2010학년도 공군사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시

수리 영역

자 연	성명		수험번호								1

○ 먼저 문제지에 성명과 수험 번호를 기입하시오.

○ 답안지에 성명과 수험 번호를 정확하게 표기하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 이 포함된 경우에는 0 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오. (각 물음의 끝에 표시된 배점을 참조하시오.)

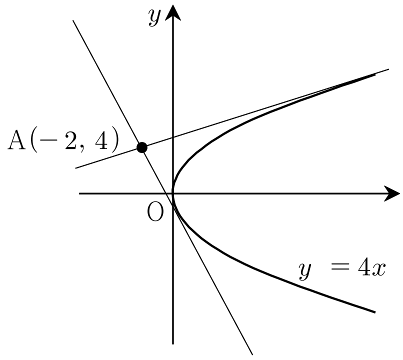
1. $-16 + \sqrt[3]{250}\,)$ 의 값은? [2점]

① 48 ② 54 ③ 72 ④ 96 ⑤ 108

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

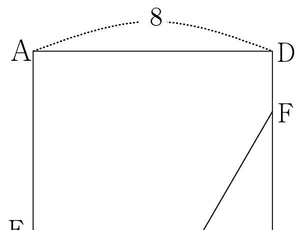
3. 점 A $-2, 4$)에서 포물선 $y\ =4x$에 그은 두 접선의 기울기의 곱은? [2점]



① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{3}{8}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{5}{8}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

4. 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에서 그림과 같이 변 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 E, 변 CD를 3 : 1로 내분하는 점을 F라 하자. 변 BC 위의 양 끝점이 아닌 점 P에 대하여 두 직각삼각형 EBP, PCF의 둘레의 길이의 합이 28일 때, 10BP의 값은? [3점]



① 45 ② 48 ③ 51

④ 53 ⑤ 55

5. 다음은 가 자연수일 때 $n \geq r$인 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$ {}^{n}_{=r}\ {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} $$

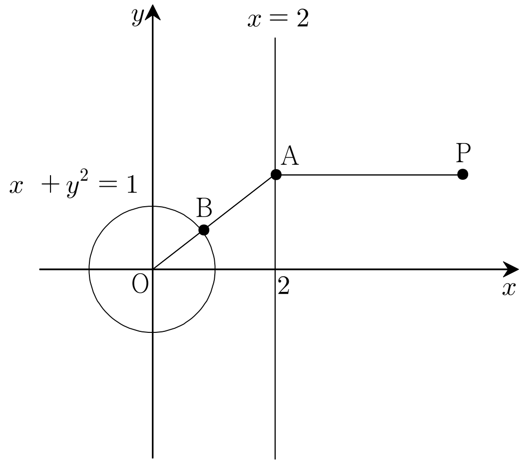
이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

> [증명]
>
> (1) $n=r$일 때
>
> (좌변)$= {}_{r}\mathrm{C}_{r} = \boxed{\text{(가)}}$, (우변)$= {}_{r+1}\mathrm{C}_{r+1} = \boxed{\text{(가)}}$
>
> 이므로 주어진 등식이 성립한다.
>
> (2) $n=k$ $(k \geq r)$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
>
> $\sum_{i=r}^{k} {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$ 이다.
>
> $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.
>
> $$\sum_{i=r}^{k+1} {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} + \boxed{\text{(나)}}$$
>
> $$= \boxed{\text{(다)}} + \frac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!} = \frac{(k+2)!}{(k+1-r)!\,(r+1)!}$$
>
> $$= {}_{k+2}\mathrm{C}_{r+1}$$
>
> 따라서 $n=k+1$일 때 주어진 등식이 성립한다.
>
> (1), (2)에 의하여 $n \geq r$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	1	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$	$\frac{(k+1)!}{(k-r)!\,(r+1)!}$
②	1	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$	$\frac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$
③	1	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$	$\frac{(k+1)!}{(k-r)!\,(r+1)!}$
④	r	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$	$\frac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$
⑤	r	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$	$\frac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$

6. 좌표평면에서 그림과 같이 직선 $=2$ 위를 움직이는 점 A에 대하여 선분 OA가 원 $x\ +y^2=1$과 만나는 점을 B라 하자. 평면 위의 점 P가 다음 조건을 모두 만족시키며 움직이면 점 P가 나타내는 도형은 어떤 쌍곡선의 일부가 된다.



