수리 영역(이과)

1. ②	2. ②	3. ③	4. ②	5. ①
6. ④	7. ⑤	8. ①	9. ④	10. ④
11. ②	12. ②	13. ⑤	14. ⑤	15. ⑤
16. ③	17. ⑤	18. ③	19. ①	20. ①
21. ④	22. ④	23. ③	24. ①	25. 48
26. 25	27. 46	28. 371	29. 323	30. 45

1. 지수와 로그 정답 ②

$16=(-2)\ \cdot 2,\ 250=5^3\cdot 2$이므로

$$\begin{aligned}(\ \ -16+\sqrt[3]{250}\,)^3 &= (\ ^3\ (-2)^3\cdot 2+\sqrt[3]{5^3\cdot 2}\,)^3\\ &=(-2\cdot\sqrt[3]{2}+5\cdot\sqrt[3]{2})^3\\ &=(3\cdot\sqrt[3]{2})^3\\ &=27\cdot 2\\ &=54\end{aligned}$$

2. 함수의 극한과 연속성 정답 ②

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{6-x}-2)(\sqrt{6-x}+2)(\sqrt{3-x}+1)}{(\sqrt{3-x}-1)(\sqrt{3-x}+1)(\sqrt{6-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(6-x-4)(\sqrt{3-x}+1)}{(3-x-1)(\sqrt{6-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(\sqrt{3-x}+1)}{(2-x)(\sqrt{6-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{3-2}+1}{\sqrt{6-2}+2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

3. 이차곡선 정답 ③

포물선 $y^2=4px$에 접하고, 기울기가 m인 직선의 방정은 $y=mx+\dfrac{p}{m}$ 이다.

$y^2=4x=4\cdot 1\cdot x$에서 초점 F의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 포물선 $y^2=4x$에 접하고, 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{1}{m}$이다.

이 접선이 점 $A(-2,\ 4)$를 지나므로

$$4=-2m+\frac{1}{m}$$

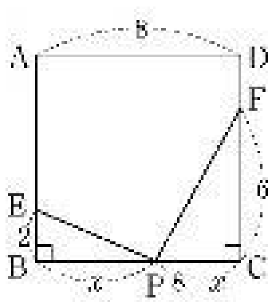
$$4m=-2m^2+1$$

$$2m^2+4m-1=0$$

이 이차방정식의 두 근이 두 접선의 기울기이므로 두 근의 곱이 두 접선의 기울기의 곱이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 두 접선의 기울기의 곱은 $-\dfrac{1}{2}$이다.

4. 방정식과 부등식 정답 ②



$$\mathrm{BE}=8\times\frac{1}{4}=2$$

$$\mathrm{CF}=8\times\frac{3}{4}=6$$

이고, BP $\quad x(x \neq 0)$라 하면

$\overline{\mathrm{PC}} = 8 - x$

$\overline{\mathrm{EP}} = \quad 2 \quad + x^2 = \sqrt{x^2+4}$

$\mathrm{FP} = \sqrt{6^2 + (8-x)^2} = \sqrt{x^2 - 16x + 100}$

삼각형 EBP 와 삼각형 PCF 의 둘레의 길이의 합이 28 이므로

$2 + x + \sqrt{x^2+4} + (8-x) + 6 + \sqrt{x^2 - 16x + 100}$

$= 28$

$16 + \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-16x+100} = 28$

$12 - \sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2-16x+100}$

양변을 제곱하면

$144 - 24\sqrt{x^2+4} + x^2 + 4 = x^2 - 16x + 100$

$16x + 48 = 24\sqrt{x^2+4}$, $2x + 6 = 3\sqrt{x^2+4}$

다시 양변을 제곱하면

$4x^2 + 24x + 36 = 9x^2 + 36$

$5x^2 - 24x = 0$, $x(5x - 24) = 0$

$\therefore\ x = 0$ 또는 $x = \dfrac{24}{5}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BP}} = \dfrac{24}{5}\ (\because\ x \neq 0)$

$\therefore\ 10\overline{\mathrm{BP}} = 48$

5. 순열과 조합

정답 ①

(가) ${}_{r}\mathrm{C}_{r} = {}_{r}\mathrm{C}_{0} = \boxed{1}$

${}_{r+1}\mathrm{C}_{r+1} = {}_{r}\mathrm{C}_{0} = \boxed{1}$

(나) $\overset{k+1}{\underset{i=r}{\,}}\ {}_{i}\mathrm{C}_{r} = \sum_{i=r}^{k} {}_{i}\mathrm{C}_{r} + {}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$

$= {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} + \boxed{{}_{k+1}\mathrm{C}_{r}}$

($\because\ n = k$일 때, $\sum_{i=r}^{k} {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$이라 가정)

(다) ${}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} + {}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$

$= \dfrac{(k+1)!}{k+1-(r+1)\}!\,(r+1)!} + \dfrac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$

$= \boxed{\dfrac{(k+1)!}{(k-r)!\,(r+1)!}} + \dfrac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$

