수리 영역(문과)

1. ②	2. ③	3. ③	4. ③	5. ①
6. ④	7. ⑤	8. ①	9. ④	10. ④
11. ②	12. ②	13. ②	14. ⑤	15. ⑤
16. ④	17. ④	18. ②	19. ①	20. ③
21. ④	22. ⑤	23. ③	24. ①	25. 48
26. 11	27. 16	28. 371	29. 323	30. 171

1. 지수와 로그 정답 ②

$16=(-2)\ \cdot 2,\ 250=5^3\cdot 2$이므로

$$(\ -16+\sqrt[3]{250}\,)^3=(\sqrt[3]{(-2)^3\cdot 2}+\sqrt[3]{5^3\cdot 2}\,)^3$$

$$=(-2\cdot\sqrt[3]{2}+5\cdot\sqrt[3]{2}\,)^3$$

$$=(3\cdot\sqrt[3]{2}\,)^3=27\cdot 2=54$$

2. 확률 정답 ③

전체 경우의 수는

(A 그룹에서 B 그룹으로 이동할 2명을 뽑는 경우의 수)

×(B 그룹에서 A 그룹으로 이동할 2명을 뽑는 경우의 수)

$={}_4C_2\times{}_4C_2$

A 그룹에 남자 1명과 여자 3명이 있는 경우는 다음의 2가지이다.

(i) A → B 남자 2명, B → A 남자 1명, 여자 1명이 이동하는 경우

A 그룹에서 B 그룹으로 남자 2명이 이동하는 경우의 수는 ${}_2C_2$이고, B 그룹에서 A 그룹으로 남자 1명, 여자 1명이 이동하는 경우의 수는 ${}_2C_1\times{}_2C_1$이므로 경우의 수는 ${}_2C_2\times({}_2C_1\times{}_2C_1)$이다.

(ii) A → B 남자 1명, 여자 1명, B → A 여자 2명이 이동하는 경우

(i)과 마찬가지 방법으로 경우의 수는

$({}_2C_1\times{}_2C_1)\times{}_2C_2$이다.

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{{}_2C_2\times({}_2C_1\times{}_2C_1)+({}_2C_1\times{}_2C_1)\times{}_2C_2}{{}_4C_2\times{}_4C_2}$$

$$=\frac{4+4}{36}$$

$$=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

3. 수열의 극한 정답 ③

무한등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 수렴 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$이다. 따라서 수열 $\left\{\left(\frac{r^2-r}{6}\right)^n\right\}$에서 첫째항 $a=\frac{r^2-r}{6}$, 공비 $r=\frac{r^2-r}{6}$이므로 $-1<\frac{r^2-r}{6}\le 1$이면 무한등비수열이 수렴한다.

(i) $-1<\frac{r^2-r}{6}$에서

$r^2-r>-6$

$r^2-r+6>0$

r에 대한 이차방정식 $r^2-r+6=0$의 판별식 를 조사해 보면

$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 6=-23<0$

따라서 $\quad -r+6>0$은 모든 실수 r에 대하여 성립한다.

(ii) $\frac{r^2-r}{6} \le 1$에서

$r^2-r \le 6$

$r^2-r-6 \le 0$

$(r+2)(r-3) \le 0$

$-2 \le r \le 3$

따라서 (i), (ii)에 의해 $-2 \le r \le 3$이므로 정수 r는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 6개이다.

4. 수열의 극한

정답 ③

$_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 이므로

$$\frac{S_n}{S_n-1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}-1}$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n^2+n-2}{2}}$$

$$= \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}$$

$$\therefore\ P_n = \frac{S_2}{S_2-1} \times \frac{S_3}{S_3-1} \times \frac{S_4}{S_4-1} \times \dots \times \frac{S_n}{S_n-1}$$

$$= \frac{2\cdot\cancel{3}}{1\cdot\cancel{4}} \times \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{4}}{\cancel{2}\cdot\cancel{5}} \times \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{5}}{\cancel{3}\cdot\cancel{6}} \times \dots \times \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{(n-1)}(n+2)}$$

$$= \frac{3}{1} \times \frac{n}{n+2} = \frac{3n}{n+2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1+\frac{2}{n}} = 3$$

5. 순열과 조합

정답 ①

(가) ${}_rC_r = {}_rC_0 = \boxed{1}$

${}_{r+1}C_{r+1} = {}_rC_0 = \boxed{1}$

(나) $\sum_{i=r}^{k+1} {}_iC_r = \sum_{i=r}^{k} {}_iC_r + {}_{k+1}C_r$

$= {}_{k+1}C_{r+1} + \boxed{{}_{k+1}C_r}$

$(\because\ n=k$일 때, $\sum_{i=r}^{k} {}_iC_r = {}_{k+1}C_{r+1}$이라 가정)

