\cos\theta = 2S_2\sin\theta \quad \cdots\cdots$

그런데 $S_1 : S_2 = 3 : 2$이므로

$3S_2 = 2S_1,\ S_2 = \frac{2}{3}S_1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면

$\cos\theta = \frac{4}{3}\sin\theta$

$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

15. 수열 정답 ③

(ⅰ) $n=2$ 일 때,

(좌변) $= S_2 = \frac{1\cdot 2}{2+1}+\frac{2\cdot 3}{2+2} = \boxed{\frac{13}{6}}$

(우변) $= \frac{(2+1)^2}{4} = \frac{9}{4}$

이때, $\frac{13}{6} < \frac{9}{4}$ 이므로 (*)은 성립한다.

(ⅱ) $n=m\ (m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$일 때 (*)이 성립한다고 가정하자.

$$S_m = \frac{1\cdot 2}{m+1}+\frac{2\cdot 3}{m+2}+\frac{3\cdot 4}{m+3}+\cdots+\frac{m(m+1)}{m+m}$$

이고,

$$S_{m+1} = \frac{1\cdot 2}{(m+1)+1}+\frac{2\cdot 3}{(m+1)+2}+\cdots+\frac{(m+1)(m+2)}{(m+1)+m+1}$$

이므로

$S_{m+1}-S_m$

$$= -\frac{2}{m+1}-\frac{4}{m+2}-\frac{6}{m+3}-\cdots-\frac{2m}{2m}+\frac{m(m+1)}{(m+1)+m}+\frac{(m+1)(m+2)}{(m+1)+m+1}$$

$$= -2\left(\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+2}+\frac{3}{m+3}+\cdots+\frac{m}{2m}\right)+\boxed{\frac{m(m+1)}{2m+1}}+\frac{m+2}{m}$$

한편,

$\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+2}+\cdots+\frac{m}{2m}$

$> \frac{1}{m+m}+\frac{2}{m+m}+\cdots+\frac{m}{2m}$

$= \frac{1}{2m}(1+2+\cdots+m)$

$= \frac{1}{2m}\cdot\frac{m(m+1)}{2} = \boxed{\frac{m+1}{4}}$

이고 $\frac{m(m+1)}{2m+1} < \frac{2m+1}{4}$ 이므로

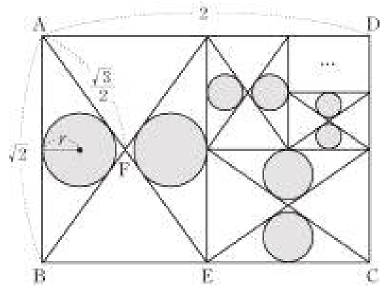
$S_{m+1}-S_m < \frac{2m+3}{4}$ 이다.

$\therefore a = \frac{13}{6},\ f(m) = \frac{m(m+1)}{2m+1},\ g(m) = \frac{m+1}{4}$

$\therefore af(3)g(3) = \frac{13}{6}\cdot\frac{12}{7}\cdot 1$

$= \frac{26}{7}$

16. 수열의 극한 정답 ①



위의 그림에서 $\mathrm{BE}=1$이므로 직각삼각형 ABE에서 $\mathrm{AE} = \ 3$ 이고, [단계 n]에서 그려진 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 삼각형 ABF 의 넓이는

$\frac{1}{2}\ \sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)r_1 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$

$\therefore r_1 = \frac{1}{\sqrt{6}+2} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$

$\therefore S_1 = 2\cdot\pi r_1^{\ 2}$

$= 2\cdot\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)^2$

$= \pi(5-2\sqrt{6})$

또, [단계 n]과 [단계 $(n+1)$]에서 그려진 직사각형들의 닮음비가 $\sqrt{2}$: 1이므로 [단계 n]과 [단계 $(n+1)$]에서 각각 그려진 원의 반지름의 길이 $r_n,\ r_{n+1}$ 사이의 닮음비도 $r_n : r_{n+1} = \sqrt{2}$: 1이고 $S_n : S_{n+1} = 2$: 1이다.