6. 이차곡선

정답 ④

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

(나)에 의해 $\mathrm{A}(2,\ y)$

(다)에 의해 $\mathrm{AP} = x - 2$

$\overline{\mathrm{AB}} = \mathrm{OA} - \overline{\mathrm{OB}}$

$= \sqrt{2^2 + y^2} - 1$

(가)에서 $\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로

$x - 2 = 2(\sqrt{4 + y^2} - 1)$

$x - 2 = 2\sqrt{4+y^2} - 2$

$x = 2\sqrt{4+y^2}$

양변을 제곱하면

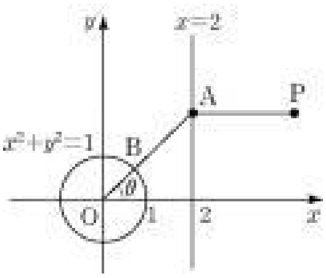
$x^2 = 4(4 + y^2)$

$x^2 = 4y^2 + 16$

$\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

따라서 점 P 의 자취는 쌍곡선 $\frac{x^2}{}-\frac{y^2}{2^2}=1$의 일부이고, 이 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{2}{4}x$, 즉 $y=\pm\frac{1}{2}x$ 이므로 기울기가 양수인 점근선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이다.

【다른 풀이】



OA 와 x축의 양의 방향이 이루는 각을 θ, 점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}=\frac{2}{\cos\theta}$ $\because \cos\theta=\frac{2}{\mathrm{OA}}\Big)$, $\mathrm{OB}=1$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OB}}=\frac{2}{\cos\theta}-1$

(가)에서 $\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$x-2=2\ \frac{2}{\cos\theta}-1\Big)$

$\therefore\ x=2+2\left(\frac{2}{\cos\theta}-1\right)=\frac{4}{\cos\theta}=4\sec\theta,\quad y=2\tan\theta$

즉, $\sec\theta=\frac{x}{4}$, $\tan\theta=\frac{y}{2}$이고, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

이므로

$1+\frac{y^2}{4}=\frac{x^2}{16}$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

따라서 구하는 점근선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이다.

7. 수열 정답 ⑤

$a_n=\log_2(n!)$이므로

$b_n=a_{n+1}-a_n$

$=\log_2\ (n+1)!\}-\log_2(n!)$

$=\log_2\frac{(n+1)!}{n!}=\log_2(n+1)$

㉠ $b_{15}=\log_2(15+1)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$ (참)

㉡ $\sum_{k=1}^{5} b_k=\log_2 2+\log_2 3+\log_2 4+\log_2 5+\log_2 6$

$=\log_2(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)=\log_2 720$

$2^9<720<2^{10}$이므로

$\log_2 2^9<\log_2 720=\sum_{k=1}^{5} b_k<\log_2 2^{10}$

$\therefore\ 9<\sum_{k=1}^{5} b_k<10$ (참)

㉢ n이 짝수이면 $b_n=\log_2(n+1)$에서 $n+1$이 홀수이므로 b_n은 유리수가 될 수 없다.

즉, 무리수이다.

(증명)

$n=2k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$라 하면

$b_n=b_{2k}=\log_2(2k+1)$

b_n을 유리수라 가정하면

$b_n=\log_2(2k+1)=\frac{q}{p}$ ($p,\ q$는 서로소인 자연수)

로 놓을 수 있다.

$\log_2(2k+1)=\frac{q}{p}$에서

$2^{\frac{q}{p}}=2k+1,\ 2^q=(2k+1)^p$

이때, , q, k는 자연수이므로 2 은 짝수,

$(2k+1)^p$은 홀수가 되어 이 식을 만족시키는 p, q가 존재하지 않는다.

즉, 가정에 모순이므로 b_n은 무리수이다.

따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 옳다.

8. 확률 정답 ①

바이러스에 감염된 사건을 , 감염되었다고 진단하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이다.

(ⅰ) 바이러스에 감염된 컴퓨터를

감염되었다고 진단할 확률이 94%이므로

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{2}{5}\times 0.94$$

감염되지 않았다고 진단할 확률이 6%이므로

$$\mathrm{P}(A\cap E\quad)=\frac{2}{5}\times 0.06$$

(ⅱ) 바이러스에 감염되지 않은 컴퓨터를

감염되었다고 진단할 확률이 2%이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{3}{5}\times 0.02$$

감염되지 않았다고 진단할 확률이 98%이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap E^C)=\frac{3}{5}\times 0.98$$

$\mathrm{P}(A|E)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}$에서

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$$

$$=\frac{2}{5}\times 0.94+\frac{3}{5}\times 0.02$$

이므로

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}$$

$$=\frac{\frac{2}{5}\times 0.94}{\frac{2}{5}\times 0.94+\frac{3}{5}\times 0.02}$$

$$=\frac{188}{194}=\frac{94}{97}$$

9. 지수함수와 로그함수 정답 ④

주어진 가격표에서

$$f(0.3)=a(b^{0.3}-1)=70 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f(0.6)=a(b^{0.6}-1)=210 \quad \cdots\cdots ㉡$$

