2009학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시

수리 영역

이 과

성명	

수험번호							

○ 먼저 문제지에 성명과 수험 번호를 기입하시오.

○ 답안지에 성명과 수험 번호를 정확하게 표기하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 이 포함된 경우에는 0 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 등비수열 $\{a\ \}$에 대하여 $a_1+a_2+a_3=48$, $a_4+a_5+a_6=12$일 때, $a_7+a_8+a_9$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 8

2. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{3x^2}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-12$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [2점]

① -7　② -5　③ -3　④ 1　⑤ 2

3. 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 집합 X를 $X= A \mid n$ 자연수라 하자. 집합 X의 두 원소 P, Q가 다음 두 조건을 만족시킬 때, Q의 모든 성분의 합은? [3점]

> (가) P의 모든 성분의 합은 -3이다.
> (나) $PQ=E$ (단, E는 단위행렬이다.)

① -3 ② -2 ③ 2
④ 1 ⑤ 3

4. 세 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라 하자. 이때 세 수 a, b, c의 최대공약수가 2일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{27}$ ② $\frac{17}{216}$ ③ $\frac{19}{216}$
④ $\frac{5}{54}$ ⑤ $\frac{25}{216}$

5. 두 수열 $\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 모두 만족한다.

(가) $a_1 = 10$, $b_1 = 1$

(나) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

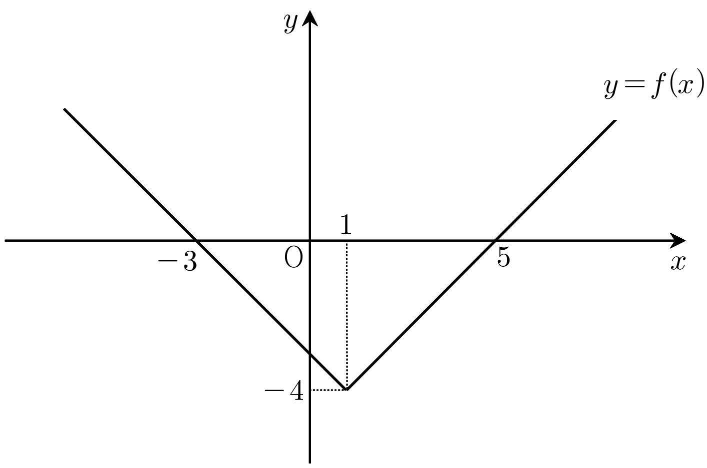
이 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

6. 그림은 함수 $f(x) = a|x-1| + b$(a, b는 상수)의 그래프이다. 이 때, 방정식

$$f(x) + 2 = \quad 2f(x) + 7$$

의 모든 실근의 곱은? [3점]



① -24 ② -18 ③ -9
④ 0 ⑤ 9

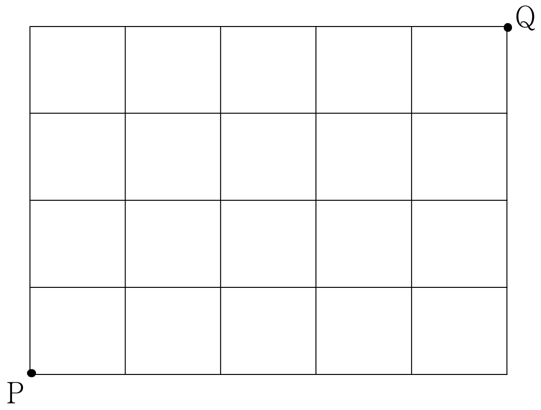
7. 모든 실수 에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \neq 0) \\ 2 & (x = 0) \end{cases}, \quad g(x) = \cos \pi x$$

로 정의될 때, $\lim_{\to 0}(f \circ g)(x) + \lim_{x \to 0}(g \circ f)(x)$의 값은? [3점]

