2008학년도 해군사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시

수리 영역

인 문

성명	

수험번호						

○ 먼저 문제지에 성명과 수험 번호를 정확하게 기입하시오.

○ 답안지에 성명과 수험 번호를 표기하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 이 포함된 경우에는 0 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오. (각 물음의 끝에 표시된 배점을 참조하시오)

1. 1 이 아닌 두 양수 a, b 에 대하여 $a \cdot \ b=1$ 이 성립할 때, $\log_a \frac{1}{ab}$ 의 값은? [2점]

① -9 ② -3 ③ 3

④ 5 ⑤ 9

2. 행렬 $= \begin{matrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{matrix}\Bigg)$ 와 이차 정사각행렬 B 에 대하여 행렬 ABA^{-1} 의 역행렬이 A 일 때, 행렬 B 의 모든 성분의 합은? [2점]

① -4 ② -2 ③ 2

④ 4 ⑤ 8

3. 서로 독립인 두 사건 , B에 대하여 P $A\cup B) = \frac{4}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B\ \ ) = \frac{1}{3}$ 일 때, $\mathrm{P}(A)$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{8}$

4. 1 보다 큰 실수 x 에 대하여 $\log x$ 의 가수를 α 라 하면 $(\log x)^2 + \alpha^2 = 8$ 이 성립한다.
이 때, $\log x$ 의 값은? [3점]

① $1+\ \ 2$　② $2\sqrt{2}$　③ $1+\sqrt{3}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{8}{3}$

5. 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{\quad\}$이 있다.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1}\, a_n = \frac{1}{4}\Big)^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 때, $\displaystyle \overset{\infty}{\underset{n=1}{}} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{17}{6}$ ② $\frac{19}{6}$ ③ $\frac{7}{2}$

④ $\frac{23}{6}$ ⑤ $\frac{25}{6}$

6. 주머니 속에 1 부터 5 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5 개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수의 최소값을 확률변수 라 하자. 이 때, X 의 평균은? [3점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

7. 수열 a }의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 $_n$ 은

$$S_n = n^3 + pn$$

이고, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $b_1 = a_1$
(나) $b_n = a_n - a_{n-1}$ $(n \geqq 2)$

수열 $\{b_n\}$이 등차수열일 때, 상수 p 의 값은? [3점]

① 3　　② $\frac{1}{3}$　　③ $-\frac{1}{3}$

④ -1　　⑤ -3

8. x, y 에 대한 연립일차방정식

$$\begin{matrix} a & 1 \\ -2b-3 & b+2 \end{matrix}\Bigg)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 3 \end{pmatrix}$$

이 해를 갖지 <u>않도록</u> 하는 두 정수 a, b 를 정할 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

① -10　　② -6　　③ -2

④ 1　　⑤ 5

9. 원 $+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\log_{\frac{1}{2}}(y+1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$ 의 최소값을 m이라 할 때, 2^m 의 값은? (단, $y=-1$이다.) [4점]

① 3　② $\frac{3}{2}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$

10. 모든 항이 양수인 수열 $a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을

$$b_n=a_{n+1}-a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. $a_n=b_n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이면 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.
ㄴ. 수열 $2^b\}$ 이 등비수열이면 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
ㄷ. 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 이 공차가 0 이 아닌 등차수열이면 $\{b_n\}$ 은 등비수열이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 세 수열 a }, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$을 만족한다.
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 수렴하고, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $\{c_n\}$이 수렴하면 $\alpha = \beta$ 이다.

ㄴ. $\{c_n\}$이 발산하면 $\alpha < \beta$ 이다.

ㄷ. $\alpha = \beta = 0$ 이면 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{}} c_n$ 은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

12. 다음 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $1 < a < b$ 이고 $0 < \log_a c < 1$이면 $\log_b c > \log_b a$이다.

ㄴ. $0 < a < 1 < b$ 이고 $0 < \log_a c < 1$이면 $\log_b a < \log_b c$이다.

ㄷ. $0 < a < b < 1$ 이고 $\log_a c < 0$이면 $\log_a b < \log_c b$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 한 개의 주사위를 번 던질 때, 1 의 눈이 나오는 횟수를 a, 2 의 눈이 나오는 횟수를 b 라 하자. $a-b=1$ 일 확률은? [4점]

① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{5}{27}$ ③ $\frac{2}{9}$
④ $\frac{19}{81}$ ⑤ $\frac{7}{27}$

14. n이 자연수일 때, $2n$명의 학생을 두 명씩 n개의 조로 나누는 방법의 수를 a 이라 하자.