÷㉡을 하면

$$\frac{a(b^{0.3}-1)}{a(b^{0.6}-1)}=\frac{70}{210}$$

$$\frac{b^{0.3}-1}{b^{0.6}-1}=\frac{1}{3}$$

$$3(b^{0.3}-1)=b^{0.6}-1$$

$$3b^{0.3}-3=(b^{0.3})^2-1$$

$$(b^{0.3})^2-3b^{0.3}+2=0$$

$$(b^{0.3}-1)(b^{0.3}-2)=0$$

$$b^{0.3}=2 \ (\because\ b>1) \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉠에 대입하면 $a=70$

$$\therefore\ f(1.5)=70(b^{1.5}-1)$$

$$=70\ (b^{0.3})^5-1\}$$

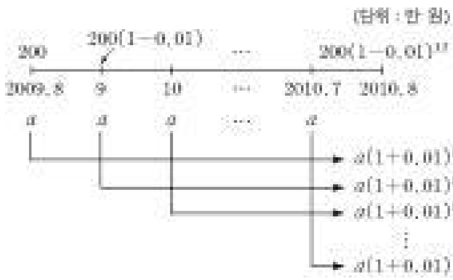
$$=70(2^5-1)\ (\because ㉢)$$

$$=2170(\text{만 원})$$

10. 수열

정답 ④

매월 초에   만 원을 적립한다고 하면



2009년 8월 초 200만 원인 노트북컴퓨터의 2010년 8월 초 판매 가격은

$200\times(1-0.01)^{\ 2}=200\times(0.99)^{12}=200\times0.89$

$=178$(만 원) ⋯⋯ ㉠

2009년 8월 초부터 a만 원씩 12개월 동안 적립한 금액의 원리합계는

$a(1.01)^{12}+a(1.01)^{11}+\cdots+a(1.01)$

$=\dfrac{a(1.01)\ (1.01)^{12}-1\}}{(1.01)-1}$

$=101a\{(1.01)^{12}-1\}$

$=101a(1.13-1)=13.13a$(만 원) ⋯⋯ ㉡

노트북컴퓨터를 구매하려면   ≤ ㉡이어야 하므로

$178\le13.13a$

$a\ge\dfrac{178}{13.13}=13.55\cdots\fallingdotseq14$(만 원)

따라서 적립해야 할 최소 금액은 14만 원이다.

11. 지수와 로그

정답 ②

$\log_2a$와 $\log_2b$의 소수 부분이 같으므로

$\log_2a=n_1+\alpha,\ \log_2b=n_2+\alpha$

($n_1,\ n_2$는 정수, $0\le\alpha<1$)

라 하면

$\log_2b-\log_2a=n_2-n_1=m$ (m은 정수)

$\log_2\dfrac{b}{a}=m$

$\dfrac{b}{a}=2^m$

$b=a\cdot2^m$

(i) $m=1$일 때, $b=2a$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(11,\ 22),\ (12,\ 24),\ \cdots,\ (24,\ 48)$의 14개

(ii) $m=2$일 때, $b=4a$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(11,\ 44),\ (12,\ 48)$의 2개

(iii) $m\ge3$일 때, $b\ge8a$이므로 $10<a<b<50$을 족하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$14+2=16$(개)이다.

12. 지수와 로그

정답 ②

$=\log I_0-\log I$에 $I=I_0\times10^{-acd}$을 대입하여 정리하면

$A=\log I_0-\log I$

$=\log I_0-\log(I_0\times10^{-acd})$

$=\log I_0-\log I_0-\log10^{-acd}$

$=-\log10^{-acd}$

$=acd$

$a=\dfrac{4\pi k}{\lambda}$를 대입하면 $A=\dfrac{4\pi k}{\lambda}cd$

이때, $A_1=\dfrac{4\pi k}{\lambda_1}cd_1$이므로

$$\frac{4\pi k}{2\lambda_1} c \cdot 4d_1 = 2 \cdot \frac{4\pi k}{\lambda_1} cd_1 = 2A_1$$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{2A_1}{A_1} = 2$$

13. 다항함수의 적분법 　정답 ⑤

㉠ $g(x) = f(x) - x$라 하면 폐구간 $[0,\ 1]$에서

$0 < f(x) < 1$이므로

$g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$

$g(1) = f(1) - 1 < 0$

따라서 중간값의 정리에 의해 방정식 $g(x) = 0$, 즉 $f(x) - x = 0$은 개구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 1개의 실근을 갖는다.

즉, $f(a) = a$인 실수 a가 개구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

㉡ $0 < f(0) < 1,\ 0 < f(1) < 1$에서

$f(1) - (0) < 1$이므로 $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} < 1$이다.

즉, 평균값의 정리에 의해 $f'(b) < 1$인 실수 b가 개구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

《참고》 평균값의 정리

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,(a < c < b)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

㉢ $0 < f(x) < 1$이므로 개구간 $(0,\ 1)$의 모든 x에 대해

$\int_0^x 0dt < \int_0^x f(t)dt < \int_0^x 1dt$가 성립한다.

이때, $\int_0^x 0dt = 0,\ \int_0^x 1dt = [t]_0^x = x$이므로

$0 < \int_0^x f(t)dt < x$

따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 옳다.

