2009학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시

수리 영역

문 과

성명	

수험번호							

○ 먼저 문제지에 성명과 수험 번호를 기입하시오.

○ 답안지에 성명과 수험 번호를 정확하게 표기하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 이 포함된 경우에는 0 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

---

1. 등비수열 $\{a\ \}$에 대하여 $a_1+a_2+a_3=48$, $a_4+a_5+a_6=12$일 때, $a_7+a_8+a_9$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

2. 4자리의 자연수 중에서 9의 배수 전체의 집합을 라 하자. 집합 A의 원소 중에서 각 자리의 수가 1이상이고 3이하인 것의 개수는? [2점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

3. 행렬 $\begin{matrix}1 & -1 \\ 3 & -2\end{matrix}\Big)$에 대하여 집합 X를 $X=\ A\ |\, n$ 자연수$\}$라 하자. 집합 X의 두 원소 P, Q가 다음 두 조건을 만족시킬 때, Q의 모든 성분의 합은? [3점]

(가) P의 모든 성분의 합은 -3이다.
(나) $PQ=E$ (단, E는 단위행렬이다.)

① -3 ② -2 ③ 2 ④ 1 ⑤ 3

4. 세 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라 하자. 이때 세 수 a, b, c의 최대공약수가 2일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{27}$ ② $\frac{17}{216}$ ③ $\frac{19}{216}$ ④ $\frac{5}{54}$ ⑤ $\frac{25}{216}$

5. 두 수열 $\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 모두 만족한다.

(가) $a_1 = 10$, $b_1 = 1$

(나) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

이 때, $\lim_{n \to \infty}(a_n + b_n)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

6. 두 이차정사각행렬 , B가 다음 두 조건

(가) $A+B=E$

(나) $A^2=-E$

를 만족한다. 다음 중 행렬 $(AB)^2 + 2B^{-1}$와 같은 행렬은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

① $E-A$ ② A ③ $2E$ ④ $E+3A$ ⑤ $4E-3A$

7. 양의 실수   에 대하여 $\log{}_{0}$ 의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

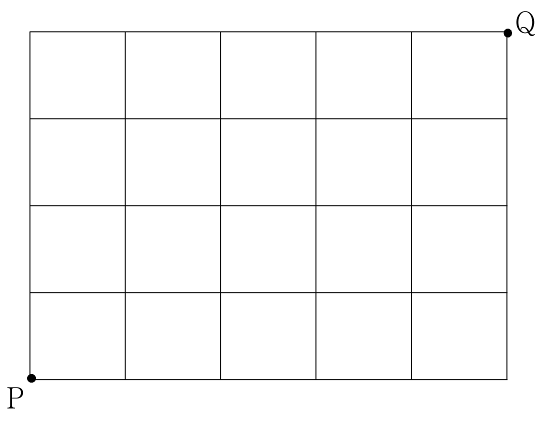
ㄱ. $f(1234)+f(0.1234)=2$

ㄴ. $g(5034)-g(0.05034)=0$

ㄷ. $\log_{10}a-\log_{10}0.0762=4$이면 $f(a)=2$이다.

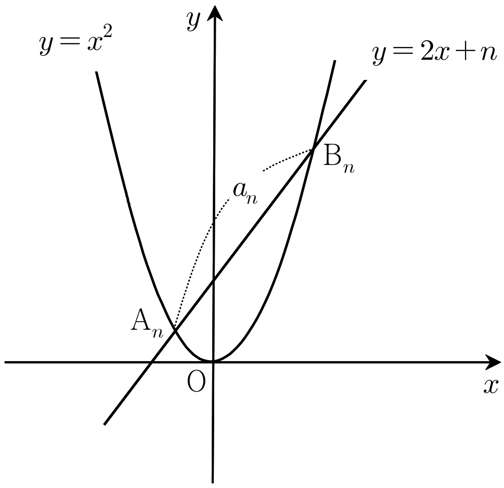
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 그림과 같은 직사각형 모양의 도로가 있다. P 지점에서 출발하여 Q 지점까지 도로를 따라 최단거리로 갈 때, 도중에 방향을 바꾸는 횟수가 모두 7번이 되는 경로의 수는? [3점]



① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

9. 그림과 같이 모든 자연수 에 대하여 곡선 $y=x$ 과 직선 $y=2x+n$이 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{5n+1}{a_n}$ 의 값은? [3점]