① -1　　② 1　　③ 2
④ 3　　⑤ 4

8. 그림과 같은 직사각형 모양의 도로가 있다. P 지점에서 출발하여 Q 지점까지 도로를 따라 최단 거리로 갈 때, 도중에 방향을 바꾸는 횟수가 모두 7번이 되는 경로의 수는? [3점]



① 8　　② 9　　③ 10
④ 11　　⑤ 12

9. 함수 $(x)=\lim_{\to\infty}\frac{2x^{2n+1}+x^2+1}{x^{2n}+1}$ 에 대한 설명 중 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x=-1$에서 연속이다.
ㄴ. $x=0$에서 극솟값 1을 갖는다.
ㄷ. $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

10. 어느 전자 회사에서는 신제품을 홍보하기 위해 7월 1일에 인터넷 사이트를 개설하여 한 달간 운영하였다. 이 사이트의 7월 1일의 회원 수가 2만 명이었고, 전날에 비해 매일 일정한 비율로 회원 수가 증가하여 7월 7일의 회원 수는 7월 1일의 회원 수보다 21% 증가하였다. 7월 4일의 회원 수가 7월 1일의 회원 수보다 % 증가하였다고 할 때, A의 값은? [3점]

① 9 ② 9.5 ③ 10
④ 10.5 ⑤ 11

11. 서류전형 후 필기시험을 실시하는 어느 시험에서 720명이 서류전형에 합격하였다. 서류전형 합격자는 필기시험에서 A, B, C, D 4과목 중 2과목을 반드시 선택해야 하고, 각 과목을 선택할 확률은 모두 같다고 한다. 4과목 중 A, B를 선택한 서류전형의 합격자의 수가 110명 이상 145명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

	$\mathrm{P}(0 \leqq \quad \leqq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0166 ② 0.1359 ③ 0.1525
④ 0.8351 ⑤ 0.9104

12. 두 함수 $f(x)=2x-3x^2$, $g(x)=x^2-1$에 대하여 방정식 $(g \circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

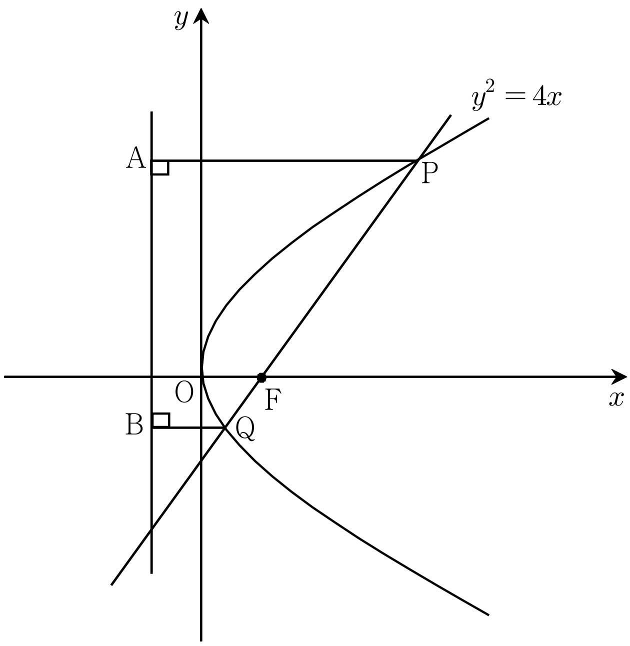
13. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 (x)가 모든 자연수 n에 대하여 ${}^{n+1} f(x)dx = \frac{1}{n^2+2n}$를

만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} n \left(\int_1^n f(x)dx - \frac{3}{4} \right)$의 값은? [4점]

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0

④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

14. 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=5$일 때, 사각형 ABQP의 넓이는? [3점]



① $\frac{57}{4}$　② $\frac{115}{8}$　③ 15

④ $\frac{125}{8}$　⑤ $\frac{135}{8}$

15. 다음은 모든 자연수 에 대하여 등식

$$\overset{n}{\underset{=1}{}}\;{}^{2}\; \frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \cdots + \frac{1}{n(2n+1)} \Bigg\} = \frac{n(n+3)}{12}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증명]