이 때, $\frac{a_{11}}{a_{10}}$ 의 값은? [3점]

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

15. 두 수열 }, $\{b_n\}$ 이 모든 항이 양수인 등차수열일 때, 다음은 수열 $a_n\, b_n \}$ 이 등차수열이면

$\frac{b_n}{a_n} =$ $\boxed{\text{(가)}}$ 임을 증명한 것이다.

<증명>

수열 $\left\{\sqrt{a_n\, b_n}\right\}$ 이 등차수열이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n\, b_n + \sqrt{\ a_{n+2}\, b_{n+2}} = \sqrt{\ \boxed{\text{(나)}}} \qquad \cdots\cdots$$

또, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 등차수열이므로

$$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} \quad \cdots$$

$$b_n + b_{n+2} = 2b_{n+1} \ \cdots\cdots \ ㉢$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입한 후, 양변을 제곱하여 정리하면

$$2\sqrt{a_n\, b_n\, a_{n+2}\, b_{n+2}} = a_n\, b_{n+2} + a_{n+2}\, b_n$$

다시 위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$a_{n+2}\, b_n = \boxed{\text{(다)}} \ \cdots\cdots \ ㉣$$

따라서 ㉡, ㉢, ㉣에서

$$\frac{b_n}{a_n} = \boxed{\text{(가)}}$$

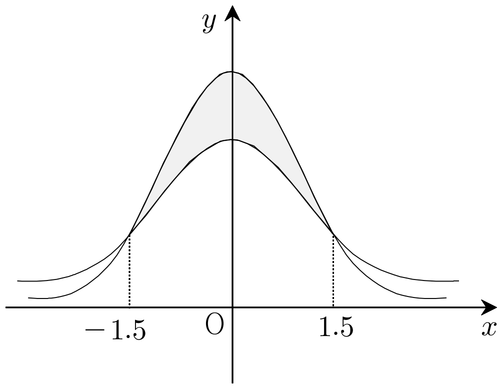
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$	$2\,a_{n+1}\,b_{n+1}$	$2\,a_n\,b_{n+2}$
②	$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$	$4\,a_{n+1}\,b_{n+1}$	$a_n\,b_{n+2}$
③	$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$	$2\,a_{n+1}\,b_{n+1}$	$2\,a_n\,b_{n+2}$
④	$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$	$4\,a_{n+1}\,b_{n+1}$	$a_n\,b_{n+2}$
⑤	$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$	$4\,a_{n+1}\,b_{n+1}$	$2\,a_n\,b_{n+2}$

16. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ \sigma\ )$을 따르고, 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다. 두 확률변수 X, Z의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 다음 조건이 모두 성립한다.

(가) $\sigma > 1$
(나) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 $x=-1.5$, $x=1.5$ 일 때 만난다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 0.096 일 때, X의 표준편차 σ의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]



	$\mathrm{P}(0 \leq \quad \leq z)$
1.2	0.385
1.5	0.433
2.0	0.477

① 1.20 ② 1.25 ③ 1.50
④ 1.75 ⑤ 2.00

17. 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $a_n\}$에 대하여 S_n, T_n을 다음과 같이 정의하자.

$$S_n = {}_{k=1}^{n} a_k, \qquad T_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. $a_n + S_n = 2$ (단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)
ㄴ. $T_n = a_{n-1}$ (단, $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

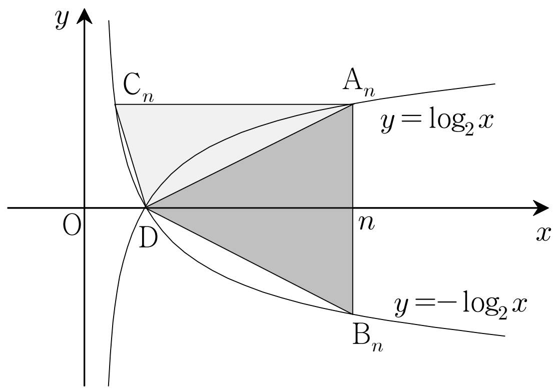
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 어느 농장에서 생산된 포도송이의 무게는 평균 600g, 표준편차 100g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 생산된 포도송이 중 임의로 100송이를 추출할 때, 포도송이의 무게가 636g 이상인 것이 42송이 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

