수리 영역(자연)

1. ③	2. ①	3. ④	4. ⑤	5. ②
6. ①	7. ③	8. ①	9. ⑤	10. ③
11. ④	12. ③	13. ①	14. ④	15. ⑤
16. ⑤	17. ②	18. ⑤	19. ③	20. ④
21. ②	22. ②	23. ④	24. ②	25. 81
26. 288	27. 45	28. 544	29. 28	30. 16

1. 수열 정답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3=a+ar+ar^2=a(1+r+r^2)$

이므로 $a(1+r+r^2)=48$ ··············· ㉠

$a_4+a_5+a_6=ar^3+ar^4+ar^5=ar^3(1+r+r^2)$

이므로 $ar^3(1+r+r^2)=12$ ··············· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $r^3=\dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_7+a_8+a_9&=ar^6+ar^7+ar^8\\&=ar^6(1+r+r^2)\\&=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 48\\&=3\end{aligned}$$

2. 다항함수의 미분법 정답 ①

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{3x^2}=1$이므로

$f(x)=2x^3+3x^2+ax+b$

또, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-12$이므로 $f(0)=0$ $\therefore\ b=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2+ax}{x}\\&=\lim_{x\to 0}(2x^2+3x+a)=a\end{aligned}$$

이므로 $a=-12$

$\therefore\ f(x)=2x^3+3x^2-12x$

$\therefore\ f(1)=-7$

3. 행렬 정답 ④

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

그러므로 $X=\{A,\ A^2,\ E\}$

(가)에 의해 P의 모든 성분의 합이 -3이므로 $P=A^2$

(나)에 의해 Q는 P의 역행렬이므로

$Q=(A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$

따라서 Q의 모든 성분의 합은

$1+(-1)+3+(-2)=1$

4. 확률 정답 ⑤

세 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수 a, b, c의 최대공약수가 2가 되기 위해서는 세 수 모두 짝수가 되어야 한다. 그러나 $a=b=c=4$이거나 $a=b=c=6$인 경우에는 최대공약수가 2가 되지 않으므로 두 경우를 제외한다.

따라서 구하는 확률은 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-2\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{25}{216}$

《다른 풀이》

a, b, c의 최대공약수가 2가 되는 경우는

i) $(2,\ 2,\ 2)$

ii) 같은 수가 2개 나오는 경우

$(2,\ 2,\ 4)$, $(2,\ 2,\ 6)$, $(2,\ 4,\ 4)$, $(2,\ 6,\ 6)$

$(4,\ 4,\ 6)$, $(4,\ 6,\ 6)$

iii) $(2,\ 4,\ 6)$

그러므로 $1+\dfrac{3!}{2!}\times 6+3!=25$(가지)이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{25}{6^3}=\dfrac{25}{216}$

5. 수열의 극한 정답 ②

(나)에서 $\begin{cases}a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n\\ b_{n+1}=a_n\end{cases}$ 이므로

$a_{n+2}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$$

그런데, $a_1=10$, $b_1=1$이므로 (나)에 의해 $a_2=\dfrac{11}{2}$

$$\therefore a_n=10+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{11}{2}-10\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$$
$$=10+9\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$
$$=10+9\cdot\frac{-\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=7+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore b_n=a_{n-1}=7+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=14$

6. 방정식과 부등식 정답 ①

주어진 그래프에서 $f(-3)=0$, $f(5)=0$, $f(1)=-4$이므로 $a=1$, $b=-4$이다.

즉, $f(x)=|x-1|-4$

방정식 $f(x)+2=\sqrt{2f(x)+7}$의 양변을 제곱하면,

$\{f(x)\}^2+4f(x)+4=2f(x)+7$

$\{f(x)\}^2+2f(x)-3=0$

$\{f(x)-1\}\{f(x)+3\}=0$

그런데 $f(x)+2\geq 0$이므로 $f(x)\geq -2$

$\therefore f(x)=1$

$|x-1|-4=1$이므로 $x=-4$또는 $x=6$

따라서 모든 실근의 곱은 -24이다.