(가) $\mathrm{AP}=2\overline{\mathrm{AB}}$
(나) 직선 AP는 직선 $x=2$와 수직이다.
(다) 점 P의 x좌표는 2보다 크다.

이때, 이 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 점근선의 방정식은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $y=\frac{1}{3}x$ ② $y=\frac{2}{3}x$ ③ $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$
④ $y=\frac{1}{2}x$ ⑤ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

7. 두 수열 $a_n\}$, $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\log_2(n!)$$
$$b_n=a_{n+1}-a_n$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $b_{15}=4$
ㄴ. $9<\sum_{k=1}^{5} b_k<10$
ㄷ. n이 짝수일 때 b_n의 값은 무리수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 어느 보안 전문회사에서 바이러스 감염 여부를 진단하는 프로그램을 개발하였다. 그 진단 프로그램은 바이러스에 감염된 컴퓨터를 감염되었다고 진단할 확률이 4 %이고, 바이러스에 감염되지 않은 컴퓨터를 감염되지 않았다고 진단할 확률이 98 %이다. 실제로 바이러스에 감염된 컴퓨터 200 대와 바이러스에 감염되지 않은 컴퓨터 300 대에 대해 이 진단 프로그램으로 바이러스 감염 여부를 검사하려고 한다. 이 500 대의 컴퓨터 중 임의로 한 대를 택하여 이 진단 프로그램으로 감염 여부를 검사하였더니 바이러스에 감염되었다고 진단하였을 때, 이 컴퓨터가 실제로 감염된 컴퓨터일 확률은? [3점]

① $\frac{94}{97}$ ② $\frac{92}{97}$ ③ $\frac{90}{97}$

④ $\frac{47}{49}$ ⑤ $\frac{47}{50}$

9. 다음은 어느 보석 상점에서 판매하는 다이아몬드 가격표의 일부이다.

무게(캐럿)	가격(만원)
0.3	70
0.6	210

이 상점에서 판매하는 다이아몬드의 무게가 x캐럿일 때, 그 가격 $f(x)$만원은

$$f(x)=a(b\ \ -1)\ (\text{단, } a>0,\ b>1\text{인 상수})$$

로 주어진다고 한다. 이때, 이 상점에서 판매하는 무게가 1.5 캐럿인 다이아몬드의 가격은? [3점]

① 1875 만원 ② 1965 만원 ③ 1980 만원

④ 2170 만원 ⑤ 2250 만원

10. 009년 8월 초 판매 가격이 200만원인 노트북컴퓨터의 판매 가격은 매월 초 직전 달보다 1% 씩 계속 인하된다고 하자. 어느 은행에 2009년 8월 초부터 2010년 7월 초까지 매월 초마다 일정한 금액을 적립하여, 12개월 후인 2010년 8월 초에 원금과 이자를 모두 찾아 바로 노트북 컴퓨터를 구입하기로 하였다. 이 은행은 월이율이 1%이고 매월마다 복리로 계산한다고 할 때, 매월 초에 적립해야 할 최소금액은? (단, $0.99^{2}=0.89$, $1.01^{12}=1.13$으로 계산하고 천원 단위에서 반올림하며, 세금은 고려하지 않는다.) [3점]

① 11만원 ② 12만원 ③ 13만원
④ 14만원 ⑤ 15만원

11. 임의의 실수 x에 대하여

$$x=n+\alpha \ (n\text{은 정수, } 0 \leqq \alpha < 1)$$

일 때, n을 x의 정수부분, α를 x의 소수부분이라 하자.

$10<a<b<50$인 두 자연수 a, b에 대하여 $\log_2 a$의 소수부분과 $\log_2 b$의 소수부분이 같을 때 순서쌍 (a, b)의 개수는? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

12. 파장이 이고 강도가 인 광선이 어떤 용액을 통과하면 이 용액에 광선이 흡수되어 입사광의 강도가 감소된다. 광선이 농도가 c인 용액을 통과한 거리가 일 때의 광선의 강도를 I라 하면 I와 입사광의 강도 I_0 사이에는

$$= I \times 10^{-acd}, \quad a = \frac{4\pi k}{\lambda} \text{ (단, } k\text{는 소멸계수)}$$

인 관계가 성립하고, 이 용액의 흡광도 A를

$$A = \log I_0 - \log I$$

로 정의한다.