(다) ${}_{k+1}C_{r+1} + {}_{k+1}C_r$

$$= \frac{(k+1)!}{k+1-(r+1)\}!\,(r+1)!} + \frac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$$

$$= \boxed{\frac{(k+1)!}{(k-r)!\,(r+1)!}} + \frac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$$

6. 수열의 극한

정답 ④

㉠ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \ne 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

$(\because$ 대우 명제) (참)

㉡ $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1+\sqrt{k}}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$-\ {}^{n}_{=1}(\quad k-\sqrt{k+1})$$

$$=-\ (\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

$$+(\sqrt{3}-\sqrt{4})+\ldots+(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\}$$

$$=-(1-\sqrt{n+1})=\sqrt{n+1}-1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

그러므로 수열 $a_n\}$은 발산한다. (거짓)

㉢ $1+(a_1+a_2+\ldots+a_n)\Big|<\ {}^{1}_{n}$이므로

$$-\frac{1}{n}<1+(a_1+a_2+\ldots+a_n)<\frac{1}{n}$$

$$-1-\frac{1}{n}<a_1+a_2+\ldots+a_n<-1+\frac{1}{n}$$

$$\therefore\ -1-\frac{1}{n}<\sum_{k=1}^{n}a_k<-1+\frac{1}{n}$$

각 변에 $\lim\limits_{n\to\infty}$를 취하면

$$\lim_{n\to\infty}\left(-1-\frac{1}{n}\right)\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\le\lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{1}{n}\right)$$

$$-1\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\le-1$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=-1$이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

7. 수열

정답 ⑤

$a_n=\log_2(n!)$이므로

$$b_n=a_{n+1}-a_n=\log_2\ (n+1)!\}-\log_2(n!)$$

$$=\log_2\frac{(n+1)!}{n!}=\log_2(n+1)$$

㉠ $b_{15}=\log_2(15+1)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$ (참)

㉡ $\sum\limits_{k=1}^{5}b_k=\log_2 2+\log_2 3+\log_2 4+\log_2 5+\log_2 6$

$$=\log_2(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)$$

$$=\log_2 720$$

$2^9<720<2^{10}$이므로

$$\log_2 2^9<\log_2 720=\sum_{k=1}^{5}b_k<\log_2 2^{10}$$

$$\therefore\ 9<\sum_{k=1}^{5}b_k<10\ \text{(참)}$$

㉢ n이 짝수이면 $b_n=\log_2(n+1)$에서 $n+1$이 홀수이므로 b_n은 유리수가 될 수 없다. 즉, 무리수이다.

(증명)

$n=2k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$라 하면

$$b_n=b_{2k}=\log_2(2k+1)$$

b_n을 유리수라 가정하면

$b_n=\log_2(2k+1)=\ {}^{q}_{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)

로 놓을 수 있다.

$\log_2(2k+1)=\dfrac{q}{p}$에서

$$2^{\frac{q}{p}}=2k+1$$

$$2^q=(2k+1)^p$$

이때, p, q, k는 자연수이므로 2^q은 짝수, $(2k+1)^p$은 홀수가 되어 이 식을 만족시키는 p, q가 존재하지

않는다.

즉, 가정에 모순이므로 은 무리수이다.

따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 옳다.

8. 확률 정답 ①

바이러스에 감염된 사건을 , 감염되었다고 진단하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이다.

(ⅰ) 바이러스에 감염된 컴퓨터를

감염되었다고 진단할 확률이 94%이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{2}{5}\times 0.94$

감염되지 않았다고 진단할 확률이 6%이므로

$\mathrm{P}(A\cap E\quad)=\frac{2}{5}\times 0.06$

(ⅱ) 바이러스에 감염되지 않은 컴퓨터를

감염되었다고 진단할 확률이 2%이므로

$\mathrm{P}(A^{C}\cap E)=\frac{3}{5}\times 0.02$

감염되지 않았다고 진단할 확률이 98%이므로

$\mathrm{P}(A^{C}\cap E^{C})=\frac{3}{5}\times 0.98$

$\mathrm{P}(A|E)=\ \frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}$ 에서

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^{C}\cap E)$

$=\frac{2}{5}\times 0.94+\frac{3}{5}\times 0.02$이므로

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}$$

$$=\frac{\frac{2}{5}\times 0.94}{\frac{2}{5}\times 0.94+\frac{3}{5}\times 0.02}=\frac{188}{194}=\frac{94}{97}$$