14. 다항함수의 적분법 　정답 ⑤

(가) 이차방정식 $(a-1)x^2 + bx + c = 0$의 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a-1},\ \alpha\beta = \frac{c}{a-1}$

$$\therefore\ (\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= \left(-\frac{b}{a-1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a-1}$$

$$= \frac{b^2}{(a-1)^2} - 4 \cdot \frac{c(a-1)}{(a-1)^2}$$

$$= \frac{b^2 - 4c(a-1)}{(a-1)^2}$$

$$= \frac{d}{(a-1)^2}$$

$$\therefore\ \beta - \alpha = \boxed{\frac{\sqrt{d}}{|a-1|}}\ (\because\ \beta - \alpha > 0)$$

(나) $(a-1)x^2 + bx + c = (a-1)(x-\alpha)(x-\beta)$ 이므로

$$\int_\alpha^\beta \{(a-1)x^2 + bx + c\}dx$$

$$= \int_\alpha^\beta (a-1)(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$= (\boxed{a-1})\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

(다) $(a-1)\quad {}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx \Big|$

$$=\left|(a-1)\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta)dx\right|$$

$$=\ (a-1)\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\alpha x^2-\frac{1}{2}\beta x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}\Bigg|$$

$$=\ (a-1)\left\{\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}\alpha(\beta^2-\alpha^2)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\beta(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)\right\}\Bigg|$$

$$=\left|(a-1)(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{3}\beta^2+\frac{1}{3}\alpha\beta+\frac{1}{3}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha\beta\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\alpha\beta+\alpha\beta\right)\right|$$

$$=\left|(a-1)(\beta-\alpha)\left(-\frac{1}{6}\beta^2+\frac{1}{3}\alpha\beta-\frac{1}{6}\alpha^2\right)\right|$$

$$=\left|(a-1)\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\right|$$

$$=\left|\boxed{\frac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3}\right|$$

15. 행렬

정답 ⑤

$$\begin{matrix} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

㉠ A의 역행렬이 존재하면

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$이므로

오직 한 쌍의 해를 갖는다. (참)

㉡ A의 역행렬이 존재하지 않으면

$ad-bc=0$이므로 $ad=bc$

$\therefore\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ …… ①

B의 역행렬이 존재하지 않으면

$aq-pc=0$이므로 $aq=pc$

$\therefore\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{p}{q}$ …… ②

①, ②에서 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}=\dfrac{p}{q}$이므로

주어진 연립방정식은 무수히 많은 해를 갖는다. (참)

㉢ A의 역행렬이 존재하므로

$ad-bc\neq 0$ …… ①

또, $k_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} k_1a+k_2b \\ k_1c+k_2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로

$k_1a=-k_2b,\ k_1c=-k_2d$ …… ②

$k_1\neq 0$ 또는 $k_2\neq 0$이라 가정하자.

(ⅰ) $k_1\neq 0$일 때, ②에서

$a=-\dfrac{k_2}{k_1}b,\ c=-\dfrac{k_2}{k_1}d$이므로

$ad-bc=-\dfrac{k_2}{k_1}bd+\dfrac{k_2}{k_1}bd=0$

이는 ①과 모순이다.

(ⅱ) $k_2\neq 0$일 때, ②에서

$b=-\dfrac{k_1}{k_2}a,\ d=-\dfrac{k_1}{k_2}c$이므로

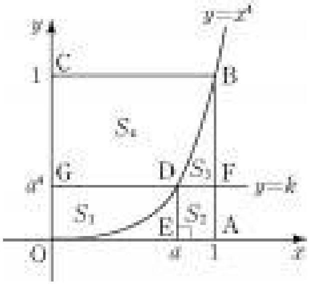
$ad-bc=-\dfrac{k_1}{k_2}ac+\dfrac{k_1}{k_2}ac=0$

이 또한 ①과 모순이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $k_1=k_2=0$이다. (참)

따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 옳다.

16. 다항함수의 적분법 정답 ③



곡선 $= x$ 과 직선 $y = k$의 교점을 $\mathrm{D}(a,\ a^4)$이라 하자.

(단, $a^4 = k$)

또, 점 D에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각

$\mathrm{E}(a,\ 0)$, $\mathrm{G}(0,\ a^4)$, 직선 $y = k$와 직선 $x = 1$의 교점을

$\mathrm{F}(1,\ a^4)$이라 하면

$$_1 = \quad \mathrm{OEDG} - \ {}_0^a x^4 dx = a \times a^4 - \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^a$$

$$= a^5 - \frac{a^5}{5} = \frac{4}{5}a^5$$

$$S_2 = \square\mathrm{OAFG} - S_1 = a^4 - \frac{4}{5}a^5$$

$$S_3 = \int_0^1 x^4 dx - S_2 = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 - \ a^4 - \frac{4}{5}a^5\Big)$$

$$= \frac{1}{5} - a^4 + \frac{4}{5}a^5$$

$$S_4 = \square\mathrm{CGFB} - S_3 = (1 - a^4) - \left(\frac{1}{5} - a^4 + \frac{4}{5}a^5\right)$$

$$= 1 - a^4 - \frac{1}{5} + a^4 - \frac{4}{5}a^5$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{4}{5}a^5$$

$$\therefore\ |S_1 - S_3| + |S_2 - S_4|$$

$$= \left|\frac{4}{5}a^5 - \frac{1}{5} + a^4 - \frac{4}{5}a^5\right|$$

$$+ \left|a^4 - \frac{4}{5}a^5 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5}a^5\right|$$

$$= \left|a^4 - \frac{1}{5}\right| + \left|a^4 - \frac{4}{5}\right|$$

$$= \left|k - \frac{1}{5}\right| + \left|k - \frac{4}{5}\right| (\because\ a^4 = k)$$

