수리 영역(문과)

1. ⑤	2. ①	3. ⑤	4. ③	5. ①
6. ③	7. ④	8. ②	9. ④	10. ③
11. ②	12. ②	13. ④	14. ④	15. ④
16. ②	17. ⑤	18. ②	19. ①	20. ⑤
21. ①	22. ③	23. ①	24. ③	25. 16
26. 101	27. 362	28. 75	29. 288	30. 22

1. 지수와 로그 정답 ⑤

$\cdot^{5}\ b=1$에서

$a^2\cdot b^{\frac{1}{5}}=1$

양변을 5제곱하면

$a^{10}\cdot b=1 \qquad \therefore b=a^{-10}$

이 때, $ab=a\cdot a^{-10}=a^{-9}$이므로 주어진 식은

$\log_a \frac{1}{ab}=\log_a \frac{1}{a^{-9}}=\log_a a^9=9$

2. 행렬 정답 ①

행렬 BA^{-1}의 역행렬이 A이므로

$(ABA^{-1})A=E$

$AB=E$

즉, A의 역행렬이 B이므로

$B=A^{-1}=\frac{1}{-4+5}\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 B의 모든 성분의 합은

$-2+(-5)+1+2=-4$

3. 확률 정답 ⑤

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$

또한 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{4}{5}-\frac{1}{3}$

$=\frac{12-5}{15}$

$=\frac{7}{15}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$

$\frac{4}{5}=\mathrm{P}(A)+\frac{7}{15}-\frac{7}{15}\mathrm{P}(A)$

$=\frac{8}{15}\mathrm{P}(A)+\frac{7}{15}$

$\therefore \frac{8}{15}\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5}-\frac{7}{15}$

$=\frac{5}{15}$

$=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\times\frac{15}{8}=\frac{5}{8}$

4. 지수와 로그 정답 ③

$0\leqq\alpha<1$이므로 $0\leqq\alpha^2<1$

$(\log x)^2+\alpha^2=8$에서 $7<(\log x)^2\leqq 8$

$\therefore \log x=2+\alpha$ ……………………………… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$(2+\alpha)^2+\alpha^2=8$

$2\alpha^2+4\alpha+4=8$

$\alpha^2+2\alpha-2=0$

$\alpha=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$

$\therefore \alpha=-1+\sqrt{3}\,(\because\ 0\leqq\alpha<1)$

$\therefore \log x=2+(-1+\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$

5. 수열의 극한 정답 ①

$a_2a_1=\frac{1}{4}$에서 $a_2=\frac{1}{4a_1}=\frac{1}{8}=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$a_3a_2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$에서 $a_3=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{a_2}=8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=2\cdot\frac{1}{4}$

$a_4a_3=\left(\frac{1}{4}\right)^3$에서 $a_4=\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{a_3}=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3$

$a_5a_4=\left(\frac{1}{4}\right)^4$에서 $a_5=\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\frac{1}{a_4}=\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\frac{1}{2}\cdot4^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$

$a_6a_5=\left(\frac{1}{4}\right)^5$에서 $a_6=\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\frac{1}{a_5}=\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot2\cdot4=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4$

$a_7a_6=\left(\frac{1}{4}\right)^6$에서 $a_7=\left(\frac{1}{4}\right)^6\cdot\frac{1}{a_6}=\left(\frac{1}{4}\right)^6\cdot\frac{1}{2}\cdot4^4=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$

⋮

$\therefore a_{2n-1}=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, $a_{2n}=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}+\frac{2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=\frac{8}{3}+\frac{1}{6}$

$=\frac{17}{6}$

6. 확률변수와 통계적 추정 정답 ③

1일 때 $\mathrm{P}(X)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$X=2$일 때 $\mathrm{P}(X)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

$X=3$일 때 $\mathrm{P}(X)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$

$$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{10}$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{10}$$
$$=\frac{15}{10}$$
$$=\frac{3}{2}$$