9. 지수함수와 로그함수 정답 ④

주어진 가격표에서

$f(0.3)=a(b^{0.3}-1)=70$ …… ㉠

$f(0.6)=a(b^{0.6}-1)=210$ …… ㉡

÷㉡을 하면

$$\frac{a(b^{0.3}-1)}{a(b^{0.6}-1)}=\frac{70}{210}$$

$$\frac{b^{0.3}-1}{b^{0.6}-1}=\frac{1}{3}$$

$3(b^{0.3}-1)=b^{0.6}-1$

$3b^{0.3}-3=(b^{0.3})^{2}-1$

$(b^{0.3})^{2}-3b^{0.3}+2=0$

$(b^{0.3}-1)(b^{0.3}-2)=0$

$b^{0.3}=2$ ($\because$ $b>1$) …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $a=70$

$\therefore$ $f(1.5)=70(b^{1.5}-1)$

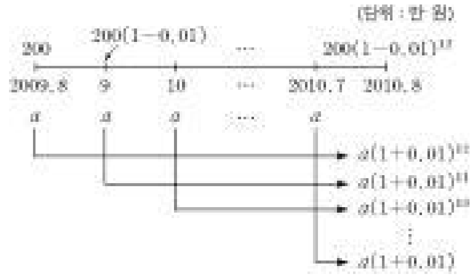
$=70\ (b^{0.3})^{5}-1\}$

$=70(2^{5}-1)$ ($\because$ ㉢)

$=2170$(만 원)

10. 수열 정답 ④

매월 초에 a만 원을 적립한다고 하면



2009년 8월 초 200만 원인 노트북컴퓨터의 2010년 8월

초 판매 가격은

$00\times(1-0.01)^{\ 2}=200\times(0.99)^{12}=200\times0.89$

$=178$(만 원) $\cdots\cdots$ ㉠

2009년 8월 초부터 a만 원씩 12개월 동안 적립한 금액의 원리합계는

$a(1.01)^{12}+a(1.01)^{11}+\cdots+a(1.01)$

$=\dfrac{a(1.01)\ (1.01)^{12}-1\}}{(1.01)-1}$

$=101a\{(1.01)^{12}-1\}$

$=101a(1.13-1)=13.13a$(만 원) $\cdots\cdots$ ㉡

노트북컴퓨터를 구매하려면 $\leq$ ㉡이어야 하므로

$178\leq 13.13a$

$a\geq\dfrac{178}{13.13}=13.55\cdots\fallingdotseq 14$(만 원)

따라서 적립해야 할 최소 금액은 14만 원이다.

11. 지수와 로그

정답 ②

$\log_2 a$와 $\log_2 b$의 소수 부분이 같으므로

$\log_2 a=n_1+\alpha,\ \log_2 b=n_2+\alpha$

($n_1,\ n_2$는 정수, $0\leq\alpha<1$)

라 하면

$\log_2 b-\log_2 a=n_2-n_1=m$ (m은 정수)

$\log_2\dfrac{b}{a}=m$

$\dfrac{b}{a}=2^m$

$b=a\cdot 2^m$

(i) $m=1$일 때, $b=2a$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(11,\ 22),\ (12,\ 24),\ \cdots,\ (24,\ 48)$의 14개

(ii) $m=2$일 때, $b=4a$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(11,\ 44),\ (12,\ 48)$의 2개

(iii) $m\geq 3$일 때, $b\geq 8a$이므로 $10<a<b<50$을

만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$14+2=16$(개)이다.

12. 지수와 로그

정답 ②

$=\log I_0-\log I$에 $I=I_0\times 10^{-acd}$을 대입하여

정리하면

$A=\log I_0-\log I$

$=\log I_0-\log(I_0\times 10^{-acd})$

$=\log I_0-\log I_0-\log 10^{-acd}$

$=-\log 10^{-acd}=acd$

$a=\dfrac{4\pi k}{\lambda}$를 대입하면 $A=\dfrac{4\pi k}{\lambda}cd$

이때, $A_1=\dfrac{4\pi k}{\lambda_1}cd_1$이므로

$A_2=\dfrac{4\pi k}{2\lambda_1}c\cdot 4d_1=2\cdot\dfrac{4\pi k}{\lambda_1}cd_1=2A_1$

$\therefore\ \dfrac{A_2}{A_1}=\dfrac{2A_1}{A_1}=2$

13. 행렬

정답 ②

$\begin{matrix} a & b \\ c & -a \end{matrix}\Big)$에서 케일리−해밀턴의 정리에 의해

$A \;-\; a+(-a)\}A+(-a^2-bc)E=O$

$\therefore\ A^2=(a^2+bc)E$ ...... ①

㉠ $a^2+bc=1$이면 ①에서

$A^2=E$이므로

$A^{2009}=(A^2)^{1004}A$

$=E^{1004}A=EA=A$(참)

㉡ $A^3-2A=O$에서

$(a^2+bc)A-2A=O$ ($\because$ ①)

$(a^2+bc-2)A=O$

$\therefore\ a^2+bc-2=0$ 또는 $A=O$

그런데 행렬 A의 성분은 모두 0이 아닌 실수이므로

$a^2+bc=2$

이때, 행렬 A에서

$a(-a)-bc=-(a^2+bc)=-2\neq 0$이므로 A는

역행렬을 갖는다.