	$\mathrm{P}(0 \leqq \quad \leqq z)$
0.36	0.14
1.00	0.34
1.25	0.39
2.00	0.48

① 0.02 ② 0.11 ③ 0.14
④ 0.16 ⑤ 0.36

19. 그림과 같이 두 곡선 $y=\log\ x$, $y=-\log_2 x$가 직선 $x=n$ (n은 2 이상의 자연수)과 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하고, 점 A_n을 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=-\log_2 x$와 만나는 점을 C_n이라 하자. 점 $\mathrm{D}(1, 0)$에 대하여 두 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{D}$, $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}$의 넓이를 각각 S_n, T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{S_n}$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{7}{8}$ ⑤ 1

20. [표 1]은 0개의 행과 20개의 열로 이루어진 표에 자연수를 규칙적으로 적어놓은 것이다.

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	$\cdots$	제k열	$\cdots$	제20열
제1행	1	2	3	4	5	$\cdots$	k	$\cdots$	20
제2행	2	2	3	4	5	$\cdots$	k	$\cdots$	20
제3행	3	3	3	4	5	$\cdots$	k	$\cdots$	20
제4행	4	4	4	4	5	$\cdots$	k	$\cdots$	20
제5행	5	5	5	5	5	$\cdots$	k	$\cdots$	20
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
제k행	k	k	k	k	k	$\cdots$	k	$\cdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
제20행	20	20	20	20	20	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	20

[표 1]

[표 2]는 [표 1]의 홀수 번째 행에 있는 수와, 짝수 번째 열에 있는 수를 모두 지운 것이다.

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	$\cdots$	제20열
제1행							
제2행	2		3		5	$\cdots$	
제3행							
제4행	4		4		5	$\cdots$	
제5행							
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	
제20행	20		20		20	$\cdots$	

[표 2]

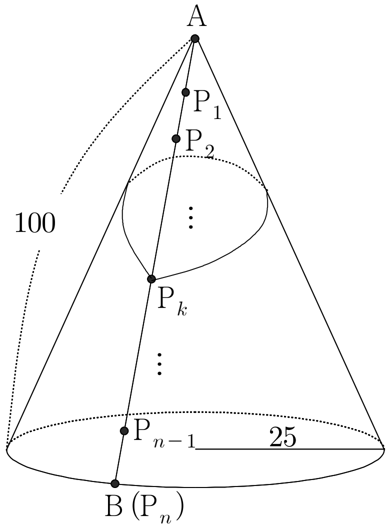
[표 2]에 남아 있는 모든 자연수의 합은? [4점]

① 1024 ② 1155 ③ 1225

④ 1280 ⑤ 1385

21. 밑면의 반지름의 길이가 5, 모선의 길이가 100인 원뿔이 있다. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 모선 AB를 n등분한 점 중 꼭지점 A에 가까운 점부터 차례로 P , P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}이라 하고, 점 B를 P_n이라 하자. 또, 점 P_k ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ n$)에서 원뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아서 점 P_k로 되돌아오는 최단 경로의 길이를 l_k라 할 때, ${}_n = {}_{k=1}^{n} l_k$라 하자.

이 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ 의 값은? [4점]



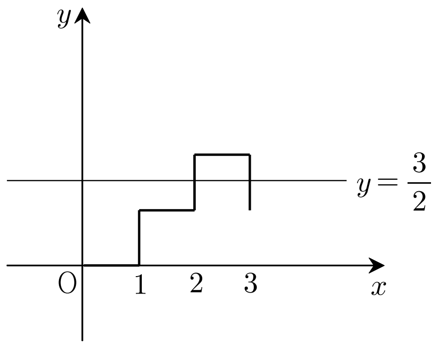
① 50 2　　② $75\sqrt{2}$　　③ $100\sqrt{2}$

④ $125\sqrt{2}$　　⑤ $150\sqrt{2}$

22. 좌표평면 위의 원점에 놓인 점 P가 개의 동전을 던질 때마다 다음과 같이 움직인다고 한다.

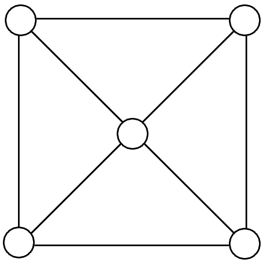
> 앞면이 나오면 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하고,
> 뒷면이 나오면 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.