7. 수열 정답 ④

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^3+pn-\{(n-1)^3+p(n-1)\}$

$=n^3+pn-\{n^3-3n^2+3n-1+pn-p\}$

$=3n^2-3n+(1+p)$

조건 (나)에 의해

$b_n=3n^2-3n+(1+p)-\{3(n-1)^2-3(n-1)+(1+p)\}$

$=3n^2-3n+(1+p)-\{3n^2-6n+3-3n+3+(1+p)\}$

$=6n-6$

$a_1=1+p,\ b_1=0$이므로 조건 (가)에 의해

$p=-1$

8. 행렬 정답 ②

$$\frac{a}{-2b-3}=\frac{1}{b+2}\neq\frac{2-a}{3}$$

$ab+2a=-2b-3$에서 $ab+2a+2b+3=0$

$(a+2)(b+2)=1$

$a,\ b$가 정수이므로

$a=-3,\ b=-3$ 또는 $a=-1,\ b=-1$

i) $a=-3,\ b=-3$일 경우

$$\frac{1}{b+2}\neq\frac{2-a}{3}$$

ii) $a=-1,\ b=-1$일 경우

$$\frac{1}{b+2}=\frac{2-a}{3}$$

따라서 $a=-3,\ b=-3$이므로 $a+b=-6$이다.

9. 지수함수와 로그함수 정답 ④

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(y+1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$이라 하면

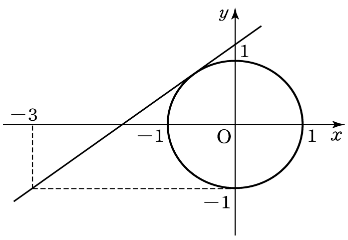
$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{y+1}{x+3}$

밑이 $\frac{1}{2}$이므로 함수 $f(x)$는 감소함수이다. 그러므로 진수가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

$\frac{y+1}{x+3}=k$로 놓으면

$y+1=k(x+3)$

이 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ -1)$을 지난다.



위의 그림에서와 같이 직선이 원에 접하려면 원의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 $kx-y+3k-1=0$까지의 거리가 반지름의 길이 1과 같아야 한다.

$\frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$

$|3k-1|=\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면

$9k^2-6k+1=k^2+1$

$8k^2-6k=0$

$2k(4k-3)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=\frac{3}{4}$

진수가 최대일 때, 즉 $k=\frac{3}{4}$일 때 함수 $f(x)$가 최솟값을 가지므로 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}=m$

$\left(\frac{1}{2}\right)^m=\frac{3}{4}$

$\therefore 2^m=\frac{4}{3}$

10. 수열 정답 ③

ㄱ. 참

$a_n=b_n$이므로 $b_n=a_{n+1}-a_n$에서 $a_n=a_{n+1}-a_n$

$\therefore 2a_n=a_{n+1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

ㄴ. 거짓

수열 $\{2^{b_n}\}$이 등비수열이면 $(2^{b_n})^2=2^{b_{n-1}}\cdot 2^{b_{n+1}}$

$\therefore 2b_n=b_{n-1}+b_{n+1}$

그러므로 수열 { }은 등차수열이다.

따라서 수열 $\{b_n\}$의 공차가 0인 경우만 수열 $\{a_n\}$이 등차

수열이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이라고 할 수 없다.

ㄷ. 참

수열 $\{\log_2 a_n\}$이 등차수열이면

$2\log_2 a_{n+1} = \log_2 a_n + \log_2 a_{n+2}$

$\log_2 {a_{n+1}}^2 = \log_2 a_n a_{n+2}$

$\therefore {a_{n+1}}^2 = a_n a_{n+2}$

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

$\therefore b_n = a_1 r^n - a_1 r^{n-1} = a_1 r^{n-1}(r-1) = a_1(r-1)\cdot r^{n-1}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $a_1(r-1)$, 공비가 r인 등비

수열이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11. 수열의 극한 정답 ②

ㄱ. 거짓

【반례】 $a_n < c_n < b_n$이므로 $a_n = \frac{n+1}{n}$, $b_n = \frac{3n+1}{n}$,

$c_n = \frac{2n+1}{n}$로 놓으면

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 3$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to\infty} b_n$

ㄴ. 참

$n\to\infty$일 때 $\{c_n\}$이 발산하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이므로 진동한다.

$\therefore \alpha < \beta$

ㄷ. 거짓

$\alpha = \beta = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$이므로 $\{c_n\}$은 수렴한다.

하지만 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$이라고 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$이 수렴하지는 않는다.

【반례】 $c_n = \frac{1}{n}$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$은 발산한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

12. 지수함수와 로그함수 정답 ②

ㄱ. 거짓

$1 < a$이고, $0 < \log_a c < 1$이면 $1 < c < a$

$b > 1$이므로 $\log_b c < \log_b a$

ㄴ. 참

$0 < a < 1$이므로 $\log_a 1 = 0 < \log_a c < 1 = \log_a a$에서

$a < c < 1$이다.