7. 함수의 극한과 연속성 정답 ③

$$\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0}f(g(x))$$
$$=\lim_{y\to 1}f(y)=2\times 1+1=3$$
$$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0}g(f(x))$$
$$=\lim_{y\to 1}g(y)=\cos\pi=-1$$
$$\therefore \lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)+\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=3+(-1)=2$$

8. 순열과 조합 정답 ①

오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 a, 위로 한 칸 이동하는 것을 b라고 하자.

P지점에서 Q지점까지 최단거리로 갈 때, 도중에 7번 방향을 바꾸려면 b가 두 번 이상 연속해서 나오면 안 되고, a가 두 번만 연속해서 나와야 한다.

이제, 연속해서 두 번 나오는 aa를 한 문자로 취급하자.

b와 a가 번갈아서 배열되어야 하므로 b를 먼저 배열한 b_b_b_b_또는 _b_b_b_b 사이사이에 a, a, a, aa를 배열하면 된다.

따라서 경로의 수는 $\dfrac{4!}{3!}\times 2=8$(가지)

9. 다항함수의 미분법 정답 ⑤

i) $|x|<1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로 $f(x)=x^2+1$

ii) $|x|>1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

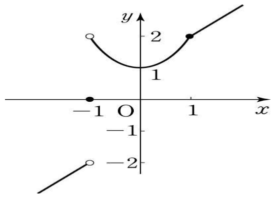
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x+\frac{x^2}{x^{2n}}+\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=2x$$

iii) $x=1$일 때 $f(x)=2$

iv) $x=-1$일 때 $f(x)=0$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (|x|<1)\\ 2x & (|x|>1)\\ 2 & (x=1)\\ 0 & (x=-1)\end{cases}$$

위 함수를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



ㄱ. $\lim\limits_{x\to -1+0}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to -1-0}f(x)=-2$

$\therefore$ $x=-1$에서 불연속 (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $-1<x<1$인 구간에서 $f(x)=x^2+1$이므로 미분가능하다.

$f'(0)=0$이고 좌우에서 감소→증가로 바뀌므로 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=1$을 갖는다. (참)

ㄷ. $\lim_{h \to +0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{2(1+h)-2}{h}$

$= \lim_{h \to +0} \frac{2h}{h} = 2$

$\lim_{h \to -0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{(1+h)^2+1-2}{h}$

$= \lim_{h \to -0} \frac{h^2+2h}{h} = 2$

$\therefore$ $x=1$에서 미분가능 (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

10. 수열 정답 ③

하루 회원 수의 증가율을 $r\%$,

n일 후 회원 수를 a_n이라고 하면

$a_n = 20000 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

7월 7일의 회원 수는

$1.21 \times 20000 = 20000 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^6$

$\therefore \left(1+\frac{r}{100}\right)^6 = 1.21 = (1.1)^2$

그러므로 7월 4일의 회원 수는 $20000 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^3$

따라서 3일 후 회원 수의 증가율은

$\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 = 1.1 = 1+\frac{10}{100}$

$\therefore$ $A=10$

11. 확률분포와 통계적 추정 정답 ④

4과목 중 2과목을 선택할 확률은 $\frac{1}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$

A, B를 선택한 서류전형 합격자의 수를 확률변수 X라고 하면, X는 이항분포 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

이항분포는 $n=720$이 충분히 클 때, 근사적으로 정규분포를 따른다는 것을 이용하자.

$m = 720 \cdot \frac{1}{6} = 120$, $\sigma^2 = 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 100$

이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(120, 10^2)$을 따른다.

