2010학년도 공군사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수리 영역

인 문

성명		수험번호							

○ 먼저 문제지에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
○ 답안지에 성명과 수험 번호를 정확하게 표기하시오.
○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 이 포함된 경우에는 0 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오. (각 물음의 끝에 표시된 배점을 참조하시오.)

1. $-16 + \sqrt[3]{250}\,)$ 의 값은? [2점]

① 48 ② 54 ③ 72
④ 96 ⑤ 108

2. A 그룹에 남자 2명과 여자 2명, B 그룹에도 남자 2명과 여자 2명이 있다. A 그룹과 B 그룹에서 각각 2명씩 뽑아 동시에 상대 그룹으로 이동시킬 때, A 그룹에 남자 1명과 여자 3명이 있을 확률은? [2점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{2}{9}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

3. 무한등비수열 $\quad r \; - r \Big)^{n} \Big\}$이 수렴하도록 하는 정수 r의 개수는? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

4. 2이상인 모든 자연수 n에 대하여 두 수열 $\quad {}_{n}\}$, $\{P_n\}$을

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$P_n = \frac{S_2}{S_2 - 1} \times \frac{S_3}{S_3 - 1} \times \frac{S_4}{S_4 - 1} \times \cdots \times \frac{S_n}{S_n - 1}$$

이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} P_n$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

5. 다음은 가 자연수일 때 $n \geqq r$인 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\overset{n}{\underset{=r}{}}\ {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

> [증명]
>
> (1) $n=r$일 때
>
> (좌변)$= {}_{r}\mathrm{C}_{r} = \boxed{\text{(가)}}$, (우변)$= {}_{r+1}\mathrm{C}_{r+1} = \boxed{\text{(가)}}$
>
> 이므로 주어진 등식이 성립한다.
>
> (2) $n=k$ $(k \geqq r)$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
>
> $\displaystyle\sum_{i=r}^{k} {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$ 이다.
>
> $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.
>
> $$\sum_{i=r}^{k+1} {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} + \boxed{\text{(나)}}$$
>
> $$= \boxed{\text{(다)}} + \frac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!} = \frac{(k+2)!}{(k+1-r)!\,(r+1)!}$$
>
> $$= {}_{k+2}\mathrm{C}_{r+1}$$
>
> 따라서 $n=k+1$일 때 주어진 등식이 성립한다.
>
> (1), (2)에 의하여 $n \geqq r$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	1	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$	$\frac{(k+1)!}{(k-r)!\,(r+1)!}$
②	1	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$	$\frac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$
③	1	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$	$\frac{(k+1)!}{(k-r)!\,(r+1)!}$
④	r	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$	$\frac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$
⑤	r	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$	$\frac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$

6. 수열 $\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ 이면 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{}} a_n$ 은 발산한다.

ㄴ. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1+\sqrt{k}}$ 이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. $|1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)| < \frac{1}{n}$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

7. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \log_2(n!)$$
$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $b_{15} = 4$

ㄴ. $9 < \sum_{k=1}^{5} b_k < 10$

ㄷ. n이 짝수일 때 b_n의 값은 무리수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 어느 보안 전문회사에서 바이러스 감염 여부를 진단하는 프로그램을 개발하였다. 그 진단 프로그램은 바이러스에 감염된 컴퓨터를 감염되었다고 진단할 확률이 4 %이고, 바이러스에 감염되지 않은 컴퓨터를 감염되지 않았다고 진단할 확률이 98 %이다. 실제로 바이러스에 감염된 컴퓨터 200 대와 바이러스에 감염되지 않은 컴퓨터 300 대에 대해 이 진단 프로그램으로 바이러스 감염 여부를 검사하려고 한다. 이 500 대의 컴퓨터 중 임의로 한 대를 택하여 이 진단 프로그램으로 감염 여부를 검사하였더니 바이러스에 감염되었다고 진단하였을 때, 이 컴퓨터가 실제로 감염된 컴퓨터일 확률은? [3점]

① $\frac{94}{97}$ ② $\frac{92}{97}$ ③ $\frac{90}{97}$

④ $\frac{47}{49}$ ⑤ $\frac{47}{50}$

9. 다음은 어느 보석 상점에서 판매하는 다이아몬드 가격표의 일부이다.