$b > 1$이므로 $\log_b a < \log_b c$

ㄷ. 거짓

$0 < a < 1$이므로 $\log_a c < 0 = \log_a 1$에서 $c > 1$이다.

양변에 밑을 $b(b < 1)$로 하는 로그를 취하면

$\log_b c < \log_b 1$

$\log_b c < 0$

밑 변환 공식에 의해 $\frac{\log_c c}{\log_c b} < 0$

$\frac{1}{\log_c b} < 0$

$\therefore \log_c b < 0$

또, $0 < a < 1$이므로 $b < 1$에서 $\log_a b > \log_a 1 = 0$

$\therefore \log_a b > \log_c b$

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

13. 확률 정답 ④

(i) $a=1$, $b=0$일 확률

$\frac{1}{6} \times \left(\frac{4}{6}\right)^3 \times 4 = \frac{16}{81}$

(ii) $a=2$, $b=1$일 확률

$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times 6 \times 2 = \frac{1}{27}$

(i), (ii)에서 $\frac{16}{81} + \frac{1}{27} = \frac{19}{81}$

14. 순열과 조합 정답 ④

$a_n = {}_{2n}C_2 \cdot {}_{2n-2}C_2 \cdot {}_{2n-4}C_2 \cdot \cdots \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{n!}$ 이므로

$$\frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{{}_{22}C_2 \cdot {}_{20}C_2 \cdot \ \cdots \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{11!}}{{}_{20}C_2 \cdot {}_{18}C_2 \cdot \ \cdots \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{10!}}$$

$$= {}_{22}C_2 \cdot \frac{1}{11} = \frac{22\cdot 21}{2\cdot 1} \cdot \frac{1}{11} = 21$$

15. 수열 정답 ④

수열 $a_n b_n$ }이 등차수열이므로 모든 자연수 n에 대하여

$\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{a_{n+2} b_{n+2}} = 2\sqrt{a_{n+1} b_{n+1}} = \sqrt{\boxed{4a_{n+1} b_{n+1}}}$ ……………………………… ㉠

또, 두 수열 $a_n\}$, $\{b_n\}$이 등차수열이므로

$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$ ……………………………… ㉡

$b_n + b_{n+2} = 2b_{n+1}$ ……………………………… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입한 후, 양변을 제곱하여 정리하면

$a\ \ b_n a_{n+2} b_{n+2} = a_n b_{n+2} + a_{n+2} b_n$

다시 위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$4a_n b_n a_{n+2} b_{n+2} = a_n{}^2 b_{n+2}{}^2 + 2a_n b_n a_{n+2} b_{n+2} + a_{n+2}{}^2 b_n{}^2$

$a_n{}^2 b_{n+2}{}^2 - 2a_n b_n a_{n+2} b_{n+2} + a_{n+2}{}^2 b_n{}^2 = 0$

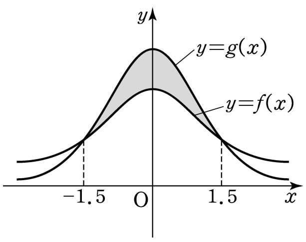
$(a_n b_{n+2} - a_{n+2} b_n)^2 = 0$

$a_{n+2} b_n = \boxed{a_n b_{n+2}}$

$\therefore \dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{b_{n+2}}{a_{n+2}} = \boxed{\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}$

16. 확률변수와 통계적 추정 정답 ②

(가)에서 σ 1이므로 위쪽에 있는 곡선이 $y=g(x)$, 아래쪽에 있는 곡선이 $y=f(x)$이다.
두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 0.096이므로



$\mathrm{PP}(-1.5 \leqq \quad \leqq 1.5) - \mathrm{P}(-1.5 \leqq X \leqq 1.5) = 0.096$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ \sigma^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(-1.5 \leqq Z \leqq 1.5) - \mathrm{P}\ \ \dfrac{-1.5}{\sigma} \leqq Z \leqq \dfrac{1.5}{\sigma}\Big) = 0.096$

$\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 1.5) - \mathrm{P}\Big(0 \leqq Z \leqq \dfrac{1.5}{\sigma}\Big) = 0.048$

$\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 1.5) = 0.433$이므로

$\mathrm{P}\Big(0 \leqq Z \leqq \dfrac{1.5}{\sigma}\Big) = 0.433 - 0.048 = 0.385$