① $\frac{1}{4}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{2}$
④ 2　　⑤ 4

10. 어느 전자 회사에서는 신제품을 홍보하기 위해 7월 1일에 인터넷 사이트를 개설하여 한 달간 운영하였다. 이 사이트의 7월 1일의 회원 수가 2만 명이었고, 전날에 비해 매일 일정한 비율로 회원 수가 증가하여 7월 7일의 회원 수는 7월 1일의 회원 수보다 21% 증가하였다. 7월 4일의 회원 수가 7월 1일의 회원 수보다 % 증가하였다고 할 때, A의 값은? [3점]

① 9　　② 9.5　　③ 10
④ 10.5　　⑤ 11

11. 서류전형 후 필기시험을 실시하는 어느 시험에서 720명이 서류전형에 합격하였다. 서류전형 합격자는 필기시험에서 A, B, C, D 4과목 중 2과목을 반드시 선택해야 하고, 각 과목을 선택할 확률은 모두 같다고 한다. 4과목 중 A, B를 선택한 서류전형의 합격자의 수가 110명 이상 145명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

	$\mathrm{P}(0 \leq \quad \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0166 ② 0.1359 ③ 0.1525
④ 0.8351 ⑤ 0.9104

12. 두 수열 a }, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.
ㄴ. 수열 $\{a_n - b_n\}$이 수렴할 때, 수열 $\{a_n\}$이 발산하면 수열 $\{b_n\}$도 발산한다.
ㄷ. 수열 $\{a_n b_n\}$이 0으로 수렴할 때, 수열 $\{a_n\}$이 0으로 수렴하지 않으면 수열 $\{b_n\}$은 0으로 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

13. 함수 $=f(x)$의 그래프는 함수 $y=3$ 의 그래프를 축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지나면 $a=\log_3(b+2)-1$이다.

ㄴ. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=3^x$의 그래프는 한 점에서 만난다.

ㄷ. 부등식 $f(x)\quad 3^x$를 만족시키는 x의 값의 범위는 $x<0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 어느 대학은 학교 발전을 위하여 대학예산에서 시설투자비가 차지하는 비율을 증가시키기로 하였다. 2008년에 이 대학의 대학예산에서 시설투자비가 차지하는 비율은 4%이다. 이후 대학예산의 증가율은 매년 12%, 시설투자비의 증가율은 매년 20%로 일정하다면 처음으로 대학예산에서 시설투자비가 차지하는 비율이 6% 이상이 될 때는 2008년을 기준으로 몇 년 후 부터인가?
(단, $\log_{10}1.12=0.0492$, $\log_{10}1.20=0.0792$, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$로 계산한다.) [3점]

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

15. 다음은 모든 자연수 에 대하여 등식

$$\overset{n}{\underset{=1}{}}\,{}^{2}\ \frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{n(2n+1)}\bigg\}=\frac{n(n+3)}{12}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> [증명]
>
> (1) $n=1$일 때 (좌변)$=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{3}$이므로 주어진 등식은 성립한다.
>
> (2) $n=m$일 때 성립한다고 가정하면
>
> $$\sum_{k=1}^{m}k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{m(2m+1)}\right\}=\frac{m(m+3)}{12}$$
>
> 이제, $n=m+1$일 때 성립함을 보이자.
>
> $$\sum_{k=1}^{m+1}k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\right\}$$
>
> $$=\sum_{k=1}^{m}k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\right\}+\frac{\boxed{\text{(가)}}}{2m+3}$$
>
> $$=\sum_{k=1}^{m}k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{\boxed{\text{(나)}}}\right.$$
>
> $$+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m}k^2+\frac{\boxed{\text{(가)}}}{2m+3}$$
>
> $$=\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m+1}\boxed{\text{(다)}}$$
>
> $$=\frac{(m+1)(m+4)}{12}$$
>
> 그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.
>
> 따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	m	$(m+1)(2m+3)$	$(k-1)^2$
②	m	$m(2m+1)$	$(k-1)^2$
③	$m+1$	$m(2m+1)$	$(k-1)^2$
④	$m+1$	$(m+1)(2m+3)$	k^2
⑤	$m+1$	$m(2m+1)$	k^2