$\therefore P(110 \leq X \leq 145)$

$= P\left(\frac{110-120}{10} \leq Z \leq \frac{145-120}{10}\right)$

$= P(-1 \leq Z \leq 2.5)$

$= 0.3413 + 0.4938$

$= 0.8351$

12. 다항함수의 미분법 정답 ③

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \{f(x)\}^2 - 1 = 0$

$\{f(x)-1\}\{f(x)+1\} = 0$

$\therefore$ $f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$

즉, $f(x)=1$ 또는 -1이 되게 하는 x의 개수를 구하자.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2$

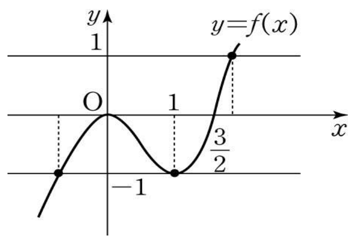
$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$, 1

$f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0 극대	↘	−1 극소	↗

이것을 이용하여 그래프를 그리면 다음과 같으므로 $f(x)=\pm 1$은 서로 다른 세 개의 실근을 갖는다.



13. 다항함수의 적분법 정답 ①

$\int_n^{n+1} f(x)dx = \frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$이므로

$\lim_{n \to \infty} n\left(\int_1^n f(x)dx - \frac{3}{4}\right)$

$= \lim_{n \to \infty} n\left\{\left(\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \cdots\right.\right.$

$$+\int_{n-1}^{n} f(x)dx\Big)-\frac{3}{4}\Big\}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{3}{4}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{3}{4}RIGHT\right.$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left\{-\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right\}$$

$$=-1$$

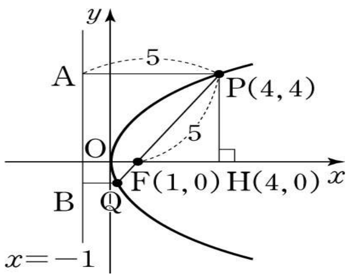
14. 이차곡선

정답 ④

$y^2=4x$ 의 초점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고, 준선은 $x=-1$이다.

$\overline{\mathrm{PF}}=5$이므로 포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{AP}}=5$

따라서 P의 x좌표는 4이므로 $\mathrm{P}(4,\ 4)$, $\overline{\mathrm{FH}}=3$이다.



그러므로 $\overline{\mathrm{PF}}$의 방정식을 구하면, $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$이다.

이 직선의 방정식을 $y^2=4x$와 연립하면 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{4},\ -1\right)$

∴ 사각형 ABQP의 넓이 $=(\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{AP}})\times\overline{\mathrm{AB}}\times\frac{1}{2}$

$$=\left(\frac{5}{4}+5\right)\times 5\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{125}{8}$$

15. 수열

정답 ⑤

(가) $k=m+1$일 때

$$(m+1)^2\cdot\frac{1}{(m+1)(2m+3)}=\frac{m+1}{2m+3}$$

(나) $\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m}k^2$항이 { } 밖~~으로 나왔으므~~로 주어진 식의 마지막은 m번째 항인 $\frac{1}{m(2m+1)}$이 들어가야 한다.

(다) (주어진 식)

$$=\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m}k^2+\frac{m+1}{2m+3}$$

$$=\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m}k^2$$

$$+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}(m+1)^2$$

$$=\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\left\{\sum_{k=1}^{m}\boxed{k^2}+(m+1)^2\right\}$$

$$=\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m+1}k^2$$

따라서 (가) : $m+1$, (나) : $m(2m+1)$, (다) : k^2

16. 행렬

정답 ⑤

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$라 하자.

ㄱ. $A-B=\begin{pmatrix}a-p & b-q\\ c-r & d-s\end{pmatrix}$이므로

$$f(A-B)=(a-p)+(d-s)$$
$$=(a+d)-(p+s)$$
$$=f(A)-f(B)\quad (참)$$

ㄴ. $AB=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}ap+br & aq+bs\\ cp+dr & cq+ds\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}pa+qc & pb+qd\\ ra+sc & rb+sd\end{pmatrix}$$