파장이 λ_1인 광선이 농도가 0이 아닌 어떤 용액을 통과한 거리가 d_1일 때의 흡광도를 A_1, 파장이 $2\lambda_1$인 광선이 동일한 농도의 이 용액을 통과한 거리가 $4d_1$일 때의 흡광도를 A_2라 하자.

이때, 소멸계수 k가 일정하다고 할 때 $\frac{A_2}{A_1}$의 값은? (단, $\lambda_1 d_1 \neq 0$이다.) [3점]

① 8 ② 2 ③ 1

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

13. 폐구간 $[0, 1]$에서 $0 < f(x) < 1$을 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $f(a) = a$인 실수 a가 개구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. $f'(b) < 1$인 실수 b가 개구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. 개구간 $(0, 1)$의 모든 x에 대하여 $\int_{0}^{x} f(t)dt < x$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 다음은 서로 다른 두 점에서 만나는 두 곡선 $= x$ 과 $y = ax^2 + bx + c$에 대하여 $d = b^2 - 4c(a-1)$이라 하고, 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 라 할 때

$$S = \frac{d \quad d}{6(a-1)^2}$$

임을 증명하는 과정이다. (단, $a \neq 0$이고 a, b, c는 실수)

[증명]

두 곡선 $y = x^2$과 $y = ax^2 + bx + c$가 서로 다른 두 점에서 만나므로

이차방정식 $(a-1)x^2 + bx + c = 0$은 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$를 갖는다.

따라서 $a \neq 1$, $d > 0$이고

$\beta - \alpha =$ $\boxed{\text{(가)}}$ ·········㉠

그런데 $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{}}\ (a-1)x^2 + bx + c\}\, dx$

$= \boxed{\text{(나)}}\ ) \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\, dx$

$= \boxed{\text{(다)}}$ ·········㉡

따라서 ㉠과 ㉡에 의해 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S = \left| \boxed{\text{(다)}} \right| = \frac{d\sqrt{d}}{6(a-1)^2}$$

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{\sqrt{d}}{\lvert a-1 \rvert}$	$1-a$	$\frac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3$
②	$\frac{\sqrt{d}}{\lvert a-1 \rvert}$	$a-1$	$\frac{a-1}{6}(\beta-\alpha)^3$
③	$\frac{\sqrt{d}}{a-1}$	$1-a$	$\frac{a-1}{6}(\beta-\alpha)^3$
④	$\frac{\sqrt{d}}{\lvert a-1 \rvert}$	$a-1$	$\frac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3$
⑤	$\frac{\sqrt{d}}{a-1}$	$a-1$	$\frac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3$

15. , y에 대한 연립방정식 $\begin{matrix} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{matrix}$에서 행렬 , B를 $A=\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\Big)$, $B=\begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}$라 하자.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c, d, p, q는 모두 0이 아닌 상수) [3점]

<보 기>

ㄱ. A의 역행렬이 존재하면 연립방정식은 오직 한 쌍의 해를 갖는다.

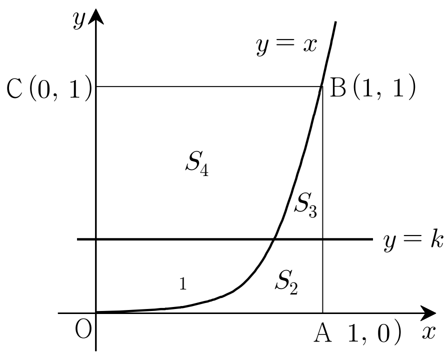
ㄴ. A, B의 역행렬이 모두 존재하지 않으면 연립방정식의 해는 무수히 많다.