16. 이차정사각행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $f(A) = a + d$라 하자. 세 이차정사각행렬 A, B, C에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(A - B) = f(A) - f(B)$
ㄴ. $f(AB) = f(BA)$
ㄷ. 영행렬이 아닌 행렬 와 역행렬을 갖는 두 행렬 A, B에 대하여 $M = ACA^{-1} - BCB^{-1}$라 하면 $f(M) = 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 방정식 $x^3 - 1 = 0$의 한 허근을 ω라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 ω^n의 실수부분을 a_n이라 정의할 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k a_{k+1} a_{k+2})$의 값은? [4점]

① 0 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

18. 함수 $(x)=|2\quad -2|$의 그래프 위의 세 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ $(c,\ f(c))$가 $0\quad a<b<c$와 $f(a)>f(b)>f(c)$를 만족할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $0<c<1$
ㄴ. $0<f(a)+f(b)+f(c)<3$
ㄷ. 방정식 $f(x)-a=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

19. 사관학교 생도의 60%는 입교 전에 확률과 통계 과목을 배웠고, 40%는 배우지 않았다고 한다. 확률과 통계 과목을 배운 생도들의 20%, 배우지 않은 생도들의 10%는 통계학 성적이 A학점이었다. 임의로 한 명의 생도를 뽑았더니 그 생도의 통계학 성적이 A학점이었을 때, 그 생도가 입교 전에 확률과 통계 과목을 배웠을 확률은? [3점]

① $\dfrac{5}{8}$ ② $\dfrac{11}{16}$ ③ $\dfrac{3}{4}$
④ $\dfrac{13}{16}$ ⑤ $\dfrac{7}{8}$

20. $(x) = \log x$라 할 때, $0 \quad x < 1$에서 방정식

$$\log_2 \left[\begin{array}{c} f(x) \\ f(x)] \end{array} \right] = 0$$

을 만족시키는 모든 x의 값을 가장 큰 수부터 차례대로 나열한 것을 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 하자. 이 때, $\overset{\infty}{\underset{n=1}{}} a_n$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

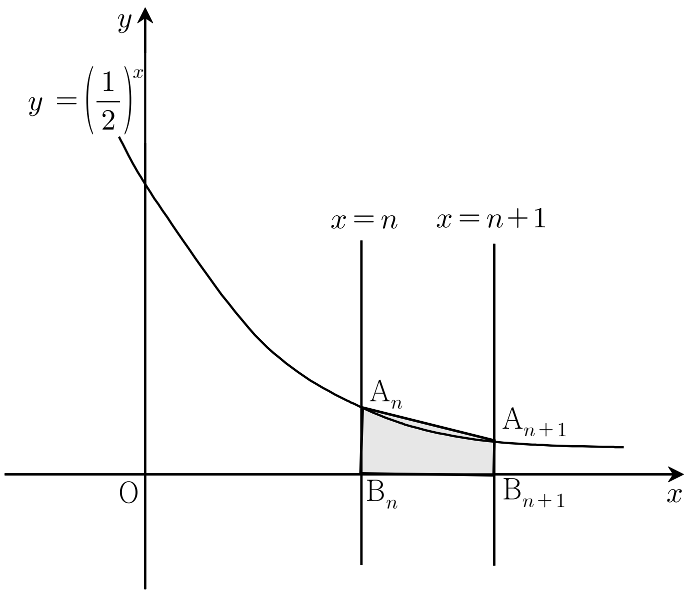
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ 2

21. 10개의 구슬이 들어있는 주머니가 있다. 10개의 구슬 각각에는 1부터 10까지 서로 다른 자연수가 하나씩 적혀 있다. 이 주머니에서 한 개의 구슬을 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 집어넣는 시행을 세 번 반복하여 첫 번째 나온 수를 a, 두 번째 나온 수를 b, 세 번째 나온 수를 c라 하자. 다음과 같은 규칙으로 를 정할 때, $X = 5$일 확률은? [4점]

[규칙 1] a, b, c가 모두 다르면 중간 크기의 수를 X라 한다.
[규칙 2] a, b, c 중에서 두 개 이상이 같으면 같은 수를 X라 한다.