$f(k) = \left|k - \frac{1}{5}\right| + \left|k - \frac{4}{5}\right| (0 < k < 1)$이라 하면

(ⅰ) $0 < k < \frac{1}{5}$일 때,

$$f(k) = -\left(k - \frac{1}{5}\right) - \left(k - \frac{4}{5}\right) = -2k + 1$$

(ⅱ) $\frac{1}{5} \le k < \frac{4}{5}$일 때,

$$f(k) = \left(k - \frac{1}{5}\right) - \left(k - \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

(ⅲ) $\frac{4}{5} \le k < 1$일 때,

$$f(k) = \left(k - \frac{1}{5}\right) + \left(k - \frac{4}{5}\right) = 2k - 1$$

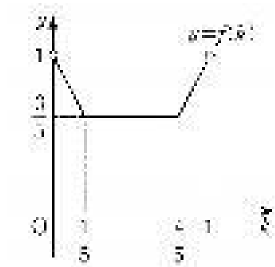
따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $y = f(k)$ $(0 < k < 1)$의

그래프는 오른쪽 그림과

같으므로 $f(k)$,

즉 $|S_1 - S_3| + |S_2 - S_4|$의

최솟값은 $\frac{3}{5}$이다.



17. 벡터 정답 ⑤

$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라 하면

(가) $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$에서

$$(x - 4,\ y,\ z) \cdot (x + 4,\ y,\ z) = 0$$

$$(x - 4)(x + 4) + y^2 + z^2 = 0$$

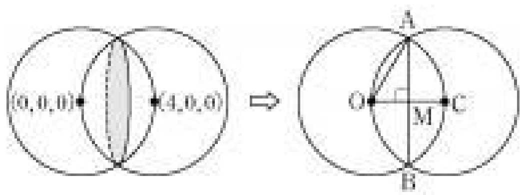
$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(나) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=16$에서

$(x-4,\ y,\ z)\cdot(x-4,\ y,\ z)=16$

$(x-4)\ +y^2+z^2=16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 점 P의 자취는 중심이 $(0,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 4인 구와 중심이 $(4,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 4인 구의 공통부분, 즉 원이다.



위의 그림에서 $\mathrm{OA}=4$이고, $\mathrm{OM}=2$이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\ \ 4^2-2^2=2\ \ 3$

따라서 점 P의 자취는 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이므로 점 P가 나타내는 도형의 길이는

$2\pi\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\pi$

18. 다항함수의 미분법 정답 ③

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 점 $\mathrm{P}(2a,\ 4a^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-4a^2=2\cdot 2a(x-2a)$

$\therefore\ y=4ax-4a^2$

이 직선의 x절편은 $0=4ax-4a^2$에서 a이므로 $\mathrm{A}(a,\ 0)$이다.

직선 PA에 수직이고 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{4a}(x-a)$

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{4a}x+\dfrac{1}{4}$

이 직선의 y절편은 $\dfrac{1}{4}$이므로 $\mathrm{B}\ 0,\ \dfrac{1}{4}\Big)$이다.

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\mathrm{OB}$

$=\dfrac{r(a)}{2}(\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{OB}})$이므로

$\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{r(a)}{2}\ a+\quad a^2+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{4}\Big)$

$r(a)=\dfrac{1}{4}a\times\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{4}+\sqrt{a^2+\dfrac{1}{16}}}$

$=\dfrac{a}{4a+1+\sqrt{16a^2+1}}$

$\therefore\ \lim\limits_{a\to\infty}r(a)=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{a}{4a+1+\sqrt{16a^2+1}}$

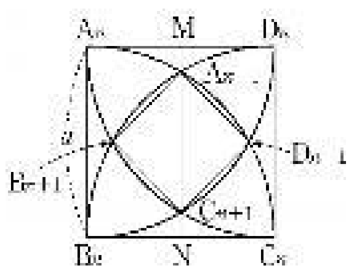
$=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{a}+\quad 16+\dfrac{1}{a^2}}$

$=\dfrac{1}{4+\sqrt{16}}=\dfrac{1}{8}$

19. 수열의 극한 정답 ①

사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 한 변의 길이를 a라 하고

사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 한 변의 길이를 구해 보자.



위의 그림과 같이 $A\ \ D_n$, B_nC_n의 중점을 각각 M, N이

라 하면 MN은 두 점 A_{n+1}, C_{n+1}을 지난다.

삼각형 $A_{n+1}B_nN$에서

$B_nA_{n+1}\quad a$, $B_nN = \frac{a}{2}$ 이므로

$A_{n+1}N = \quad a^2 - \ \frac{a}{2}\Big)^2 = \quad \frac{3}{4}a^2 = \quad \frac{3}{2}\ a$

$\therefore\ MA_{n+1} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}a = \ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)a$

$\therefore\ A_{n+1}C_{n+1}$

$= a - 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a \quad (\because\ \overline{MA_{n+1}} = C_{n+1}N)$

$= (\sqrt{3}-1)a$

즉, 사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 대각선

$A_{n+1}C_{n+1}$의 길이가 $(\sqrt{3}-1)a$이므로

사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 한 변의 길이는

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = \frac{(\sqrt{3}-1)a}{\sqrt{2}}$ 이다.

따라서 사각형 $A_nB_nC_nD_n$과

사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가

$1 : \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$ 이다.