ㄷ. A의 역행렬이 존재할 때, 실수 k , k_2에 대하여

$k_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이면 $k_1=k_2=0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 좌표평면 위에 네 점 O$(0, 0)$, A$(1, 0)$, B$(1, 1)$, C$(0, 1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 곡선 $y=x^4$과 직선 $y=k$ $(0<k<1)$에 의해 정사각형 OABC를 네 영역으로 나눌 때, 그림과 같이 네 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 하자. 이때, $|S_1-S_3|+|S_2-S_4|$의 최솟값은? [4점]



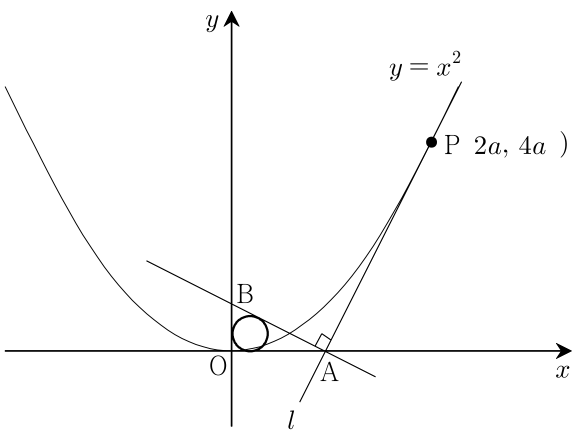
① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

17. 좌표공간에서 두 점 A 4, 0, 0), B(−4, 0, 0)과 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$라 할 때, 다음 조건을 모두 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

(가) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$
(나) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=16$

① $2\ \ 2\pi$ ② $2\sqrt{3}\pi$ ③ 4π
④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ $4\sqrt{3}\pi$

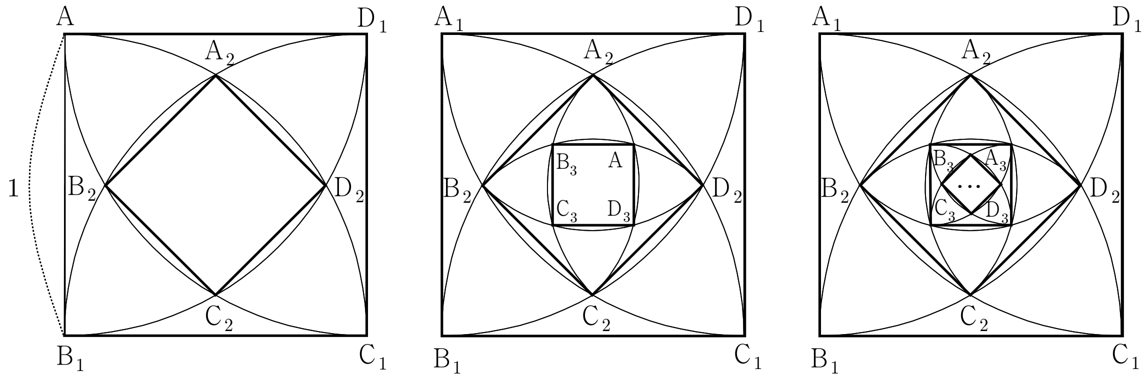
18. 그림과 같이 곡선 $y=x$ 위의 점 $P(2a, 4a^2)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 접선 l에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(a)$라 할 때, $\lim_{a\to\infty} r(a)$의 값은? (단, $a>0$, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{3}{16}$

19. [그림]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 A $B_1C_1D_1$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 A_1B_1인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 하자. 또 [그림2]와 같이 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_2B_2}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_3, B_3, C_3, D_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 모든 자연수 에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 A_nB_n인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 $_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

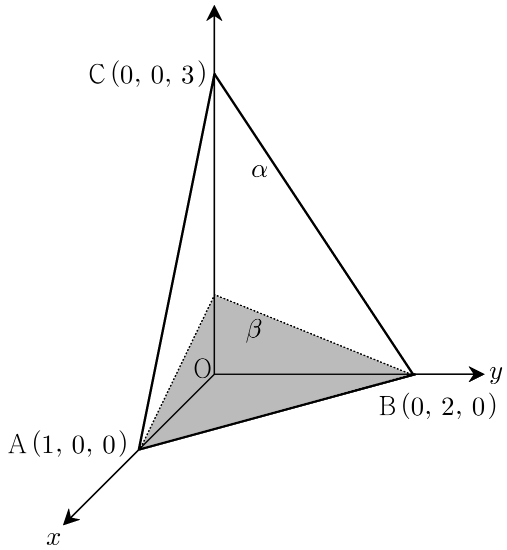


[그림1] [그림2]