㉢ $A^3-4A^2+4E=O$에서

$(a^2+bc)A-4(a^2+bc)E+4E=O$ ($\because$ ①)

$(a^2+bc)A=4(a^2+bc-1)E$

이때, $a^2+bc=0$이면 $0=4(a^2+bc-1)E$이므로

$a^2+bc=1$인데, 이는 $a^2+bc=0$이라는 가정에

모순이므로 $a^2+bc\neq 0$이다.

$\therefore\ A=\dfrac{4(a^2+bc-1)}{a^2+bc}E$

즉, $A=kE=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$($k$는 상수)꼴인데, $b=c=0$이

되어 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $A^3-4A^2+4E=O$를 만족시키는

$a,\ b,\ c$는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

14. 확률 정답 ⑤

(가) A사진이 나온 다음 n초 후에 B사진이 나올 확률이 p_n이므로 C, D사진이 나올 확률도 각각 p_n이다.

A사진이 나온 다음 n초 후 다시 A사진이 나오는 사건은 A사진이 나온 다음 n초 후 B 또는 C 또는 D 사진이 나오는 사건의 여사건이므로 확률은

$1-(p_n+p_n+p_n)=\boxed{1-3p_n}$

(나) A사진이 나온 다음 $(n+1)$초가 지난 후에 B사진이 나오는 것은 A사진이 나온 다음 n초가 지난 후에 A 또는 C 또는 D사진이 나오고, 1초 후 B사진이 나오는 것으로 생각할 수 있다.

이때, A, C, D사진이 나온 다음 1초가 지난 후에 B사진이 나올 확률은 각각 $\dfrac{1}{3}$이므로

$p_{n+1}=(1-3p_n)\times\dfrac{1}{3}+p_n\times\dfrac{1}{3}+p_n\times\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\;\; 2p_n+(1-3p_n)\}$

$=\dfrac{1}{3}(1-p_n)$

$=\boxed{-\dfrac{1}{3}p_n}+\dfrac{1}{3}$

(다) $p_{n+1}=-\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}$을 변형하면

$p_{n+1}-\dfrac{1}{4}\Big)=-\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{4}\right)$이고,

은 A사진이 나오고 1초 후 B사진이 나올 확률이므로 $\frac{1}{3}$ 이다.

즉, $p_1=\frac{1}{3}$

따라서 수열 $\left\{p_n-\frac{1}{4}\right\}$은 첫째항이

$p_1-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{12}}$ 이고, 공비가 $-\frac{1}{3}$ 인

등비수열을 이룬다.

15. 행렬

정답 ⑤

$\begin{matrix} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

㉠ 의 역행렬이 존재하면 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$이므로

오직 한 쌍의 해를 갖는다. (참)

㉡ A의 역행렬이 존재하지 않으면

$ad-bc=0$이므로 $ad=bc$

$\therefore\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ ...... ①

B의 역행렬이 존재하지 않으면

$aq-pc=0$이므로 $aq=pc$

$\therefore\ \frac{a}{c}=\frac{p}{q}$ ...... ②

①, ②에서 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{p}{q}$이므로 주어진 연립방정식은

무수히 많은 해를 갖는다. (참)

㉢ A의 역행렬이 존재하므로

$ad-bc\neq 0$ ...... ①

또, $k_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} k_1a+k_2b \\ k_1c+k_2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로

$k_1a=-k_2b,\ k_1c=-k_2d$ ...... ②

$k_1\neq 0$ 또는 $k_2\neq 0$이라 가정하자.

(i) $k_1\neq 0$일 때, ②에서

$a=-\frac{k_2}{k_1}b,\ c=-\frac{k_2}{k_1}d$이므로

$ad-bc=-\frac{k_2}{k_1}bd+\frac{k_2}{k_1}bd=0$

이는 ①과 모순이다.

(ii) $k_2\neq 0$일 때, ②에서

$b=-\frac{k_1}{k_2}a,\ d=-\frac{k_1}{k_2}c$이므로

$ad-bc=-\frac{k_1}{k_2}ac+\frac{k_1}{k_2}ac=0$

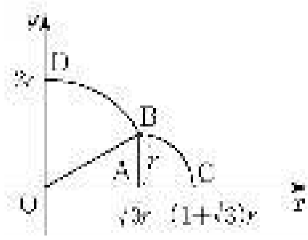
이 또한 ①과 모순이다.