① $\frac{18}{125}$ ② $\frac{37}{250}$ ③ $\frac{19}{125}$
④ $\frac{39}{250}$ ⑤ $\frac{4}{25}$

22. 그림과 같이 모든 자연수 에 대하여 직선 $x = n$이 함수 $y = \frac{1}{2}\Big)$의 그래프와 만나는 점을 A_n, x축과 만나는 점을 B_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 $_n$이라 할 때, $\overset{\infty}{\underset{n=1}{}} S_n$의 값은? [4점]



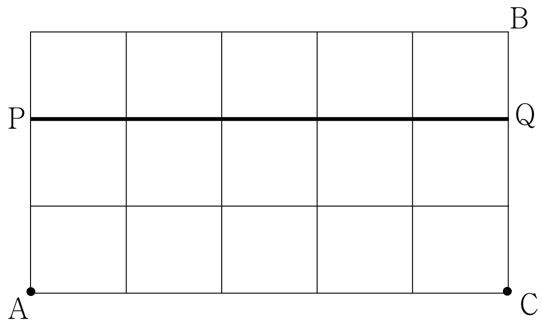
① $\frac{3}{4}$　② 1　③ $\frac{5}{4}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

23. 주사위 한 개를 번 던지는 시행에서 나타나는 눈의 수들 중에서 가장 큰 수를 a , 가장 작은 수를 b_n 이라 하자. 예를 들면, 주사위를 한 번 던지는 시행에서 나타나는 눈의 수가 3 이면 $a_1 = b_1 = 3$이고, 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나타나는 눈의 수가 4, 6 이면 $a_2 = 6$, $b_2 = 4$ 이다. $a_n - b_n < 5$가 될 확률을 p_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

24. 철수가 자동차로 그림과 같은 바둑판 모양의 도로를 따라 A 지점에서 약속 장소인 B 지점까지 최단 거리로 가는 도중에, 도로 PQ 위에서 약속 장소가 C 지점으로 변경되었다는 연락을 받고 곧바로 C 지점을 향하여 도로를 따라 최단 거리로 이동하였다.

이 때, 철수가 A 지점에서 출발하여 C 지점까지 최단 거리로 이동하는 경로의 수는? (단, 연락 받은 위치가 달라도 이동 경로가 같으면 동일한 경우로 간주한다.) [4점]



① 120 ② 122 ③ 124 ④ 126 ⑤ 128

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 세 실수 , b, c가 $ab=12$, $bc=8$, $2 \; = 2$을 만족시킬 때, 4^c의 값을 구하시오. [2점]

26. 5장의 카드가 들어있는 상자가 있다. 5장의 카드 각각에는 1부터 5까지 서로 다른 자연수가 하나씩 적혀 있다. 이 상자에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 넣는 시행을 4번 반복하여 제 i번째에 꺼낸 카드에 적힌 숫자를 $a_i(i=1, 2, 3, 4)$라 하자. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$가 될 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

27. 두 행렬 $\begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{matrix}\Big)$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 두 수열 a }, $\{b_n\}$이

$$a_n A + b_n B = \begin{matrix} 6n-3\cdot 2^n & 12n+3\cdot 2^n \\ 3n+2^n & 2^{n+1} \end{matrix}\Bigg) \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\mathop{}_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

28. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (4n^2-1)2^n + 1$$

을 만족시킬 때, b_6의 값을 구하시오. [4점]

29. 어느 임업연구소의 A, B 두 연구원이 소나무 군락지의 소나무들의 생장 상태를 알아보기 위하여 100 그루의 소나무들을 각각 a, b 그루로 나누어 키를 조사하였더니 오른쪽 표와 같은 결과를 얻었다. A, B 두 연구원이 각자 95 % 의 신뢰도로 군락지의 소나무들의 키의 평균을 추정하였더니 신뢰구간의 길이가 같았다. 소나무들의 키의 분포는 정규분포를 따른다고 할 때, $|a-b|$의 값을 구하시오.

	표본의 크기	표준편차
A연구원	그루	3 cm
B연구원	b그루	4 cm

(단, 표준정규분포에서 $\mathrm{P}(0 \leq \quad \leq 1.96) = 0.475$로 계산한다.) [4점]

30. 자연수 n에 대하여 $2 \quad \leq x \leq 2^{n+10}$에서 $\log_2 x - 2n|$의 최댓값을 a_n이라 할 때, $\underset{k=1}{\overset{10}{}} a_k$의 값을 구하시오. [4점]