따라서 수열 $S_n\}$은 첫째항이 $\pi(5-2\sqrt{6})$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 무한등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi(5-2\sqrt{6})}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi(5-2\sqrt{6})$$

17. 수열 정답 ⑤

점 P 가 원점을 출발하여 점 $(0,\ n)$에 도착할 때까지의 이동 횟수를 a_n 이라 하면

$a_1 = 3$

$a_2 = 3+11 = 14$

$a_3 = 3+11+19 = 33$

$a_4 = 3+11+19+27 = 60$

⋮

이때, 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{b_n\}$: 11, 19, 27, ⋯

$b_n = 11+(n-1)\cdot 8 = 8n+3$

$$\therefore a_n = a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(8k+3)$$

$= 3+8\cdot\frac{n(n-1)}{2}+3(n-1)$

$= 4n^2-n$

따라서 점 $(0, 10)$에 도착할 때까지의 이동 횟수 k는

$k=a_0=4\cdot 10^2-10=390$

18. 미분법

정답 ④

사각뿔 A－BCDE의 높이는 $4-t$이고, 밑면 BCDE는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}\,t$인 정사각형이므로 이 사각뿔의 부피를 $V(t)$라 하면

$V(t)=\frac{1}{3}\times(\sqrt{2}\,t)^2\times(4-t)$

$\quad=-\frac{2}{3}(t^3-4t^2)$ (단, $0<t<4$)

$V'(t)=-2t^2+\frac{16}{3}t=-t\left(2t-\frac{16}{3}\right)=0$에서 함수 $V(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	4
$V'(t)$		+	0	−	
$V(t)$		↗	$\frac{512}{81}$ (극대)	↘	

따라서 $t=\frac{8}{3}$일 때, 함수 $V(t)$는 극대이면서 최대이므로 구하는 실수 t의 값은 $\frac{8}{3}$이다.

19. 공간도형과 공간좌표

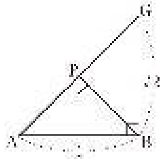
정답 ④

$\mathrm{AB}=1$, $\overline{\mathrm{BG}}=\sqrt{2}$이고,

$\mathrm{AG}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

이므로 삼각형 ABG는 선분 AG를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

점 B에서 선분 AG(y축)에 내린 수선의 발을 P라 하면 점 B가 그리는 도형은 점 P$(0, a, 0)$을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 $r=\mathrm{BP}$인 원이다.



삼각형 ABG에서

$\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore r=\overline{\mathrm{BP}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

또, 점 P의 y좌표는 선분 AP의 길이와 같으므로

$a=\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore ar=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

20. 함수의 극한과 연속

정답 ③

ㄱ. (참) $\lim_{x\to -0}f(x)g(x)=\lim_{x\to -0}[x]\times\lim_{x\to -0}\sin\pi x$

$=(-1)\times 0=0$

$\lim_{x\to +0}f(x)g(x)=\lim_{x\to +0}[x]\times\lim_{x\to +0}\sin\pi x$

$=0\times 0=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}f(x)g(x)=0$

또, $f(0)g(0)=0\times 0=0$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=f(0)g(0)=0$

그러므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. (거짓) 정수 a에 대하여 $x\to a$일 때, $g(x)\to 0$이므로

$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to a}f(g(x))=\lim_{t\to 0}f(t)$

그런데 $\lim_{t\to -0}f(t)=-1$이고, $\lim_{t\to +0}f(t)=0$이므로

$\lim_{t\to 0}f(t)$의 값은 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $(f\circ g)(x)$는 모든 정수에서 불연속이다.

ㄷ. (참) 함수 $f(x)$는 x가 정수일 때 불연속이므로 정수 a에 대하여 함수 $(g\circ f)(x)$의 연속성을 알아보면 된다.

$x\to a+0$일 때, $f(x)=a$이므로

$\lim_{x\to a+0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to a+0}g(f(x))$

$=g(a)=0$

$x\to a-0$일 때, $f(x)=a-1$이므로

$\lim_{x\to a-0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to a-0}g(f(x))$

$=g(a-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=0$

또, 모든 정수 a에 대하여

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(a)=0$

이므로 함수 $(g\circ f)(x)$는 연속이다.