따라서 수열 $\quad_n\}$은 첫째항 $S_1 = 1$이고,

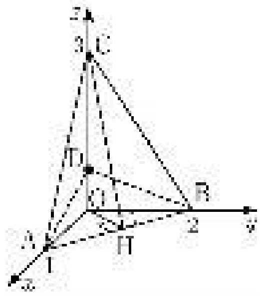
공비 $r = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$ 인

등비수열이므로

${}_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{1-(2-\sqrt{3})}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

20. 벡터 정답 ①

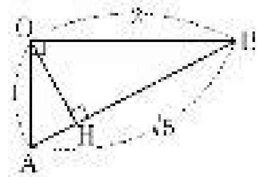


위의 그림과 같이 평면 β와 z축의 교점을 D라 하자.

또, 점 C에서 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼수선의 정리에 의해 $OH \perp \overline{AB}$이다.

삼각형 OAB에서



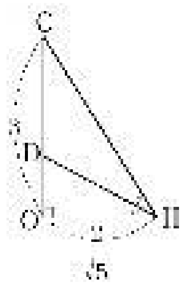
$\overline{OB} \times \overline{OA} = \overline{OH} \times \overline{AB}$

이므로

$2 \times 1 = \overline{OH} \times \sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{OH} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

삼각형 OHC에서



$\overline{CH} = \sqrt{9 + \frac{4}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$

이고, 각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{CH} : \overline{OH} = \overline{CD} : \overline{OD}$이므로

$\frac{7}{\sqrt{5}} : \frac{2}{\sqrt{5}} = \overline{CD} : \overline{OD}$

이때, $\overline{CD} = 3 - \overline{OD}$ 이므로

$7 : 2 = (3 - \overline{OD}) : \overline{OD}$

$7\overline{OD} = 6 - 2\overline{OD}$

$\therefore\ \overline{OD} = \frac{2}{3}$

따라서 평면 β가 z축과 만나는 점의 y좌표는 $\frac{2}{3}$이다.

21. 확률분포와 통계적 추정 　$\boxed{\text{정답 ④}}$

자영업자의 하루 매출액을 　라 하면 확률변수 X는

정규분포 N 30, 4)을 따른다. (단, 단위는 만 원)

따라서 하루 매출액이 31만 원 이상일 확률은

$$\mathrm{P}(X \geq 31) = \mathrm{P}\ Z \geq \frac{31-30}{4}\Big)$$

$$= \mathrm{P}(Z \geq 0.25)$$

$$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.25)$$

$$= 0.5 - 0.10 = 0.40$$

600일을 영업했을 때 기부한 날 수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(600,\ 0.4)$를 따르고, 600은 충분히 크므로 정규분포로 근사시킬 수 있다.

즉, $\mathrm{E}(Y) = 600 \times 0.4 = 240$,

$\mathrm{V}(Y) = 600 \times 0.4 \times 0.6 = 12^2$에서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 12^2)$을 따른다.

기부할 총 금액이 222000원 이상이려면 기부 횟수가 222회 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y \geq 222) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{222-240}{12}\right)$$

$$= \mathrm{P}(Z \geq -1.5)$$

$$= 0.5 + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 + 0.43$$

$$= 0.93$$

22. 공간도형과 공간좌표 　$\boxed{\text{정답 ④}}$

㉠ 매초 1의 일정한 속력으로 움직이므로 점 P는 $4m$초 후에, 점 Q는 $(2+\quad 2)n$초 후에 원점에 도달한다.

(단, m, n은 자연수)

$4m = (2+\sqrt{2})n$에서

$$m = \frac{2+\sqrt{2}}{4}n$$

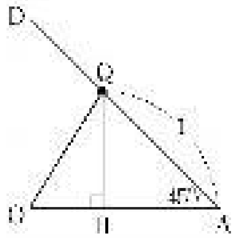
여기서 좌변 m은 자연수이고, 우변 $\frac{2+\sqrt{2}}{4}n$은 무리수이므로 위 식을 만족하는 자연수 m, n은 존재하지 않는다.

따라서 두 점 P, Q가 출발 후 원점에서 다시 만나는 경우는 없다. (참)

㉡ 출발 후 4초가 되는 순간 점 P는 원점에 있고, 점 Q는 OA 위에 있으므로 원점에서 $4-(2+\sqrt{2})$만큼 떨어진 곳에 위치한다. 따라서 출발 후 4초가 되는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는 $2-\sqrt{2}$이다. (거짓)

㉢ 출발 후 2초가 되는 순간 점 P는 점 $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$에 위치하고 점 Q는 점 A에서 점 D 방향으로 1만큼 떨어진 곳에 위치한다.