이므로 $f(AB)=(ap+br)+(cq+ds)$

$$=(pa+qc)+(rb+sd)$$
$$=f(BA)\quad (참)$$

ㄷ. $f(M)=f(ACA^{-1}-BCB^{-1})$

$=f(ACA^{-1})-f(BCB^{-1})$ (∵ ㄱ에 의해)

$=f(CA^{-1}A)-f(CB^{-1}B)$ (∵ ㄴ에 의

해)

$= f(C) - f(C)$

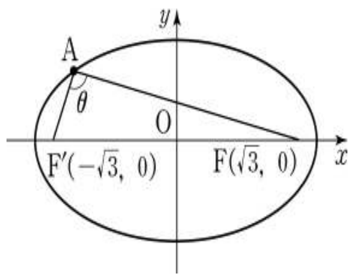
$= 0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17. 이차곡선 **정답 ②**

직선 F′F을 x축이라 하자.

그러면 장축의 길이가 4, 단축의 길이가 2이므로 주어진 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$이다.



이제, $\overline{\mathrm{AF}} = a$, $\overline{\mathrm{AF'}} = b$라 두면

$\dfrac{1}{2}ab\sin\theta = \sqrt{2}$, $a + b = 4$ …………… ㉠

또, $\triangle \mathrm{AF'F}$에서 제이코사인법칙을 적용하면

$12 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

$= (a+b)^2 - 2ab(1+\cos\theta)$

$= 16 - \dfrac{4\sqrt{2}}{\sin\theta}(1+\cos\theta)$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \sqrt{2}(1+\cos\theta) = \sin\theta$

$2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) = \sin^2\theta$

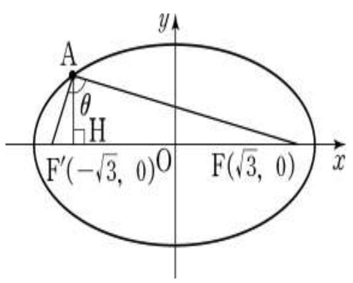
$3\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1 = 0$

$(\cos\theta + 1)(3\cos\theta + 1) = 0$

$\therefore \cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ ($\because \theta \neq \pi$)

《 다른 풀이 》

$\triangle \mathrm{AF'F}$의 넓이를 S, 점 A에서 $\overline{\mathrm{F'F}}$에 내린 수선의 발을 H라 두자.



$S = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AH}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

즉, A의 y좌표는 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이 된다.

$\therefore \mathrm{A}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ ($\because x < 0$)

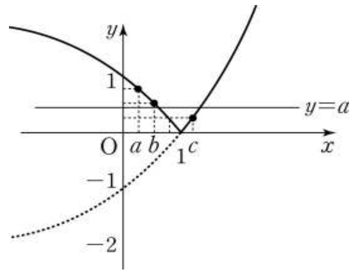
또, $\mathrm{F'}(-\sqrt{3}, 0)$, $\mathrm{F}(\sqrt{3}, 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AF'}} = 1$, $\overline{\mathrm{AF}} = 3$

따라서 $\triangle \mathrm{AF'F}$에서 제이코사인법칙을 적용하면

$\cos\theta = \dfrac{1^2 + 3^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 1 \cdot 3} = -\dfrac{1}{3}$

18. 지수함수와 로그함수 **정답 ⑤**

$f(x) = |2^x - 2|$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 그래프에서 $c > 1$일 수도 있다. (거짓)

ㄴ. $0 < a < b < c$와 $f(a) > f(b) > f(c)$를 만족하므로 f는 감소함수이다. 즉, $0 < a < 1$이다.
따라서 이 범위 내에서 $0 < f(a) < 1$이므로
$0 < f(a) + f(b) + f(c) < 3$ (참)

ㄷ. $0 < a < 1$이므로 $f(x) = a$는 서로 다른 두 실근을 갖 는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