그러므로 함수 $(g\circ f)(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. 행렬과 그래프

정답 ⑤

ㄱ. (거짓) 【반례】 $X=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$이라 하면

$X^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$

$X^4=X^2=O$이므로 $X^2\in M$이지만

$X^2\neq X$이므로 $X\notin M$이다.

ㄴ. (참) $X\in M$이므로 $X^2=X$

$(E-X)^2=E-2X+X^2$

$=E-2X+X$

$=E-X$

$\therefore E-X\in M$

ㄷ. (참) (ⅰ) $X\in M$이면 $X^2=X$

$X^3=X^2X=X^2=X$

$\vdots$

$X^m=X$ (단, m은 자연수)

(ⅱ) $Y\in M$이면 $Y^2=Y$

$Y^3=Y^2Y=Y^2=Y$

$\vdots$

$Y^n=Y$ (단, n은 자연수)

(ⅰ), (ⅱ)에서

$(X^m+Y^n)^2=(X+Y)^2$

$=X^2+XY+YX+Y^2$

$=X+(-YX)+YX+Y$

$=X+Y=X^m+Y^n$

$\therefore X^m+Y^n\in M$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

22. 지수함수와 로그함수

정답 ③

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이고, $\overline{\mathrm{PB}}=\frac{2}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{3}$

점 B 의 좌표를 $t, 0)$이라 하면

$\mathrm{PB} : \mathrm{AB} = \log\ t : \log_b t = 2 : 1$

$\therefore\ b = a^2$

따라서 $\overline{\mathrm{CD}} : \mathrm{QD} = 2 : 1$이므로

$\overline{\mathrm{CQ}} = \overline{\mathrm{QD}} = \frac{2}{3}$

이때, 사각형 PAQC 의 넓이가 1 이므로

$\mathrm{PAQC} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\Big) \times \overline{\mathrm{BD}} = 1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}} = 2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

그런데 $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{PQ}}$이고 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{2}{3}\right)$가 곡선 $y = \log_a x$ 위의 점이므로

$\frac{2}{3} = \log_a t \Leftrightarrow t = a^{\frac{2}{3}}$

점 C 의 좌표를 $\left(s,\ \frac{4}{3}\right)$라 하면 점 C 도 곡선 $y = \log_a x$ 위의 점이므로

$\frac{4}{3} = \log_a s \Leftrightarrow s = a^{\frac{4}{3}}$

㉠에서

$\overline{\mathrm{BD}} = s - t = a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 2$

$a^{\frac{2}{3}} = \quad (X > 0)$라 치환하면

$X^2 - X - 2 = 0$

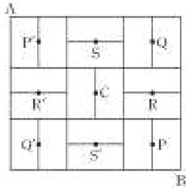
$(X-2)(X+1) = 0$

$\therefore\ X = a^{\frac{2}{3}} = 2,\ a = 2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ ab = a^3 = 2^{\frac{9}{2}}$

$= 16\quad 2$

23. 순열과 조합 정답 ①



(i) 점 P (또는 P′)를 지나는 경우

$\frac{4!}{2!2!} \times 1 = 6$(가지)

$\therefore\ 6 \times 2 = 12$(가지)

(ii) 점 Q (또는 Q′)를 지나는 경우

최단경로는 각각 1가지뿐이므로

$1 \times 2 = 2$(가지)

(iii) 점 R (또는 R′)를 지나는 경우

$\frac{3!}{2!1!} = 3$(가지)

$\therefore\ 3 \times 2 = 6$(가지)

(iv) 점 S (또는 S′)를 지나는 경우

$\frac{3!}{2!1!} = 3$(가지)

$\therefore\ 3 \times 2 = 6$(가지)

(v) 점 C 를 지나는 경우

$2 \times 2 = 4$(가지)

(i)~(v)에서 구하는 최단경로의 개수는

$12 + 2 + 6 + 6 + 4 = 30$(가지)

24. 통계 정답 ④

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 0.6^2)$을 따르므로

크기가 9 인 표본을 임의추출하였을 때의 표본평균 $\overline{X}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 0.2^2)$을 따른다.