오른쪽 그림에서



$\angle \mathrm{OAD} = 45°$이므로

$$\overline{\mathrm{HA}} = \overline{\mathrm{QH}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 점 Q의 좌표는

$$0,\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\text{이므로}$$

$$\mathrm{PQ} = \quad 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{2}\ \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

23. 순열과 조합 　정답 ③

두 자연수 , n의 최대공약수가 $5!$이므로 $k=5!\times a$, $n=5!\times b$(a, b는 서로소인 자연수)로 놓으면 최소공배수가 $13!$이므로 $13!=5!\times ab$

$\therefore\ ab=13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6$

$\quad =2\ \ \times3^4\times5\times7\times11\times13$

a, b는 서로소이고 $k\le n$에서 $a\le b$이므로 2^7, 3^4, 5, 7, 11, 13을 2개 조로 분할하여 각각의 곱 중 작은 것을 a로, 큰 것을 b로 하면 된다. 0개와 6개, 1개와 5개, 2개와 4개, 3개와 3개로 나눌 수 있으므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$$({}_6\mathrm{C}_0\times{}_6\mathrm{C}_6)+({}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_5)+({}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_4)+\left({}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3\times\frac{1}{2!}\right)$$

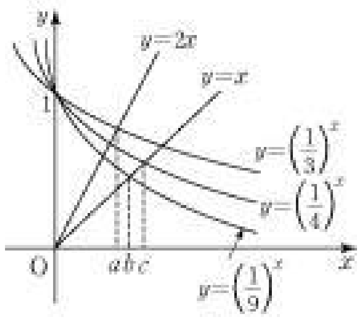
$=1+6+15+10=32$

따라서 순서쌍 $(k,\ n)$의 개수는 32(개)이다.

24. 지수함수와 로그함수 　정답 ①

$\left(\frac{1}{3}\right)^a=2a$이므로 a는 곡선 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$과 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표이다.

마찬가지로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2b}=b$에서 b는 곡선 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표이며, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2c}=c$에서 c는 곡선 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표이다. 그래프를 그려 보면 다음과 같다.



$\therefore\ \ a<b<c$

25. 행렬 　정답 48

(다)에서

$^2-B^2=AB-BA$

$\Leftrightarrow A^2-AB+BA-B^2=O$

$\Leftrightarrow (A+B)(A-B)=O$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2&6\\x&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&y\\-2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&2y-24\\6x-24&xy-48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$(4,\ 4)$성분을 비교하면 $xy-48=0$이므로 $xy=48$

《 다른 풀이 》

$(A+B)(A-B)=O$에서 영행렬이 아닌 두 행렬의 곱이 영행렬이므로 $A+B$, $A-B$는 영인자이다.

행렬 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$가 영인자이면 $ad-bc=0$이므로

$\begin{pmatrix}2&6\\x&12\end{pmatrix}$에서 $24-6x=0$

$\begin{pmatrix}6&y\\-2&-4\end{pmatrix}$에서 $-24+2y=0$

$\therefore\ \ x=4,\ \ y=12$

$\therefore\ \ xy=48$

26. 함수의 극한과 연속성 $\boxed{\text{정답 } 25}$

(나)에서 $(1-x)=f(1+x)$이므로

$1+x=t$라 하면 $f(2-t)=f(t)$

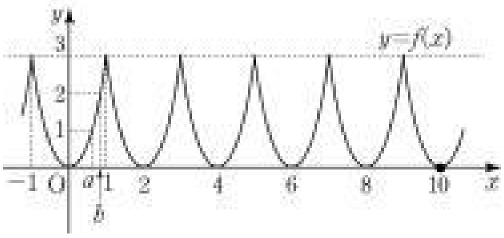
이때, (다)에서 $f(x)=f(-x)$이므로

$f(2-t)=f(-t)$

따라서 $f(x)$는 주기가 2인 함수이다.

또, (가)에서 $-1 \le x \le 1$일 때, $f(x)=3x$ 이므로

$y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 다음 그림과 같다.

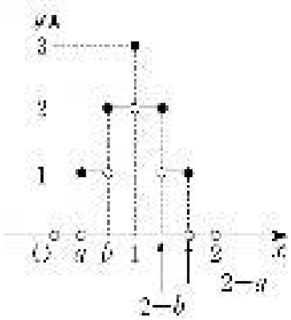


$0<x\le 1$에서 함수 $y=[f(x)]$를 구하면

$$y=[f(x)]=\begin{cases} 0 & 0<f(x)<1 \\ 1 & 1\le f(x)<2 \\ 2 & 2\le f(x)<3 \\ 3 & f(x)=3 \end{cases}$$

즉, $y=[f(x)]=\begin{cases} 0 & 0<x<a \\ 1 & a\le x<b \\ 2 & b\le x<1 \\ 3 & x=1 \end{cases}$

이고, $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $0<x<2$에서 $y=[f(x)]$의 그래프를 그려 보면 다음 그림과 같다.



즉, $0<x<2$에서 불연속점은 5개이다.

따라서 $\left.\begin{array}{l} 2<x<4 \\ 4<x<6 \\ 6<x<8 \\ 8<x<10 \end{array}\right\}$에서도 각각 5개씩의 불연속점이

존재하고, $x=2,\ 4,\ 6,\ 8$에서 연속이므로 불연속점의 개수는 모두 $5\times 5=25$(개)이다.