19. 확률 **정답 ③**

입교 전에 확률과 통계 과목을 배웠을 사건을 A,

통계학 성적이 A학점일 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{10}$, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{60}{100} \times \dfrac{20}{100} + \dfrac{40}{100} \times \dfrac{10}{100} = \dfrac{16}{100}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

$$= \frac{\dfrac{60}{100} \times \dfrac{20}{100}}{\dfrac{16}{100}}$$

$$= \frac{12}{16}$$

$$= \frac{3}{4}$$

20. 지수함수와 로그함수 정답 ④

$\log_2\left[\dfrac{f(x)}{[f(x)]}\right] = 0$이므로 $\left[\dfrac{f(x)}{[f(x)]}\right] = 1$

$1 \leqq \dfrac{f(x)}{[f(x)]} < 2$ ……………… ㉠

$\log_2 x = n + \alpha$(단, n은 정수, $0 \leqq \alpha < 1$)라 하면

$[f(x)] = n$이므로 ㉠에 대입하면 $1 \leqq \dfrac{n+\alpha}{n} < 2$

그런데, $0 < x < 1$이므로 $f(x) = n + \alpha < 0$

즉, $n < 0$ $\quad (\because \alpha \geqq 0)$

그러므로 $2n < n + \alpha \leqq n$, $n < \alpha \leqq 0$

$\therefore \alpha = 0$

따라서 $f(x)$는 음의 정수 값을 갖는다.

그러므로 $x = 2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3}, \cdots$

$\therefore a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

21. 벡터 정답 ②

꼭짓점 C′과 꼭짓점 C를 연결하면 △OAB의 무게중심 G를 지난다.

$$\therefore \overrightarrow{C'G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{C'O} + \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B})$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$\overrightarrow{C'G} + \overrightarrow{CG} = 0$이므로

$\overrightarrow{C'O} + \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 0$

$-\overrightarrow{OC'} + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC'}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC'}) - \overrightarrow{OC}$
$\qquad + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = 0$

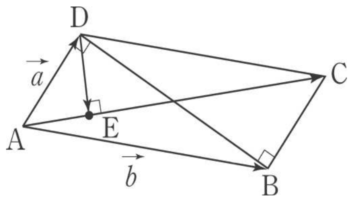
$-3\overrightarrow{OC'} + 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} = 0$

$\overrightarrow{OC'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

$\therefore\ p = \dfrac{2}{3},\ q = \dfrac{2}{3},\ r = -1$

따라서 $p + q + r = \dfrac{1}{3}$이다.

22. 벡터 정답 ②



$\overline{AC} \perp \overline{DE}$이므로 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$

$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

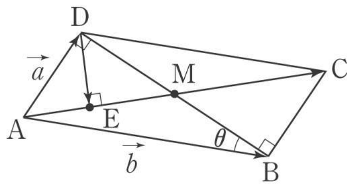
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = k(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = (k-1)\vec{a} + k\vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos A = 1 \cdot \sqrt{6} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{6}} = 1$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} &= (\vec{a} + \vec{b})\{(k-1)\vec{a} + k\vec{b}\} \\ &= (k-1)|\vec{a}|^2 + (2k-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + k|\vec{b}|^2 \\ &= (k-1) + (2k-1) + 6k \\ &= 9k - 2\end{aligned}$$

$\therefore\ k = \dfrac{2}{9}$

《다른 풀이》



$\angle ABD = \theta$라 두면 $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$, $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1}{6}}$

△ABC에서 제이코사인법칙을 적용하면

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ &= 6 + 1 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ &= 9\end{aligned}$$

$\therefore \overline{AC} = 3$

이제, $\overline{AC}$의 중점을 M이라고 두면

$\overline{AM} \cdot \overline{DE} = \overline{AD} \cdot \overline{DM}$이므로

$\dfrac{3}{2} \cdot \overline{DE} = 1 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\qquad \therefore \overline{DE} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

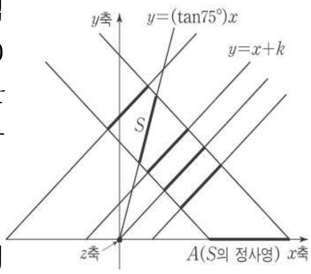
여기서 △ADE는 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리