예를 들어, 동전을 3번 던져서 차례로 앞면, 앞면, 뒷면이 나왔을 때 점 P가 지나간 자취는 그림과 같고, 이 자취는 직선 $y=\frac{3}{2}$과 두 점에서 만난다. 동전을 5번 던질 때, 점 P가 지나간 자취와 직선 $y=\frac{3}{2}$이 오직 한 점에서 만날 확률은? [4점]



① $\frac{3}{32}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{5}{32}$ ④ $\frac{7}{32}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

23. 그림과 같이 정사각형과 서로 합동인 개의 원으로 이루어진 놀이판이 있다. 각 원의 중심은 정사각형의 네 꼭지점과 두 대각선이 만나는 점이다. 서로 다른 5개의 돌 중에서 3개를 뽑아 3개의 원 안에 각각 1개씩 올려놓는 방법의 수는? (단, 회전하여 같은 경우는 한 가지로 계산한다.) [4점]



① 150 ② 160 ③ 170 ④ 190 ⑤ 200

24. 어떤 영화의 흥행수입을 분석한 결과, 개봉한 후 50일째까지의 총 흥행수입이 400억 원이고, 개봉한 후 100일째까지의 총 흥행수입이 640억 원이라고 한다.

이 영화를 개봉한 후 n일째까지의 총 흥행수입을 $f(n)$ (억 원)이라 하면

$$f(n) = a(1 - b\ \ ) \quad (\text{단, } a, b\text{는 양의 상수, } n\text{은 자연수})$$

이 성립한다고 하자. 이 영화의 총 흥행수입이 처음으로 800억 원을 넘어서는 날은 개봉한 후 며칠 째인가? (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$로 계산한다.) [4점]

① 140일 ② 150일 ③ 160일 ④ 170일 ⑤ 180일

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 방정식 $(1-\log\ x)^2-2(1-\log_2 x)-4=0$의 두 근을 각각 α, β라 할 때, $\alpha^3\beta^3$의 값을 구하시오. [3점]

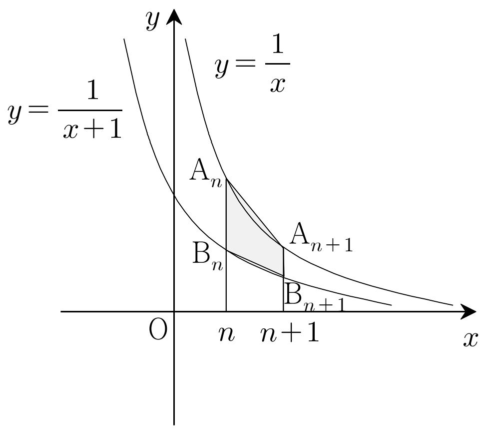
26. 자연수 n과 행렬 $= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 A^n의 모든 성분의 합을 S_n이라 하자. 이 때, $\log_2 S_{50}$의 값을 구하시오. [3점]

27. 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\}$이 있다.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = [\,a_n\,] + \frac{n}{2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$$

이 때, a_{39}의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

28. 두 곡선 $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x+1}$과 직선 $x = n$ (n은 자연수)이 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하고, 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 $_n$이라 하자. 이 때, $100 \overset{\infty}{\underset{n=1}{}} S_n$의 값을 구하시오. [4점]



29. 그림과 같이 4개의 가로줄과 3개의 세로줄로 이루어진 전화기의 숫자판이 있다. 이 때, 다음 조건을 모두 만족시키면서 숫자판에 있는 숫자를 누르는 방법의 수를 구하시오. [4점]

	2	3
4	5	6
7	8	9
*	0	#

(가) *, # 을 제외한 10개의 숫자 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 누른다. 이 때, 누르는 순서가 다르면 서로 다른 경우이다.
(나) 4개의 가로줄에서는 각각 숫자를 1개씩 누른다.
(다) 1개의 세로줄에서는 숫자를 2개 누르고, 나머지 2개의 세로줄에서는 각각 숫자를 1개씩 누른다.

30. 자연수 n에 대하여 $2.52^{\ 0n}$의 최고자리의 숫자를 a_n이라 하자.
예를 들어, $2.52^{10} \risingdotseq 1.03 \times 10^4$, $2.52^{20} \risingdotseq 1.06 \times 10^8$, $2.52^{30} \risingdotseq 1.10 \times 10^{12}$이므로 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$이다.
$a_n > 1$을 만족시키는 자연수 n의 최소값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 2.52 = 0.4014$로 계산한다.) [4점]