(i), (ii)에 의해 $k_1=k_2=0$이다. (참)

따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 옳다.

16. 확률분포와 통계적 추정

정답 ④



$f(x)$가 확률밀도함수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, (부채꼴 ABC의 넓이)　(삼각형 BOA의 넓이)

+(부채꼴 ODB의 넓이)$=1$

삼각형 BOA에서 $\mathrm{OA}=\ \ 3r$이고

$\mathrm{AB}=\overline{\mathrm{AC}}=(1+\sqrt{3})r-\sqrt{3}r=r$이므로

(부채꼴 ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{4}\pi r$ ...... ㉠

$\triangle\mathrm{BOA}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}r\cdot r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r^2$ ...... ㉡

또, $\triangle\mathrm{BOA}$에서 $\overline{\mathrm{OB}}=2r$, $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}r$,

$\overline{\mathrm{AB}}=r$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{AB}}=2:\sqrt{3}:1$

$\therefore\ \angle\mathrm{BOA}=\dfrac{\pi}{6}$

따라서 $\angle\mathrm{DOB}=\dfrac{\pi}{3}$이므로

(부채꼴 ODB의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\cdot(2r)^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi r^2 \quad\text{......}\ ㉢$$

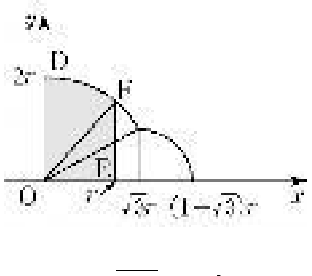
$$+㉡+㉢=\frac{1}{4}\pi r^2+\frac{\sqrt{3}}{2}r^2+\frac{2}{3}\pi r^2=1\text{이므로}$$

$$\frac{3\pi+6\sqrt{3}+8\pi}{12}r^2=1$$

$$\therefore\ r^2=\frac{12}{11\pi+6\sqrt{3}} \quad\text{......}\ ㉣$$

한편, $\mathrm{P}(0\le\ \ \le r)$의 값은 다음 그림에서 어두운 부분의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(0\le X\le r)=\triangle\mathrm{FOE}+$(부채꼴 ODF의 넓이)



$\triangle\mathrm{FOE}$에서 $\mathrm{OF}=2r$, $\overline{\mathrm{OE}}=r$이므로 $\mathrm{FE}=\sqrt{3}r$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{FOE}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\sqrt{3}r=\frac{\sqrt{3}}{2}r^2 \quad\text{......}\ ㉤$$

또, $\triangle\mathrm{FOE}$의 변의 길이의 비에 의해

$\angle\mathrm{FOE}=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\angle\mathrm{DOF}=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore$ (부채꼴 ODF의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\cdot(2r)^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}r^2 \quad\text{......}\ ㉥$$

따라서 ㉤, ㉥에 의해 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(0\le X\le r)=\frac{\sqrt{3}}{2}r^2+\frac{\pi}{3}r^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)r^2$$

$$=\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{6}r^2$$

$$=\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{6}\cdot\frac{12}{11\pi+6\sqrt{3}} \quad (\because ㉣)$$

$$=\frac{6\sqrt{3}+4\pi}{11\pi+6\sqrt{3}}$$

17. 행렬

정답 ④

$A^n=a_nA+b_nE$의 양변에 A를 곱하면

$$A^{n+1}=a_nA^2+b_nA$$

$$=a_n(A+3E)+b_nA$$

$$=(a_n+b_n)A+3a_nE$$

$$\therefore\ a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=3a_n$$

이를 행렬로 표현하면

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}\text{이므로}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}$$

행렬 에서 케일리−해밀턴의 정리를 이용하면

$B \quad (1+0)B+(0-3)E=O$

즉, $B^2=B+3E$이므로

$x=1,\ y=3$

$\therefore\ x+y=4$

18. 지수함수와 로그함수 정답 ②

(i) 집합 A를 구해 보자.

먼저 진수 조건에 의해 $x-1>0,\ x+5>0$이므로

$x>1$ …… ㉠

$\log_4(x-1) \le \log_{16}(x+5)$에서

$\log_{16}(x-1)^2 \le \log_{16}(x+5)$

$(x-1)^2 \le x+5$

$x^2-2x+1 \le x+5$

$x^2-3x-4 \le 0$

$(x+1)(x-4) \le 0$

$\therefore\ -1 \le x \le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $A=\{x|1<x \le 4\}$

(ii) 집합 B를 구해 보자.