$\therefore \dfrac{1.5}{\sigma} = 1.2$

$\therefore \sigma = \dfrac{1.5}{1.2} = 1.25$

17. 수열의 극한 정답 ⑤

$a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$S_n = \ {}^{n}_{k=1} a_k = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}$

$= 2\ \ 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\Big\}$

$T_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$

$= \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} - 2\left\{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$= 2 - 2 + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ㄱ. 참

$a_n + S_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\left\{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

$= \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 2$

ㄴ. 참

$T_n = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} = a_{n-1}$

ㄷ. 참

$S_n + T_n = 2\left\{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = 2$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$

$= \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

18. 확률변수와 통계적 추정 정답 ②

포도송이의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(600,\ 100^2)$을 따른다.
포도송이의 무게가 636g 이상일 확률은

$\mathrm{P}(X \geqq 636) = \mathrm{P}\Big(Z \geqq \ \dfrac{36}{100}\Big)$

$= \mathrm{P}(Z \geqq 0.36)$

$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 0.36)$

$= 0.5 - 0.14 = 0.36$

따라서 임의 추출된 100송이 중 636g 이상인 포도송이의 개수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.36)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(Y) = 100 \times 0.36 = 36$

$\quad \mathrm{V}(Y) = 100 \times 0.36 \times 0.64 = (4.8)^2$

따라서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(36,\ (4.8)^2)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y \geqq 42) = \mathrm{P}\Big(Z \geqq \dfrac{6}{4.8}\Big)$

$= \mathrm{P}(Z \geqq 1.25)$

$0.5-\mathrm{P}(0\leq \quad \leq 1.25)$
$=0.5-0.39=0.11$

19. 지수함수와 로그함수 정답 ①

$\log\ n=-\log_2 x$에서 $x=\dfrac{1}{n}$ 이므로

$\mathrm{C}_n\ \dfrac{1}{n},\ \log_2 n\Big)$

또, $\mathrm{A}_n(n,\ \log_2 n)$, $\mathrm{B}_n(n,\ -\log_2 n)$, $\mathrm{D}(1,\ 0)$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot 2\log_2 n\cdot(n-1)$$
$$=(n-1)\log_2 n$$
$$T_n=\frac{1}{2}\cdot\left(n-\frac{1}{n}\right)\cdot\log_2 n$$
$$=\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)\log_2 n$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)\log_2 n}{(n-1)\log_2 n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n}}{2(n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}$$

20. 수열 정답 ⑤

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	19	20
1												
2	2		3		5		7		9	…	19	
3												
4	4		4		5		7		9		19	
5												
6	6		6		6		7		9		19	
7												
8	8		8		8		8		9		19	
	⋮											
20	20		20		20		20		20		⋮	

위의 표에서 대각선을 기준으로 위쪽에 있는 수와 아래쪽에 있는 수를 나누어 생각하면 위쪽에 있는 수들의 합은

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\dots+9\cdot19=\sum_{k=1}^{9}k(2k+1)$$

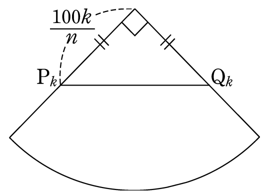
아래쪽에 있는 수들의 합은

$$1\cdot2+2\cdot4+3\cdot6+\dots+10\cdot20=\sum_{k=1}^{10}k\cdot2k$$

따라서 구하는 자연수의 합은

$$\sum_{k=1}^{9}k(2k+1)+\sum_{k=1}^{10}k\cdot2k$$
$$=\sum_{k=1}^{9}(2k^2+k)+\sum_{k=1}^{10}2k^2$$
$$=2\cdot\frac{9\cdot10\cdot19}{6}+\frac{9\cdot10}{2}+2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}$$
$$=570+45+770$$
$$=1385$$

21. 수열의 극한 정답 ①



밑면인 원의 둘레의 길이는 50π 이므로 옆면인 부채꼴의 중심각의 크기를 x라 하면

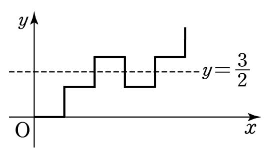
$$200\pi\cdot\frac{x}{360^\circ}=50\pi$$
$$\therefore\ x=90^\circ$$