이때, 모평균을 m 이라 하고, $|\overline{X} - m| \geq c$이면 부품의 제조과정에 대한 전면적인 조사를 하게 되므로 전면적인 조사를 하게 될 확률이 5 % 이하가 되게 하려면

$\mathrm{P}(|\overline{X} - m| \geq c) \leq 0.05 \quad \cdots\cdots$ ㉠

를 만족하여야 한다. $Z = \frac{\overline{X} - m}{0.2}$이라 하면

$\mathrm{P}(|\overline{X} - m| \geq c) = \mathrm{P}\left(\frac{|\overline{X} - m|}{0.2} \geq \frac{c}{0.2}\right)$

$= \mathrm{P}\left(|Z| \geq \frac{c}{0.2}\right)$

$= 1 - 2\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{c}{0.2}\right)$

이를 ㉠에 대입하면

$1 - 2\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{c}{0.2}\right) \leq 0.05$

$\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{c}{0.2}\right) \geq 0.475 = \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.96)$

$\frac{c}{0.2} \geq 1.96,\ c \geq 0.392$

따라서 상수 c 의 최솟값은 0.392 이다.

25. 행렬과 그래프 정답 16

$\begin{pmatrix} -b & a-5 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ -2y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b & a-5 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b-1 & a-8 \\ 2a & 2b+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이 연립일차방정식이 $x = 0$, $y = 0$ 이외의 해를 가지려면

$(-b-1)(2b+2) - (a-8) \cdot 2a = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

을 만족하여야 한다. ㉠을 정리하면

$(a-4)^2 + (b+1)^2 = 16$

따라서 좌표평면에서 점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형은 중심이 $(4,\ -1)$이고 반지름의 길이가 4 인 원이므로 넓이 S는

$S = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$

$\therefore\ \frac{S}{\pi} = \frac{16\pi}{\pi} = 16$

26. 함수의 극한과 연속 정답 11

조건 (가)에서

$f(x) = \frac{11}{3}x^2 + ax + b$ (단, $a,\ b$는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x \to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 0}\left(\frac{11}{3}x^2 + ax + b\right) = b = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, 조건 (나)에서

$\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{11}{3}x + a\right) = -11$

$\therefore\ a = -11 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x) = \frac{11}{3}x^2 - 11x = \frac{11}{3}x(x-3)$

$\therefore\ \lim_{x \to 3}\frac{f(x)}{x-3} = \frac{11}{3}\lim_{x \to 3}\frac{x(x-3)}{x-3}$

$= \frac{11}{3} \cdot 3 = 11$

27. 이차곡선 [정답 16]

타원 위의 점 P $\left(\quad , \frac{16}{5}\right)$에서의 접선 l의 방정식은

$$\frac{3}{25}x + \frac{\frac{16}{5}}{16}y = 1,\ \frac{3}{25}x + \frac{1}{5}y = 1$$

$\therefore\ 3x + 5y - 25 = 0$

타원의 두 초점의 좌표가 F$(3,\ 0)$, F$'(-3,\ 0)$이므로

$$d = \frac{|9-25|}{\quad 3 \quad + 5^2} = \frac{16}{\quad 34}$$

$$d' = \frac{|-9-25|}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{34}{\sqrt{34}} = \sqrt{34}$$

$$\therefore\ dd' = \frac{16}{\sqrt{34}} \cdot \sqrt{34} = 16$$

28. 벡터 [정답 11]

점 P 에서 선분 OA 에 그은 수선의 발을 H 라 하면

$\mathrm{HP} \ = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 점 P 가 그리는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 원이다.