$8^x-11 \cdot 4^x+38 \cdot 2^x-40=0$에서

$(2^x)^3-11 \cdot (2^x)^2+38 \cdot 2^x-40=0$

$2^x=t(t>0)$로 치환하면

$t^3-11t^2+38t-40=0$

$(t-2)(t-4)(t-5)=0$

$\therefore\ t=2$ 또는 $t=4$ 또는 $t=5$

즉, $2^x=2$에서 $x=1$,

$2^x=4$에서 $x=2$,

$2^x=5$에서 $x=\log_2 5$이므로

$B= \ 1,\ 2,\ \log_2 5\}$

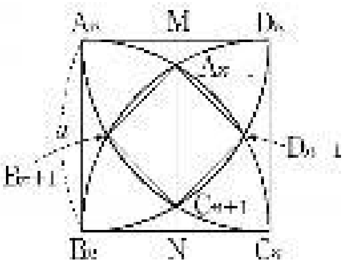
(i), (ii)에 의해 $A \cap B=\{2,\ \log_2 5\}$이므로 $A \cap B$의 모든 원소들의 합은

$2+\log_2 5=\log_2 4+\log_2 5=\log_2 20$

19. 수열의 극한 정답 ①

사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 한 변의 길이를 a라 하고

사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 한 변의 길이를 구해 보자.



위의 그림과 같이 $\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$, $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 중점을 각각 M, N이라 하면 MN은 두 점 A_{n+1}, C_{n+1}을 지난다.

삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{N}$에서

$\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}=a,\ \mathrm{B}_n\mathrm{N}=\dfrac{a}{2}$ 이므로

$\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{N}= \quad a^2-\left.\dfrac{a}{2}\right)^2= \quad \dfrac{3}{4}a^2= \quad \dfrac{3}{2}\ a$

$\therefore\ \mathrm{MA}_{n+1}=a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\ 1-\left.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a$

$\therefore\ \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$

$=a-2\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a\ (\because\ \overline{\mathrm{MA}_{n+1}}=\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{N})$

$=(\sqrt{3}-1)a$

즉, 사각형 $\mathrm{A}_{\ +1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 대각선

$\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$의 길이가 $3-1)a$이므로

사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 한 변의 길이는

$\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)a}{\sqrt{2}}$ 이다.

따라서 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과

사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 닮음비가

$1 : \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$ 이다.

따라서 수열 $_n\}$은 첫째항 $S_1 = 1$이고,

공비 $r = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$ 인

등비수열이므로

$$^{\infty}_{n=1} S_n = \frac{1}{1-(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

20. 지수함수와 로그함수 정답 ③

방정식 $2^{\frac{x}{2}} = \log\ _2|x|$의 실근은 $y = (\sqrt{2})^x$과

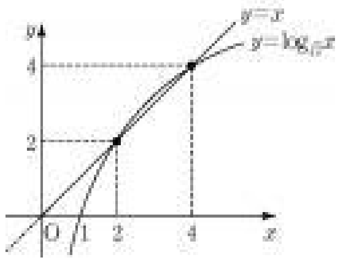
$y = \log_{\sqrt{2}}|x|$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

$$y = \log_{\sqrt{2}}|x| = \begin{cases} \log_{\sqrt{2}} x & (x > 0) \\ \log_{\sqrt{2}}(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

(i) $x > 0$일 때, 두 함수 $y = \log_{\sqrt{2}} x$와 $y = (\sqrt{2})^x$은

서로 역함수 관계이므로 그래프의 교점은 곡선

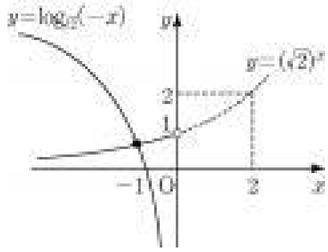
$y = \log_{\sqrt{2}} x$와 직선 $y = x$의 교점과 같다.



(ii) $x < 0$일 때, $y = \log_{\sqrt{2}}(-x)$의 그래프는

$y = \log_{\sqrt{2}} x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이므로

다음 그림과 같다.



(i), (ii)에 의해 $x > 0$일 때 2개, $x < 0$일 때 1개의

교점을 가지므로 방정식 $2^{\frac{x}{2}} = \log_{\sqrt{2}}|x|$의 서로 다른

실근의 개수는 $2+1=3$이다.

21. 확률분포와 통계적 추정 정답 ④

자영업자의 하루 매출액을 X라 하면 확률변수 X는

정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 4^2)$을 따른다. (단, 단위는 만 원)

따라서 하루 매출액이 31만 원 이상일 확률은

$$\mathrm{P}(X \geq 31) = \mathrm{P}\ Z \geq \frac{31-30}{4}\Big)$$

$$= \mathrm{P}(Z \geq 0.25)$$

$$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.25)$$

$$= 0.5 - 0.10 = 0.40$$

600일을 영업했을 때 기부한 날 수를 Y라 하면 확률변수

는 이항분포 $\mathrm{B}(600,\ 0.4)$를 따르고, 600은 충분히 크므로 정규분포로 근사시킬 수 있다.