① $\frac{1+\ \ 3}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$

20. 좌표공간에서 세 점 $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$을 지나는 평면을 α라 하자. 그림과 같이 평면 α와 xy평면의 이면각 중에서 예각인 것을 이등분하면서 선분 AB를 포함하는 평면을 β라 할 때, 평면 β가 z축과 만나는 점의 z좌표는? [4점]



① $\frac{2}{3}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{8}{9}$　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{4}{3}$

21. 어느 자영업자의 하루 매출액은 평균이 30만원이고 표준편차가 4만원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 자영업자는 하루 매출액이 31만원 이상일 때마다 1000원씩을 자선단체에 기부하고 31만원 미만일 때는 기부를 하지 않는다고 한다. 이와 같은 추세가 계속된다고 할 때, 600일 동안 영업하여 기부할 총 금액이 222000원 이상이 될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

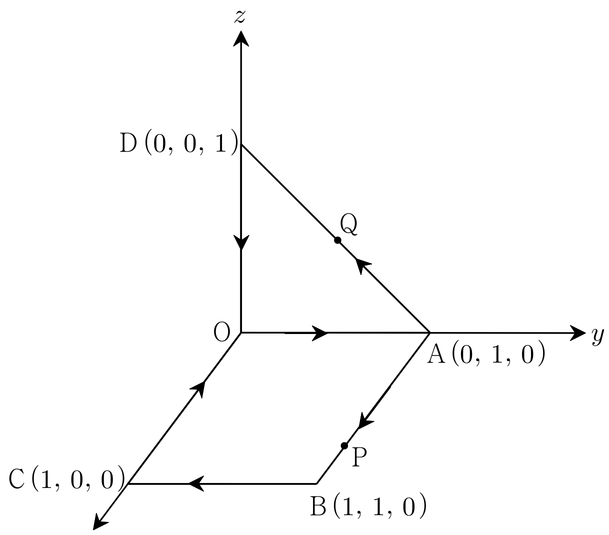
[표준정규분포표]

	$P(0 \leq \quad \leq z)$
0.25	0.10
0.50	0.19
1.00	0.34
1.50	0.43

① 0.69　② 0.84　③ 0.90　④ 0.93　⑤ 0.98

22. 좌표공간에 네 점 A 0, 1, 0), B(1, 1, 0), C(1, 0, 0), D(0, 0, 1)이 있다. 그림과 같이 점 P는 원점 O에서 출발하여 사각형 OABC의 둘레를 O→A→B→C→O→A→B→⋯ 의 방향으로 움직이며, 점 Q는 원점 O에서 출발하여 삼각형 OAD의 둘레를 O→A→D→O→A→D→⋯ 의 방향으로 움직인다.

두 점 P, Q가 원점 O에서 동시에 출발하여 각각 매초 1의 일정한 속력으로 움직인다고 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. 두 점 P, Q가 출발 후 원점에서 다시 만나는 경우는 없다.

ㄴ. 출발 후 4초가 되는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는 $\frac{2}{2}$ 이다.

ㄷ. 출발 후 2초가 되는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는 $\sqrt{2}$ 이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

23. 최대공약수가 !, 최소공배수가 $13!$이 되는 두 자연수 k, n ($k \leq n$)의 순서쌍 (k, n)의 개수는? [4점]

① 25 ② 27 ③ 32
④ 36 ⑤ 49

24. 다음 등식을 만족시키는 세 실수 a, b, c가 있다.

$$\left.\frac{1}{3}\right) = 2a, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{2b} = b, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{2c} = c$$

이때, 세 실수 a, b, c의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]

① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < a < c$
④ $b < c < a$ ⑤ $c < a < b$

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 다음 세 조건을 모두 만족시키는 두 이차정사각행렬 , B가 있다.