(1) $n=1$일 때 (좌변)$=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{3}$이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 \left\{ \frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \cdots + \frac{1}{m(2m+1)} \right\} = \frac{m(m+3)}{12}$$

이제, $n=m+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 \left\{ \frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \cdots + \frac{1}{(m+1)(2m+3)} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} k^2 \left\{ \frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \cdots + \frac{1}{(m+1)(2m+3)} \right\} + \frac{\boxed{(가)}}{2m+3}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} k^2 \left\{ \frac{1}{k(2k+1)} + \frac{1}{(k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(k+2)(2k+5)} + \cdots + \frac{1}{\boxed{(나)}} \right\} + \frac{1}{(m+1)(2m+3)} \sum_{k=1}^{m} k^2 + \frac{\boxed{(가)}}{2m+3}$$

$$= \frac{m(m+3)}{12} + \frac{1}{(m+1)(2m+3)} \sum_{k=1}^{m+1} \boxed{(다)}$$

$$= \frac{(m+1)(m+4)}{12}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.

따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	m	$(m+1)(2m+3)$	$(k-1)^2$
②	m	$m(2m+1)$	$(k-1)^2$
③	$m+1$	$m(2m+1)$	$(k-1)^2$
④	$m+1$	$(m+1)(2m+3)$	k^2
⑤	$m+1$	$m(2m+1)$	k^2

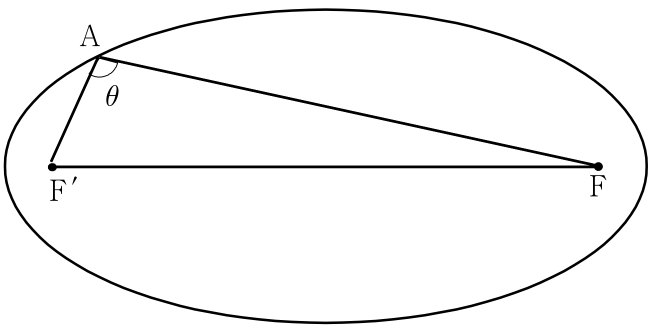
16. 이차정사각행렬 $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\Big)$에 대하여 $f(A) = a+d$라 하자. 세 이차정사각행렬 A, B, C에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(A-B) = f(A) - f(B)$
ㄴ. $f(AB) = f(BA)$
ㄷ. 영행렬이 아닌 행렬 와 역행렬을 갖는 두 행렬 A, B에 대하여 $M = ACA^{\ 1} - BCB^{-1}$라 하면 $f(M) = 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 그림과 같이 장축의 길이가 4, 단축의 길이가 2인 타원이 있다. 이 타원의 두 초점 F, F′에 대하여 삼각형 AF′F의 넓이가 2가 되도록 타원 위의 점 A를 정할 때, $\angle \mathrm{F'AF} = \theta$라 하면 $\cos\theta$의 값은? [4점]



① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

18. 함수 $(x)=|2 \quad -2|$의 그래프 위의 세 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$, $(c,\ f(c))$가 $0 \quad a<b<c$와 $f(a)>f(b)>f(c)$를 만족할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $0<c<1$
ㄴ. $0<f(a)+f(b)+f(c)<3$
ㄷ. 방정식 $f(x)-a=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

19. 사관학교 생도의 60%는 입교 전에 확률과 통계 과목을 배웠고, 40%는 배우지 않았다고 한다. 확률과 통계 과목을 배운 생도들의 20%, 배우지 않은 생도들의 10%는 통계학 성적이 A학점이었다. 임의로 한 명의 생도를 뽑았더니 그 생도의 통계학 성적이 A학점이었을 때, 그 생도가 입교 전에 확률과 통계 과목을 배웠을 확률은? [3점]

① $\frac{5}{8}$　② $\frac{11}{16}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{13}{16}$　⑤ $\frac{7}{8}$