무게(캐럿)	가격(만원)
0.3	70
0.6	210

이 상점에서 판매하는 다이아몬드의 무게가 x캐럿일 때, 그 가격 $f(x)$만원은

$$f(x)=a(b\ \ -1)\ (\text{단, } a>0,\ b>1\text{인 상수})$$

로 주어진다고 한다. 이때, 이 상점에서 판매하는 무게가 1.5 캐럿인 다이아몬드의 가격은? [3점]

① 1875 만원 ② 1965 만원 ③ 1980 만원

④ 2170 만원 ⑤ 2250 만원

10. 009년 8월 초 판매 가격이 200만원인 노트북컴퓨터의 판매 가격은 매월 초 직전 달보다 1% 씩 계속 인하된다고 하자. 어느 은행에 2009년 8월 초부터 2010년 7월 초까지 매월 초마다 일정한 금액을 적립하여, 12개월 후인 2010년 8월 초에 원금과 이자를 모두 찾아 바로 노트북 컴퓨터를 구입하기로 하였다. 이 은행은 월이율이 1%이고 매월마다 복리로 계산한다고 할 때, 매월 초에 적립해야 할 최소금액은? (단, $0.99^{2}=0.89$, $1.01^{12}=1.13$으로 계산하고 천원 단위에서 반올림하며, 세금은 고려하지 않는다.) [3점]

① 11만원 ② 12만원 ③ 13만원
④ 14만원 ⑤ 15만원

11. 임의의 실수 x에 대하여

$$x=n+\alpha \ (n\text{은 정수, } 0 \leqq \alpha < 1)$$

일 때, n을 x의 정수부분, α를 x의 소수부분이라 하자.

$10<a<b<50$인 두 자연수 a, b에 대하여 $\log_2 a$의 소수부분과 $\log_2 b$의 소수부분이 같을 때 순서쌍 (a, b)의 개수는? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

12. 파장이 이고 강도가 인 광선이 어떤 용액을 통과하면 이 용액에 광선이 흡수되어 입사광의 강도가 감소된다. 광선이 농도가 c인 용액을 통과한 거리가 일 때의 광선의 강도를 I라 하면 I와 입사광의 강도 I_0 사이에는

$$= I \times 10^{-acd}, \quad a = \frac{4\pi k}{\lambda} \quad (\text{단, } k\text{는 소멸계수})$$

인 관계가 성립하고, 이 용액의 흡광도 A를

$$A = \log I_0 - \log I$$

로 정의한다.

파장이 λ_1인 광선이 농도가 0이 아닌 어떤 용액을 통과한 거리가 d_1일 때의 흡광도를 A_1, 파장이 $2\lambda_1$인 광선이 동일한 농도의 이 용액을 통과한 거리가 $4d_1$일 때의 흡광도를 A_2라 하자. 이때, 소멸계수 k가 일정하다고 할 때 $\frac{A_2}{A_1}$의 값은? (단, $\lambda_1 d_1 \neq 0$이다.) [3점]

① 8 ② 2 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

13. 세 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 모두 0이 아닌 실수이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $a^2 + bc = 1$이면 $A^{2009} = A$이다.

ㄴ. $A^3 - 2A = O$이면 A는 역행렬을 갖는다.

ㄷ. $A^3 - 4A^2 + 4E = O$를 만족시키는 a, b, c가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 컴퓨터의 화면 보호기에 A, B, C, D 네 개의 사진이 매초마다 다른 사진으로 바뀌면서 임의로 하나씩 나타나도록 하였다. 한 사진에서 다른 사진으로 바뀔 확률은 모두 같다고 하고, 자연수 에 대하여 A 사진이 나온 다음 n초가 지난 후에 B 사진이 나올 확률을 p 이라 하자.

다음은 $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{4}$ 임을 증명하는 과정이다.

> [증명]
>
> A 사진이 나온 다음 n초가 지난 후에 B, C, D 사진이 나올 확률이 같으므로
> A 사진이 나온 다음 n초가 지난 후에 다시 A 사진이 나올 확률은
>
> $\boxed{\text{(가)}}$
>
> 이다.
>
> 따라서 A 사진이 나온 다음 $n+1$초가 지난 후에 B 사진이 나올 확률 p_{n+1} 은
>
> $$p_{n+1} = \frac{1}{3}\ 2p_n + \boxed{\text{(가)}}\ )$$
>
> $$= \boxed{\text{(나)}} + \frac{1}{3}$$
>
> 따라서 수열 $p_n - \frac{1}{4}\}$은 첫째항이 $\boxed{\text{(다)}}$ 이고 공비가 $-\frac{1}{3}$ 인 등비수열을 이룬다.
>
> $$\therefore \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{4}$$