에 의해 $\overline{\mathrm{AE}}=\frac{2}{3}$

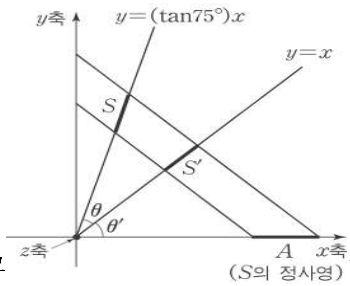
$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=k\cdot|\vec{a}+\vec{b}|=k|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=3k \qquad \therefore\ k=\frac{2}{9}$

23. 벡터 정답 ④

벡터 $\vec{v}=(1,-1,0)$에 수직인 평면은 $\beta: x-y+k=0$이라 두고, zx평면에 나타난 도형 S의 그림자를 A라고 두자.



오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 β평면의 위치에 관계없이 S의 zx평면 위의 그림자 A의 β평면 위로의 정사영의 크기가 일정하므로 $\beta: x-y=0$이라 둬도 무방하다.



따라서 그림에서와 같이 S'은 S의 정사영이고 동시에 A의 정사영이므로

(S'의 넓이)=(S의 넓이)$\cdot\cos\theta$=(A의 넓이)$\cdot\cos\theta'$

A의 넓이$=9\pi$, $\theta=30^\circ$, $\theta'=45^\circ$ 이므로

(S'의 넓이)=(S의 넓이)$\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ (S의 넓이)$=3\sqrt{6}\pi$

24. 벡터 정답 ②

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\vec{a}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2-2\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+|\vec{a}|^2$

$|\vec{a}|^2=2\cdot\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

$=2\vec{a}(p\vec{a}+q\vec{b})$

$=2(p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b})$

(나) $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2-2\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+|\vec{b}|^2$

$|\vec{b}|^2=2\cdot\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

$=2\vec{b}(p\vec{a}+q\vec{b})$

$=2(q|\vec{b}|^2+p\vec{a}\cdot\vec{b})$

(다), (라)

$|\vec{a}|^2=6$, $|\vec{b}|^2=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$이므로

$6=2(6p-3q)$

$2=2(2q-3p)$

$\therefore\ p=3$, $q=5$

따라서 (가)+(나)+(다)+(라)$=2+2+3+5=12$

25. 지수와 로그 정답 81

$ab=12$ ··············· ㉠

$bc=8$ ··············· ㉡

㉡을 ㉠으로 나누면

$\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$이므로 $c=\frac{2}{3}a$이다.

$2^a=27$이므로 $4^c=(2^2)^{\frac{2}{3}a}=(2^a)^{\frac{4}{3}}=27^{\frac{4}{3}}=81$

$\therefore\ 4^c=81$

26. 다항함수의 적분법 정답 288

$$\int_2^6\frac{x^2(x^2+2x+4)}{x+2}dx+\int_6^2\frac{4(y^2+2y+4)}{y+2}dy$$

$$=\int_2^6\frac{x^2(x^2+2x+4)}{x+2}dx-\int_2^6\frac{4(x^2+2x+4)}{x+2}dx$$

$$=\int_2^6\frac{(x^2-4)(x^2+2x+4)}{x+2}dx$$

$$=\int_2^6(x-2)(x^2+2x+4)dx$$

$$=\int_2^6(x^3-8)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{4}-8x\right]_2^6$$

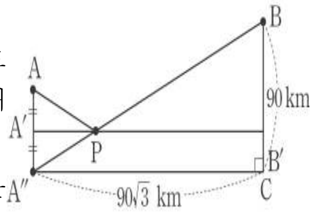
$=(324-48)-(4-16)$

$=288$

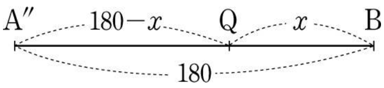
27. 수학적 기초 정답 45

A점의 직선 l에 대한 대칭점을 A″이라 두면 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값이 최소가 되는 P는 그림과 같이