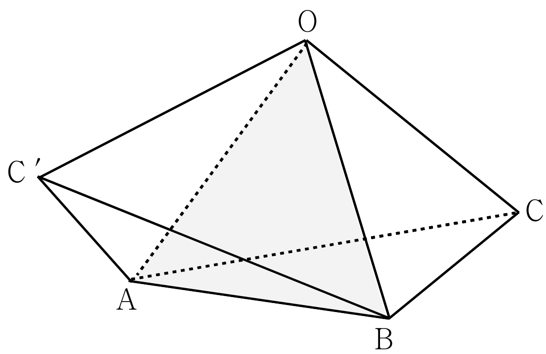
20. $(x)=\log x$라 할 때, $0 \quad x<1$에서 방정식

$$\log_2 \left[\begin{matrix} \lceil \ f(x) \\ \lfloor \ f(x)] \end{matrix} \right] = 0$$

을 만족시키는 모든 x의 값을 가장 큰 수부터 차례대로 나열한 것을 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 하자. 이 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

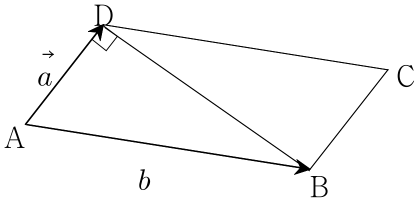
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ 2

21. 그림과 같이 두 개의 정사면체 OABC와 OABC′가 면 OAB를 공유하고 있다. 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = p\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + q\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$를 만족시키는 상수 p, q, r에 대하여 $p+q+r$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

22. 그림과 같은 AD $=1$, AB $=\ \ 6$, $\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$ 인 평행사변형 ABCD 에서 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$라 놓는다. 꼭짓점 D 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 E 라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k(\vec{a}+\vec{b})$를 만족시키는 실수 k의 값은? [4점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{6}$

23. 좌표공간에서 평면 $y=(\tan 75^\circ)x$ 위의 도형   를 벡터 $\vec{v}=(1,\ -1,\ 0)$에 평행한 광선으로 비추었더니, zx 평면에 나타난 도형 S의 그림자는 중심이 $(4,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이 되었다. 이 때, 도형 S의 넓이는? [4점]

① $3\sqrt{3}\pi$ ② $4\sqrt{3}\pi$ ③ $\frac{9\sqrt{6}}{4}\pi$

④ $3\sqrt{6}\pi$ ⑤ $\frac{9\sqrt{6}}{2}\pi$

24. 다음은 좌표공간에 있는 세 점 A 3, 0, 2), B(0, 2, 1), C(1, 1, 1)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 외접원의 중심 P 의 좌표를 벡터를 이용하여 구하는 과정이다.

$\vec{CA}=\vec{a}$, $\vec{CB}=\vec{b}$라 하면 적당한 실수 p, q에 대하여

$$\overrightarrow{CP}=p\vec{a}+q\vec{b}$$

로 나타낼 수 있다.

$|\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{AP}|$에서

$|\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{CP}-\vec{a}|^2$

$\therefore\ |\vec{a}|^2 = \boxed{(가)} \times\ p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b})$ …… ㉠

마찬가지로

$|\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{BP}|$에서

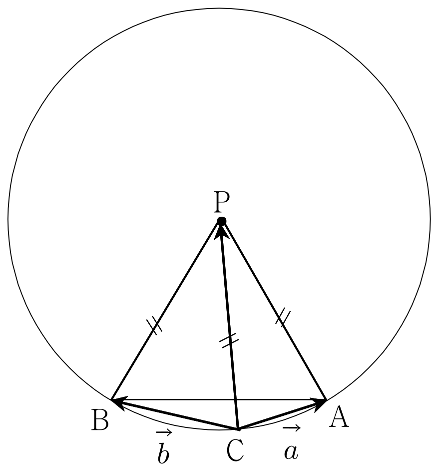
$|\vec{b}|^2 = \boxed{(나)} \times \left(q|\vec{b}|^2+p\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ …… ㉡

$\vec{a}=(2,\ -1,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 1,\ 0)$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$이므로

㉠, ㉡으로부터

$\therefore\ p=\boxed{(다)}$, $q=\boxed{(라)}$

따라서 $\overrightarrow{CP}=(1,\ 2,\ 3)$이므로 삼각형 ABC 의 외접원의 중심은 P(2, 3, 4)이다.