27. 다항함수의 적분법 $\boxed{\text{정답 } 46}$

(x)를 $(x-1)^3$, $(x+1)^3$으로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라고 하면 (단, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$는 2차식)

$P(x)=(x-1)^3Q_1(x)+8$ …… ㉠

$P(x)=(x+1)^3Q_2(x)-8$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$P'(x)=3(x-1)^2Q_1(x)+(x-1)^3Q_1{}'(x)$

$\therefore\ P'(1)=0$

한 번 더 미분하면

$$P''(x)=6(x-1)Q_1(x)+3(x-1)^2Q_1{}'(x)$$
$$+3(x-1)^2Q_1{}'(x)+(x-1)^3Q_1{}''(x)$$

$\therefore\ P''(1)=0$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$P'(x)=3(x+1)^2Q_2(x)+(x+1)^3Q_2{}'(x)$

$\therefore\ P'(-1)=0$

한 번 더 미분하면

$$P''(x)=6(x+1)Q_2(x)+3(x+1)^2Q_2{}'(x)$$
$$+3(x+1)^2Q_2{}'(x)+(x+1)^3Q_2{}''(x)$$

$\therefore\ P''(-1)=0$

따라서 $P'(-1)=P'(1)=P''(-1)=P''(1)=0$이

므로 $P'(x)=a(x+1)(x-1)^2(a\neq 0)$꼴이다.

$$P(x)=a\int(x+1)^2(x-1)^2dx$$
$$=a\int(x^2-1)^2dx$$
$$=a\int(x^4-2x^2+1)dx$$
$$=a\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right)+C$$

(단, C는 적분상수) …… ㉢

㉠에서 $P(1)=8$이므로 ㉢에서

$$P(1)=\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)a+C=8$$

$$\frac{8}{15}a+C=8 \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉡에서 $P(-1)=-8$이므로 ㉢에서

$$P(-1)=\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1\right)a+C=-8$$

$$-\frac{8}{15}a+C=-8 \quad \cdots\cdots ㉤$$

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=15,\ C=0$

㉢에 대입하면

$P(x)=3x^5-10x^3+15x$

$\therefore\ P(2)=46$

28. 수열 정답 371

각 반원의 수를 군으로 하는 군수열을 생각하면

$(1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9),\ \cdots$

이때, n군의 첫째항을 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은

$1,\ 2,\ 5,\ 10,\ \ldots$이므로

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$
$$=1+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)$$
$$=n^2-2n+2$$

각 군의 항의 개수가 $1,\ 3,\ 5,\ \ldots$이므로 n군의 항의 개수는 $2n-1$이며, 각 군의 수들은 공차가 1인 등차수열을 이룬다.

구하는 수는 20군에 있고 20군에는 총 39개의 수가 있다.

직선 $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로 $\frac{39}{4}=9.75$에서 어두운 부분에 들어갈 수는 20군의 10번째 수이다.

20군의 첫째항은

$20^2-2\cdot 20+2=400-40+2=362$

이므로 20군의 10번째 수는 362보다 9가 큰 371이다.

29. 확률 정답 323

(규칙1)로 a번, (규칙2)로 b번 이동하였다고 하면

$a+b=5$

(규칙1)로 a번 이동하면 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 이동하고,

(규칙2)로 b번 이동하면 x축의 방향으로 $2b$만큼, y축의 방향으로 b만큼 이동한다.

따라서 원점 O에서 출발하여 (규칙1)로 a번, (규칙2)로 b번 이동하면 점 $(a+2b,\ 2a+b)$에 도달한다.

따라서 $a+2b=8,\ 2a+b=7$에서

$a=2,\ b=3$

(규칙1) 번과 (규칙2) 3번을 배열하는 방법의 수는

$$\frac{5!}{2!3!}$$

(규칙1), (규칙2)를 따라 이동할 확률은 각각

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ 이므로 구하는 확률은

$$\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

$\therefore\ p = 243,\ q = 80$

$\therefore\ p + q = 323$

30. 벡터 정답 45

$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 27$ …… ㉠

xy평면으로 잘린 단면의 방정식은 ㉠에 $z = 0$을 대입하면

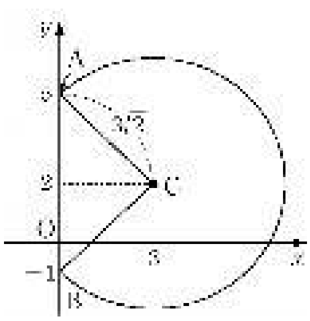
$(x-3)^2 + (y-2)^2 + 9 = 27$

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 18$

원 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 18$을 yz평면으로 자르는 것은

직선 $x = 0$으로 자르는 것과 같으므로 다음과 같은

활꼴모양의 단면이 된다.



즉, xy평면 위의 단면은 위의 그림과 같고, yz평면 위의

단면도 위의 그림과 같은 모양이므로 구하는 넓이는

활꼴의 넓이의 2배이다.

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 18$에 $x = 0$을 대입하면

$(y-2)^2 = 9$

$\therefore\ y = -1$ 또는 $y = 5$

이때, 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 비가

$3\ \ 2 : 3\sqrt{2} : 6 = 1 : 1 : \sqrt{2}$이므로

$\angle \mathrm{ACB} = 90°$

따라서 활꼴의 넓이는 삼각형과 부채꼴의 넓이의 합이므로

활꼴의 넓이를 라 하면

$S = \frac{1}{2}(3\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}(3\sqrt{2})^2 \cdot \frac{3}{2}\pi$

$\quad = 9 + \frac{27}{2}\pi$

따라서 구하는 넓이는

$2S = 2\left(9 + \frac{27}{2}\pi\right) = 27\pi + 18$

이므로 $27\pi + 18 = a\pi + b$에서

$a = 27,\ b = 18$

$\therefore\ a + b = 45$