즉, $\mathrm{E}(Y)=600\times0.4=240$,

$\mathrm{V}(Y)=600\times0.4\times0.6=12$ 에서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 12^2)$을 따른다.

기부할 총 금액이 222000원 이상이려면 기부 횟수가 222회 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y\geq 222)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{222-240}{12}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z\geq-1.5)$$

$$=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)$$

$$=0.5+0.43$$

$$=0.93$$

22. 수열의 극한 정답 ⑤

$\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$이라 하자.

점 Q_n은 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{C}}$의 중점이므로

$$\mathrm{Q}_n\left(\frac{a_n+2}{2},\ \frac{b_n}{2}\right)$$

점 R_n은 $\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{A}}$의 중점이므로

$$\mathrm{R}_n\left(\frac{\frac{a_n+2}{2}+1}{2},\ \frac{\frac{b_n}{2}+\sqrt{3}}{2}\right)$$

즉, $\mathrm{R}_n\left(\frac{a_n+4}{4},\ \frac{b_n+2\sqrt{3}}{4}\right)$

점 P_{n+1}은 $\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{B}}$의 중점이므로

$$\mathrm{P}_{n+1}\left(\frac{\frac{a_n+4}{4}}{2},\ \frac{\frac{b_n+2\sqrt{3}}{4}}{2}\right)$$

즉, $\mathrm{P}_{n+1}\left(\frac{a_n+4}{8},\ \frac{b_n+2\sqrt{3}}{8}\right)$

이때, $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ b_{n+1})$이므로

$$a_{n+1}=\frac{a_n+4}{8} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$b_{n+1}=\frac{b_n+2\sqrt{3}}{8} \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편, n이 한없이 커질 때, 점 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$이 점 $(\alpha,\ \beta)$에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$로 각각 수렴한다.

㉠의 양변에 $\lim\limits_{n\to\infty}$를 취하면

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+4}{8}$$

이때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이므로

$$\alpha=\frac{\alpha+4}{8}$$

$$7\alpha=4$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{4}{7}$$

또, ㉡의 양변에 $\lim\limits_{n\to\infty}$를 취하면

$$\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+2\sqrt{3}}{8}$$

이때, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}=\beta$이므로

$$\beta=\frac{\beta+2\sqrt{3}}{8}$$

$$7\beta=2\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \beta=\frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{4}{7}+\frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$4+2 \quad 3$
7

23. 순열과 조합

정답 ③

두 자연수 k, n의 최대공약수가 $5!$이므로 $k=5!\times a$, $n=5!\times b$(a, b는 서로소인 자연수)로 놓으면 최소공배수가 $13!$이므로 $13!=5!\times ab$

$\therefore\ ab=13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6$

$=2\ \ \times3^4\times5\times7\times11\times13$

a, b는 서로소이고 $k\le n$에서 $a\le b$이므로 2^7, 3^4, 5, 7, 11, 13을 2개 조로 분할하여 각각의 곱 중 작은 것을 a로, 큰 것을 b로 하면 된다. 0개와 6개, 1개와 5개, 2개와 4개, 3개와 3개로 나눌 수 있으므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$({}_6C_0\times{}_6C_6)+({}_6C_1\times{}_5C_5)+({}_6C_2\times{}_4C_4)+$
${}_6C_3\times{}_3C_3\times\dfrac{1}{2!}\Big)$

$=1+6+15+10=32$

따라서 순서쌍 $(k,\ n)$의 개수는 32(개)이다.

24. 지수함수와 로그함수

정답 ①

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^a=2a$이므로

a는 곡선 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$과 직선 $y=2x$의

교점의 x좌표이다.

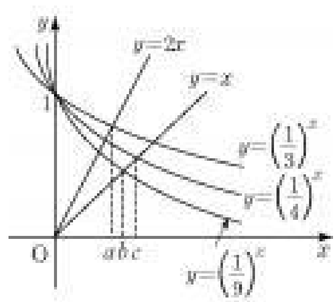
마찬가지로 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2b}=b$에서

b는 곡선 $y=\left(\dfrac{1}{9}\right)^x$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표이며,

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2c}=c$에서 c는 곡선

$y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표이다.

그래프를 그려 보면 다음과 같다.