이때, 선분 AP 위의 점 Q 에 대하여

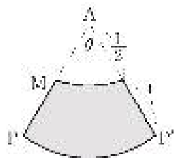
$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| \times \cos(\angle \mathrm{AQO}) \geq 0$

이므로 $\cos(\angle \mathrm{AQO}) \geq 0$

$\therefore\ 0 \leq \angle \mathrm{AQO} \leq \frac{\pi}{2}$

즉, 선분 AP 의 중점을 M 이라 하면 점 Q 는 선분 MP 위의 점이어야 한다. 따라서 점 Q 가 존재하는 영역은 그림과 같이 모선이 선분 MP 인 원뿔대의 옆면과 같다.

이때, 부채꼴 APP$'$의 중심각의 크기를 θ라 하면



$1 \times \theta = 2\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta = \sqrt{3}\,\pi$

따라서 점 Q 가 존재하는 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3}\,\pi - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}\,\pi$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt{3}\,\pi = \frac{q}{p}\sqrt{3}\,\pi$$

$\therefore\ p = 8,\ q = 3$

$\therefore\ p + q = 11$

29. 수열 [정답 142]

(ⅰ) 198 이 적힌 흰색 바둑돌의 개수

$198 = 3 \times 66$이므로

제198 행에 놓인 흰색의 바둑돌의 개수는

$2 \times 66 = 132$(개)

따라서 198 이 적힌 흰색의 바둑돌의 개수는 132 (개)이다.

(ⅱ) 198 이 적힌 검은색 바둑돌의 개수

제n 행의 검은색의 바둑돌에 198 이 적혀있다고 하면 198 은 4 개 또는 6 개의 흰색의 바둑돌에 적힌 숫자의 합이다.

① 4 개의 흰색의 바둑돌에 적힌 숫자의 합이 198 일 경우

$n - 1 + n + 2(n+1) = 198,\ 4n = 197$

이를 만족하는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

② 6 개의 흰색의 바둑돌에 적힌 숫자의 합이 198 일 경우

$2(n-1) + 2n + 2(n+1) = 198,\ 6n = 198$

$\therefore\ n = 33$

그런데 $33 = 3 \times 11$이므로 제33 행에는 검은색의 바둑돌이 12 개 있다. 이때, 양 끝에 놓인 검은색의 바둑돌에 적힌 수는 4 개의 흰색의 바둑돌에 적힌 숫자의 합과 같으므로 이를 제외하면 198 이 적힌 검은색의 바둑돌의 개수는 10 (개)이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 198 이 적힌 바둑돌의 개수는

$132 + 10 = 142$ (개)

30. 통계 [정답 59]

확률변수 　 는 3, 4, 5 의 값을 취할 수 있다.

(ⅰ) $X = 3$일 때

빨간 공을 3개 꺼내는 경우 : $\frac{{}_5\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{25}{63}$

파란 공을 3개 꺼내는 경우 : $\frac{{}_5\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{25}{63}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=3) = \frac{25}{63} + \frac{25}{63} = \frac{50}{63}$

(ⅱ) $X = 4$일 때

빨간 공을 4개 꺼내는 경우 : $\frac{{}_5\mathrm{C}_4 \times {}_5\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{25}{252}$

파란 공을 4개 꺼내는 경우 : $\frac{{}_5\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{25}{252}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=4) = \frac{25}{252} + \frac{25}{252} = \frac{25}{126}$

(ⅲ) $X = 5$일 때

빨간 공을 5개 꺼내는 경우 : $\frac{{}_5\mathrm{C}_5 \times {}_5\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{1}{252}$

파란 공을 5개 꺼내는 경우 : $\frac{{}_5\mathrm{C}_0 \times {}_5\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{1}{252}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=5) = \frac{1}{252} + \frac{1}{252} = \frac{1}{126}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 확률변수 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{50}{63}$	$\frac{25}{126}$	$\frac{1}{126}$	1

이때, 확률변수 X 의 평균 $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X) = 3 \times \frac{50}{63} + 4 \times \frac{25}{126} + 5 \times \frac{1}{126} = \frac{45}{14}$$

따라서 확률변수 $Y = 14X + 14$의 평균 $\mathrm{E}(Y)$는

$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(14X + 14) = 14\mathrm{E}(X) + 14$

$= 14 \times \frac{45}{14} + 14 = 59$