(가) $A \quad B = \left. \begin{matrix} 2 & 6 \\ x & 12 \end{matrix} \right)$
(나) $A - B = \begin{pmatrix} 6 & y \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$
(다) $A \quad - B^2 = AB - BA$

이때, 두 실수 x, y의 곱 xy의 값을 구하시오. [3점]

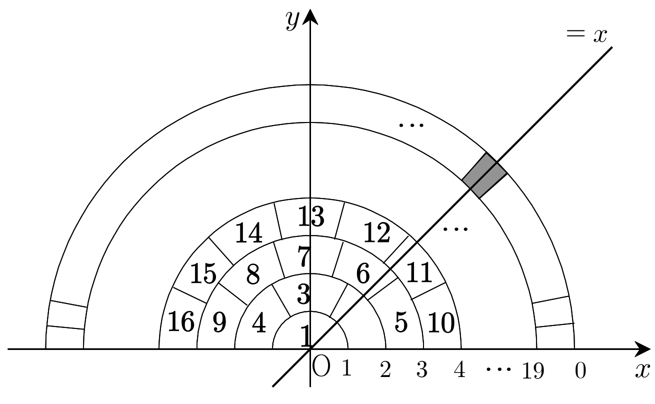
26. 다음 세 조건을 모두 만족시키는 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 있다.

(가) $-1 \leq x \leq 1$일 때, $f(x) = 3x^2$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x) = f(1+x)$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$

이때, $0 < x < 10$에서 함수 $y = \quad f(x)]$의 불연속점의 개수를 구하시오.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

27. 차다항식 (x)에 대하여, $P(x)$를 $(x-1)$으로 나누면 나머지가 8이고, $P(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누면 나머지가 -8일 때, $P(2)$의 값을 구하시오. [3점]

28. 좌표평면 위에 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 20 이하의 자연수인 반원이 20개 있다. $1 \leqq k \leqq 19$인 모든 자연수 k에 대하여 반지름의 길이가 k인 반원과 반지름의 길이가 $k+1$인 반원 사이의 영역을 $2k+1$등분한 다음, 각 부분에 시계 바늘이 도는 방향과 반대방향으로 자연수를 차례대로 나열하였다. 이때, 직선 $y=x$와 맨 바깥쪽 영역이 만나는 어두운 부분에 들어간 수를 구하시오. (단, 반지름의 길이가 1인 반원의 내부에는 을 나열한다.) [4점]



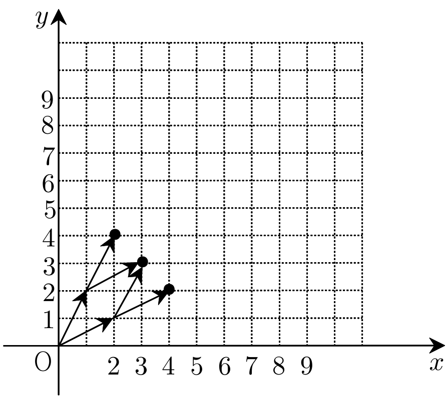
29. 좌표평면 위에서 점 P는 한 번의 이동으로 다음의 (규칙) 또는 (규칙2)를 따라 이동한다.

(규칙1) x축의 양의 방향으로 1만큼, y축의 양의 방향으로 2만큼 이동한다.

(규칙2) x축의 양의 방향으로 2만큼, y축의 양의 방향으로 1만큼 이동한다.

예를 들어, 원점 O에 있는 점 P가 두 번의 이동으로 도달할 수 있는 곳을 표시하면 그림과 같다. 점 P가 (규칙1)을 따라 이동할 확률은 $\frac{1}{3}$이고 (규칙2)를 따라 이동할 확률은 $\frac{2}{3}$일 때, 위와 같은 규칙으로 점 P가 원점 O에서부터 다섯 번의 이동으로 점 $(8, 7)$에 도달할 확률은 $\frac{q}{p}$이다.

이때, 서로소인 두 자연수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오. (단, 매번 이동하는 사건은 서로 독립이다.) [4점]



30. 구 $(x-3) + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 27$과 그 내부를 포함하는 입체를 xy평면으로 잘라 구의 중심이 포함된 부분을 남기고 나머지 부분을 버린다. 남아있는 부분을 다시 yz평면으로 잘라 구의 중심이 포함된 부분을 남기고 나머지 부분을 버린다. 이때, 마지막에 남아있는 부분에서 두 평면에 의해 잘린 단면의 넓이는 $a\pi+b$이다. 두 자연수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]