$\therefore\ \ a<b<c$

25. 행렬

정답 48

(다)에서

$^2-B^2=AB-BA$

$\Leftrightarrow A^2-AB+BA-B^2=O$

$\Leftrightarrow (A+B)(A-B)=O$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2&6\\x&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&y\\-2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&2y-24\\6x-24&xy-48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$(4,\ 4)$성분을 비교하면 $xy-48=0$이므로 $xy=48$

❰ 다른 풀이 ❱

$(A+B)(A-B)=O$에서 영행렬이 아닌 두 행렬의

곱이 영행렬이므로 B, $A-B$는 영인자이다.

행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 영인자이면 $ad-bc=0$이므로

$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ x & 12 \end{pmatrix}$에서 $24-6x=0$

$\begin{pmatrix} 6 & y \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$에서 $-24+2y=0$

$\therefore\ x=4,\ y=12$

$\therefore\ xy=48$

26. 지수와 로그 정답 11

$\log_5 A=30,\ \log_{45}B=15$에서

$A=15^{30},\ B=45^{15}$이므로

$$\frac{B}{A}=\frac{45^{15}}{15^{30}}=\frac{3^{15}\cdot 15^{15}}{15^{30}}=\left(\frac{3}{15}\right)^{15}=\left(\frac{1}{5}\right)^{15}$$

$\therefore\ \log\frac{B}{A}=\log\left(\frac{1}{5}\right)^{15}$

$=-15\log 5$

$=-15(1-\log 2)$

$=-15\times 0.6990$

$=-10.485=-11+0.515$

따라서 소수점 아래 11번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나오므로 $n=11$이다.

27. 확률분포와 통계적 추정 정답 16

A 도시에서 B 도시로 운행하는 고속버스들의 소요시간을 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(m-5\le \overline{X}\le m+5)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{m-5-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\le Z\le \frac{m+5-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.9544$에서

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.4772$

표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=2$

$\sqrt{n}=4$

$\therefore\ n=16$

28. 수열 정답 371

각 반원의 수를 군으로 하는 군수열을 생각하면

$(1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9),\ \cdots$

이때, n군의 첫째항을 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은

$1,\ 2,\ 5,\ 10,\ \cdots$이므로

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$$1+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)$$

$$=n\ \ -2n+2$$

각 군의 항의 개수가 $1,\ 3,\ 5,\ \cdots$이므로 n군의 항의 개수는 $2n-1$이며, 각 군의 수들은 공차가 1인 등차수열을 이룬다.

구하는 수는 20군에 있고 20군에는 총 39개의 수가 있다.
직선 $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로 $\frac{39}{4}=9.75$에서 어두운 부분에 들어갈 수는 20군의 10번째 수이다.

20군의 첫째항은

$$20^2-2\cdot20+2=400-40+2=362$$

이므로 20군의 10번째 수는 362보다 9가 큰 371이다.

29. 확률 (정답 323)

(규칙1)로 a번, (규칙2)로 b번 이동하였다고 하면

$$a+b=5$$

(규칙1)로 a번 이동하면 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 이동하고,

(규칙2)로 b번 이동하면 x축의 방향으로 $2b$만큼, y축의 방향으로 b만큼 이동한다.

따라서 원점 O에서 출발하여 (규칙1)로 a번, (규칙2)로 b번 이동하면 점 $(a+2b,\ 2a+b)$에 도달한다.

따라서 $a+2b=8,\ 2a+b=7$에서

$$a=2,\ b=3$$

(규칙1) 2번과 (규칙2) 3번을 배열하는 방법의 수는

$$\frac{5!}{2!3!}$$

(규칙1), (규칙2)를 따라 이동할 확률은 각각

$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$이므로 구하는 확률은

$$\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$$

$$\therefore\ p=243,\ q=80$$

$$\therefore\ p+q=323$$

30. 수열 (정답 171)

$1\le x<10$이므로 $[x]=k\,(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 9)$라 하면

$$k\le x<k+1$$

$$k^3\le x^3<(k+1)^3$$

$$k^3\le x^3<k^3+3k^2+3k+1$$

$$\frac{k^3}{k}\le\frac{x^3}{k}<\frac{k^3+3k^2+3k+1}{k}$$

$$k^2\le\frac{x^3}{k}<k^2+3k+3+\frac{1}{k}$$

따라서 $\frac{x^3}{[x]}$, 즉 $\frac{x^3}{k}$이 자연수이려면

$$\frac{x^3}{k}=k^2,\ k^2+1,\ \cdots,\ k^2+3k+3$$

각각을 만족하는 실수 x는 한 개씩이므로 x의 개수는

$$k^2+3k+3-(k^2-1)=3k+4$$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9$이므로 구하는 x의 개수는

$$\sum_{k=1}^{9}(3k+4)=3\cdot\frac{9\cdot10}{2}+4\cdot9=171$$