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$1-3p_n$	$-\frac{1}{3}p_n$	$\frac{1}{6}$
②	$1-\frac{3}{4}p_n$	$-\frac{1}{3}p_n$	$\frac{1}{6}$
③	$1-3p_n$	$\frac{1}{3}p_n$	$\frac{1}{6}$
④	$1-\frac{3}{4}p_n$	$\frac{1}{3}p_n$	$\frac{1}{12}$
⑤	$1-3p_n$	$-\frac{1}{3}p_n$	$\frac{1}{12}$

15. , y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$에서 행렬 , B를 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}$라 하자.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c, d, p, q는 모두 0이 아닌 상수) [3점]

<보 기>

ㄱ. A의 역행렬이 존재하면 연립방정식은 오직 한 쌍의 해를 갖는다.

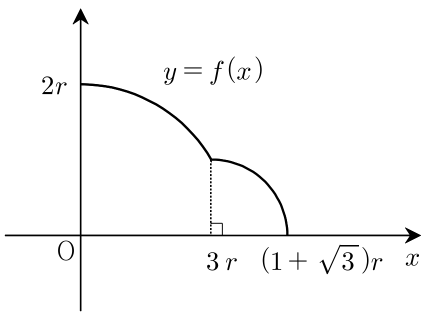
ㄴ. A, B의 역행렬이 모두 존재하지 않으면 연립방정식의 해는 무수히 많다.

ㄷ. A의 역행렬이 존재할 때, 실수 k , k_2에 대하여

$k_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이면 $k_1=k_2=0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. r가 양의 상수일 때 $0 \leqq x \leqq (1+\ \ 3)r$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 중심의 좌표가 $(0, 0)$이고 반지름의 길이가 $2r$인 원의 일부, 중심의 좌표가 $(\sqrt{3}r, 0)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 일부일 때, 확률 $\mathrm{P}(0 \leqq X \leqq r)$의 값은? [4점]



① $\dfrac{\pi+6\sqrt{3}}{11\pi+6\sqrt{3}}$ ② $\dfrac{2\pi+6\sqrt{3}}{11\pi+6\sqrt{3}}$ ③ $\dfrac{3\pi+6\sqrt{3}}{11\pi+6\sqrt{3}}$
④ $\dfrac{4\pi+6\sqrt{3}}{11\pi+6\sqrt{3}}$ ⑤ $\dfrac{5\pi+6\sqrt{3}}{11\pi+6\sqrt{3}}$

17. 등식 $A+3E$를 만족시키고 $A \neq kE$인 이차정사각행렬 A에 대하여

$$A^n = a_n A + b_n E \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

가 성립하도록 하는 두 수열 $a_n\}$, $\{b_n\}$이 있다.

이때, 모든 자연수 n에 대하여 $\begin{matrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{matrix}\Bigg) = B\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$을 만족시키는 행렬 B에 대하여 $B^2 = xB + yE$

가 성립한다. 두 상수 x, y의 합 $x+y$의 값은? (단, E는 단위행렬이고 k는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

18. 실수 전체의 집합의 두 부분집합 A, B를 각각

$$A = \ x \mid \log_4 (x-1) \leq \log_{16} (x+5)\}$$

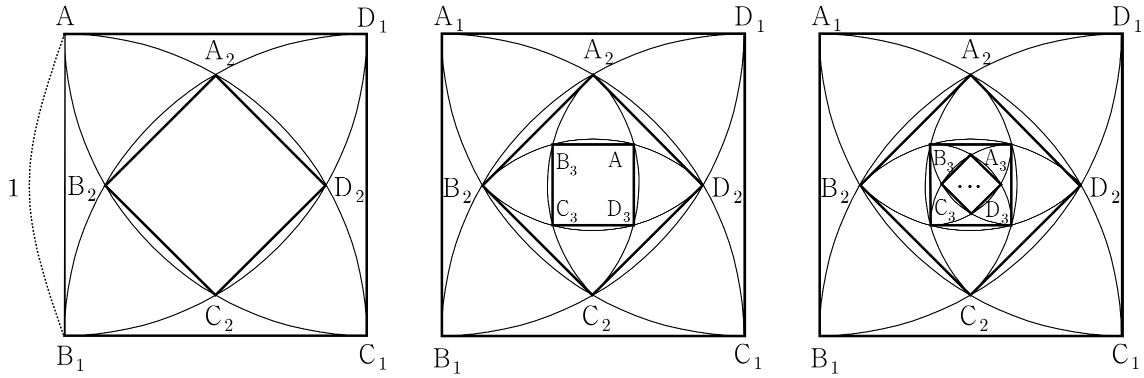
$$B = \ x \mid 8^x - 11 \cdot 4^x + 38 \cdot 2^x - 40 = 0\}$$