$\overline{A''B}$ 위에 존재해야 한다.
$\triangle A''CB$는 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의해
$\overline{A''B}=180(\text{km})$



이제, 갑과 을이 만난 지점을 Q,
$\overline{A''Q}=180-x$, $\overline{QB}=x$라 하면



갑의 속력을 a(km/h), 을의 속력을 b(km/h)라 하면 갑과 을이 Q지점까지 이동한 시간이 같으므로

$\dfrac{180-x}{a}=\dfrac{x}{b}$ ··············· ㉠

만난 후 갑은 1시간 후에 B에 도착하였으므로

$\dfrac{x}{a}=1$ ·························· ㉡

만난 후 을은 9시간 후에 A에 도착하였으므로

$\dfrac{180-x}{b}=9$ ·················· ㉢

㉡과 ㉢을 ㉠에 대입하면
$(180-x)^2=9x^2$
$180-x=3x$ 또는 $180-x=-3x$
$x=45$ 또는 $x=-90$
$\therefore\ x=45\ (\because\ x>0)$

28. 수열 정답 544

$a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$에서
$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$
$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$
이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 $a_2-a_1=2$인 등차수열이다.

$\therefore\ a_n=2n-1$ ··············· ㉠

$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=S_n=(4n^2-1)2^n+1$

이므로
$$\begin{aligned}a_nb_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(4n^2-1)2^n+1\\&\quad-[\{4(n-1)^2-1\}\cdot 2^{n-1}+1]\\&=2^{n-1}(2n+5)(2n-1)\end{aligned}$$

따라서 ㉠에 의해 $b_n=2^{n-1}(2n+5)$
$\therefore\ b_6=2^5\times17=544$

29. 확률분포와 통계적 추정 정답 28

모두 100그루의 소나무들을 조사하였으므로
$a+b=100$ ··············· ㉠
신뢰구간의 길이가 서로 같으므로

$2\times1.96\times\dfrac{3}{\sqrt{a}}=2\times1.96\times\dfrac{4}{\sqrt{b}}$

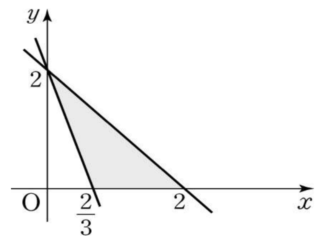
$3\sqrt{b}=4\sqrt{a}$
$9b=16a$ ··············· ㉡
㉠과 ㉡을 연립하면
$a=36,\ b=64$
$\therefore\ |a-b|=|36-64|=28$

30. 벡터 정답 16

주어진 연립방정식

$$\begin{cases}y\geq-3x+2\\y\leq-x+2\\y\geq0\end{cases}$$

을 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



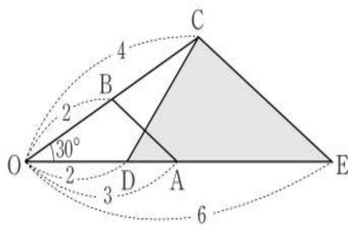
i) $3x+y\geq2$ 이므로 $\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}y\geq1$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\frac{3}{2}x\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\right)+\frac{1}{2}y(2\overrightarrow{OB})\\&=\frac{3}{2}x\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}y\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

ii) $x+y\leq2$ 이므로 $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y\leq1$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\frac{x}{2}(2\overrightarrow{OA})+\frac{y}{2}(2\overrightarrow{OB})\\&=\frac{x}{2}\overrightarrow{OE}+\frac{y}{2}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

따라서 조건을 만족하는 영역은 그림에서 어두운 부분이다.



$S=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}\times\overrightarrow{\mathrm{OE}}\times\sin30^{\circ}$

$-\frac{1}{2}\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}\times\overrightarrow{\mathrm{OD}}\times\sin30^{\circ}$

$=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{1}{2}=4$

$\therefore\ S^2=16$