위 과정에서 (가), (나), (다), (라)에 해당하는 수를 모두 더하면? [4점]

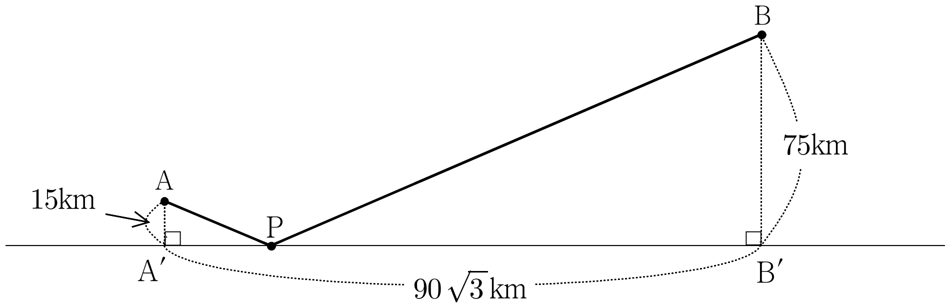
① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 세 실수 , b, c가 $ab=12$, $bc=8$, $2 \quad = 2$을 만족시킬 때, 4^c의 값을 구하시오. [2점]

26. 정적분 $\int_2^6 \frac{x^2(x^2+2x+4)}{x+2}\,dx+\int_6^2 \frac{4(y^2+2y+4)}{y+2}\,dy$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 그림과 같이 A 지점에서 직선 에 내린 수선의 발을 A′, B 지점에서 내린 수선의 발을 B′라 하자. $\overline{AA'} = 15$km, $\overline{BB'} = 75$km, $\overline{A'B'} = 90\ \ 3$km이고 직선 l 위에 있는 P는 $\overline{AP} + \overline{PB}$의 값이 최소가 되는 점이다. 갑과 을은 동시에 출발하여 갑은 A에서 P를 거쳐 B에, 을은 B에서 P를 거쳐 A에 도착하였다. 두 사람이 만난 순간부터 각각 갑은 1시간 후에 B에 도착하였고, 을은 9시간 후에 A에 도착하였다. 을이 B에서 출발하여 갑과 만났을 때까지 이동한 거리를 $x$km라 할 때, x의 값을 구하시오. (단, 갑과 을은 각각 일정한 속력으로 직선 방향으로 이동한다.) [3점]



28. 두 수열 a }, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (4n^2 - 1)2^n + 1$$

을 만족시킬 때, b_6의 값을 구하시오. [4점]

29. 어느 임업연구소의 A, B 두 연구원이 소나무 군락지의 소나무들의 생장 상태를 알아보기 위하여 100 그루의 소나무들을 각각 a, b 그루로 나누어 키를 조사하였더니 오른쪽 표와 같은 결과를 얻었다. A, B 두 연구원이 각자 95 % 의 신뢰도로 군락지의 소나무들의 키의 평균을 추정하였더니 신뢰구간의 길이가 같았다. 소나무들의 키의 분포는 정규분포를 따른다고 할 때, $|a-b|$의 값을 구하시오.

	표본의 크기	표준편차
A연구원	그루	3 cm
B연구원	b그루	4 cm

(단, 표준정규분포에서 $\mathrm{P}(0 \leqq \quad \leqq 1.96)=0.475$로 계산한다.) [4점]

30. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=3$, $\overline{\mathrm{OB}}=2$, $\angle\mathrm{AOB}=30^{\circ}$ 인 삼각형 OAB가 있다. 연립부등식

$$3x+y \geqq 2,\ x+y \leqq 2,\ y \geqq 0$$

을 만족시키는 x, y에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 종점 P가 존재하는 영역의 넓이를 S라 할 때, S 의 값을 구하시오. [4점]