이라 할 때, 집합 $A \cap B$의 모든 원소들의 합은? [4점]

① $\log_2 10$ ② $\log_2 20$ ③ $\log_2 40$ ④ $\log_2 60$ ⑤ $\log_2 80$

19. [그림]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 A $B_1C_1D_1$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 A_1B_1인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 하자. 또 [그림2]와 같이 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_2B_2}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_3, B_3, C_3, D_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 모든 자연수 에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 A_nB_n인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 $_n$이라 할 때, $\overset{\infty}{\underset{n=1}{}} S_n$의 값은? [4점]



[그림1] [그림2]

① $\frac{1+ \quad 3}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$

20. 방정식 $\quad^{x} = \log \ |x|$의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 0

21. 어느 자영업자의 하루 매출액은 평균이 30만원이고 표준편차가 4만원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 자영업자는 하루 매출액이 31만원 이상일 때마다 1000원씩을 자선단체에 기부하고 31만원 미만일 때는 기부를 하지 않는다고 한다. 이와 같은 추세가 계속된다고 할 때, 600일 동안 영업하여 기부할 총 금액이 222000원 이상이 될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

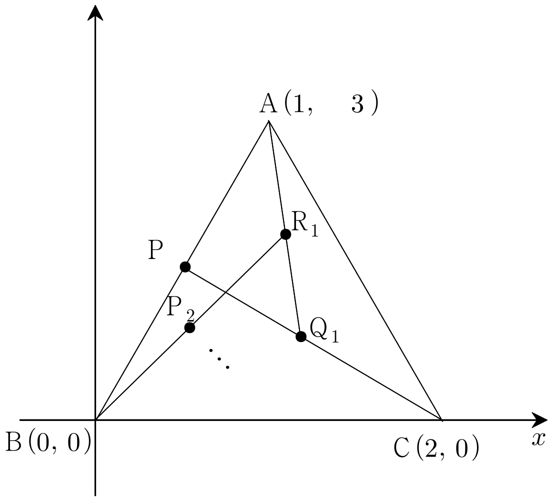
[표준정규분포표]

	$P(0 \leq \quad \leq z)$
0.25	0.10
0.50	0.19
1.00	0.34
1.50	0.43

① 0.69 ② 0.84 ③ 0.90
④ 0.93 ⑤ 0.98

22. 좌표평면 위에 세 점 A 1, 3), B(0, 0), C(2, 0)이 있다. 선분 AB의 중점을 P , 선분 P_1C의 중점을 Q_1, 선분 Q_1A의 중점을 R_1, 선분 R_1B의 중점을 P_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 모든 자연수 n에 대하여 선분 P_nC의 중점을 Q_n, 선분 Q_nA의 중점을 R_n, 선분 R_nB의 중점을 P_{n+1}이라 하자. n이 한없이 커질 때, 점 P_n은 점 (α, β)에 한없이 가까워진다.

이때 두 상수 α, β의 합 $\alpha+\beta$의 값은? [4점]



① $\frac{3+\sqrt{3}}{7}$ ② $\frac{3+2\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{3+3\sqrt{3}}{7}$

④ $\frac{4+\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{4+2\sqrt{3}}{7}$

23. 최대공약수가 $\ !$, 최소공배수가 $13!$이 되는 두 자연수 k, n ($k \leqq n$)의 순서쌍 (k, n)의 개수는? [4점]

① 25 ② 27 ③ 32
④ 36 ⑤ 49

24. 다음 등식을 만족시키는 세 실수 a, b, c가 있다.

$$\frac{1}{3}\Big) = 2a, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{2b} = b, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{2c} = c$$

이때, 세 실수 a, b, c의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]

① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < a < c$
④ $b < c < a$ ⑤ $c < a < b$

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 다음 세 조건을 모두 만족시키는 두 이차정사각행렬 , B가 있다.

(가) $A \quad B = \left.\begin{matrix} 2 & 6 \\ x & 12 \end{matrix}\right)$

(나) $A - B = \begin{pmatrix} 6 & y \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

(다) $A \ \ - B^2 = AB - BA$

이때, 두 실수 x, y의 곱 xy의 값을 구하시오. [3점]

26. $\log_{15} A = 30$, $\log_{45} B = 15$인 두 자연수 A, B에 대하여 $\frac{B}{A}$를 소수로 나타내면 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나온다. 이때, n의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$) [3점]

27. A 도시에서 B 도시로 운행하는 고속버스들의 소요시간은 평균이 m분이고, 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고속버스들의 소요시간 중에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$ 라 하자.

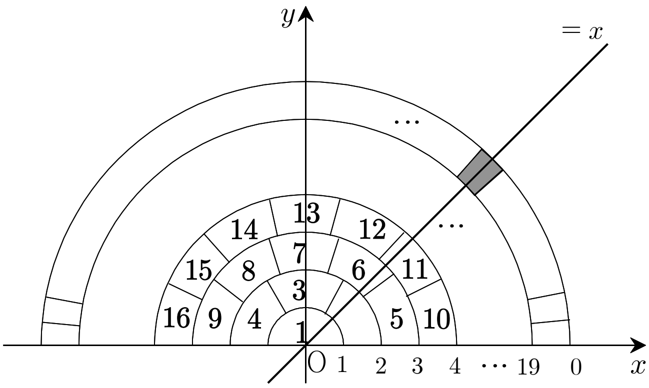
$$\mathrm{P}\left(m-5 \leqq \overline{X} \leqq m+5\right)=0.9544$$

를 만족시키는 표본의 크기 n의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [3점]

[표준정규분포표]

	$\mathrm{P}(0 \leqq \quad \leqq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

28. 좌표평면 위에 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 20 이하의 자연수인 반원이 20개 있다. $1 \leqq k \leqq 19$인 모든 자연수 k에 대하여 반지름의 길이가 k인 반원과 반지름의 길이가 $k+1$인 반원 사이의 영역을 $2k+1$등분한 다음, 각 부분에 시계 바늘이 도는 방향과 반대방향으로 자연수를 차례대로 나열하였다. 이때, 직선 $y=x$와 맨 바깥쪽 영역이 만나는 어두운 부분에 들어간 수를 구하시오. (단, 반지름의 길이가 1인 반원의 내부에는 을 나열한다.) [4점]

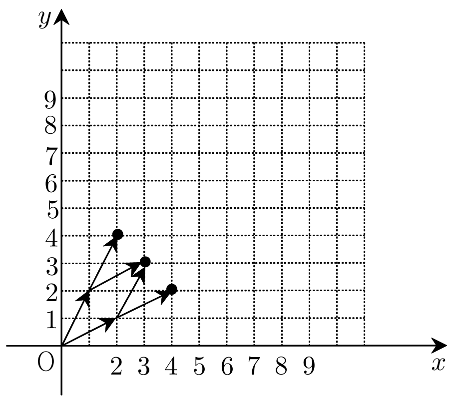


29. 좌표평면 위에서 점 P는 한 번의 이동으로 다음의 (규칙) 또는 (규칙2)를 따라 이동한다.

(규칙1) x축의 양의 방향으로 1만큼, y축의 양의 방향으로 2만큼 이동한다.
(규칙2) x축의 양의 방향으로 2만큼, y축의 양의 방향으로 1만큼 이동한다.

예를 들어, 원점 O에 있는 점 P가 두 번의 이동으로 도달할 수 있는 곳을 표시하면 그림과 같다. 점 P가 (규칙1)을 따라 이동할 확률은 $\frac{1}{3}$이고 (규칙2)를 따라 이동할 확률은 $\frac{2}{3}$일 때, 위와 같은 규칙으로 점 P가 원점 O에서부터 다섯 번의 이동으로 점 $(8, 7)$에 도달할 확률은 $\frac{q}{p}$이다.

이때, 서로소인 두 자연수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오. (단, 매번 이동하는 사건은 서로 독립이다.) [4점]



30. $1 \leq x < 10$인 실수 x에 대하여 $\frac{x}{x]}$ 의 값이 자연수가 되는 x의 개수를 구하시오.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]