$\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{100}{n}\cdot k$이고, 점 P_k에서 원뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아서 점 P_k로 되돌아오는 최단 경로는 오른쪽 그림의 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$와 같으므로

$$l_k=\ 2\cdot\frac{100}{n}\cdot k=\frac{100\sqrt{2}\,k}{n}$$
$$\therefore\ S_n=\sum_{k=1}^{n}l_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{100\sqrt{2}\,k}{n}$$
$$=\frac{100\sqrt{2}}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=50\sqrt{2}(n+1)$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{50\sqrt{2}(n+1)}{n}=50\sqrt{2}$$

22. 확률 정답 ③

동전을 5번 던질 때, 점 P가 지나간 자취와 직선 $y=\dfrac{3}{2}$이 오직 한 점에서 만나려면 다음 그림의 1 경우를 제외하고 뒷면이 한 번 이하로 나와야 한다.



뒷면이 1번, 앞면이 4번 나오는 경우는 5가지, 앞면이 5번 나오는 경우는 1가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{5+1-1}{2^5}=\frac{5}{32}$$

23. 경우의 수 정답 ①

5개의 돌 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는

$_5C_3 \ \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$

(i) 가운데 원에 돌을 놓는 경우

가운데 원에 놓을 돌을 뽑는 경우의 수는 $_3C_1$이고, 나머지 4개의 원 중 2개의 원에 돌을 놓는 방법의 수는 이웃하게 놓는 2가지와 이웃하지 않게 놓는 1가지가 있으므로

$_3C_1\times(2+1)=9$

(ii) 가운데 원에 돌을 놓지 않는 경우

나머지 4개의 원 중 3개의 원에 돌을 놓으면 되므로

$3!=6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10(9+6)=150$

24. 지수와 로그

정답 ③

$f(50)=a(1-b^{0})=400$ ………………………… ㉠

$f(100)=a(1-b^{100})=640$ ………………………… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$$\frac{a(1-b^{100})}{a(1-b^{50})}=\frac{640}{400}$$

$$\frac{(1-b^{50})(1+b^{50})}{1-b^{50}}=1.6$$

$1+b^{50}=1.6$

$\therefore\ b^{50}=0.6$

㉠에 대입하면

$a(1-0.6)=400$

$\therefore\ a=1000$

$\therefore\ f(n)=1000(1-0.6^{\frac{n}{50}})(\because\ b=0.6^{\frac{1}{50}})$

$1000(1-0.6^{\frac{n}{50}})\geqq 800$에서

$1-0.6^{\frac{n}{50}}\geqq 0.8$

$0.6^{\frac{n}{50}}\leqq 0.2$

양변에 상용로그를 취하면

$$\frac{n}{50}\log\frac{6}{10}\leqq\log\frac{2}{10}$$

$$\frac{n}{50}(\log 2+\log 3-1)\leqq\log 2-1$$

$$-0.22\cdot\frac{n}{50}\leqq-0.70$$

$n\geqq 159.\ldots$

따라서 총 흥행 수입이 처음으로 800억을 넘어서는 날을 개봉한 후 160일째이다.

25. 지수함수와 로그함수

정답 16

$3(1-\log_2 x)^2-2(1-\log_2 x)-4=0$에서

$1-\log_2 x=$ 라 하면

$3X^2-2X-4=0$

x에 대한 방정식의 두 근이 α, β이므로 X에 대한 방정식의 두 근을 $1-\log_2\alpha$, $1-\log_2\beta$이다.

근과 계수의 관계에 의해

$$(1-\log_2\alpha)+(1-\log_2\beta)=\frac{2}{3}$$

$$2-\log_2\alpha-\log_2\beta=\frac{2}{3}$$

$$\log_2\alpha\beta=\frac{4}{3}$$

$\therefore\ \alpha\beta=2^{\frac{4}{3}}$

$\therefore\ \alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3$

$=\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^3$

$=2^4=16$

26. 수열

정답 101

$A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$에서 $S_1=8=2^3$

$A^2=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&6\\6&10\end{pmatrix}$에서 $S_2=32=2^5$

$A^3=\begin{pmatrix}10&6\\6&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36&28\\28&36\end{pmatrix}$에서 $S_3=128=2^7$

$A^4=\begin{pmatrix}36&28\\28&36\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}136&120\\120&136\end{pmatrix}$에서 $S_4=512=2^9$

$\vdots$

$S_n=2^{2n+1}$이므로 $S_{50}=2^{101}$

$\therefore\ \log_2 S_{50}=\log_2 2^{101}=101$

27. 수열

정답 362

$a_1=1$

$$a_2=[a_1]+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$a_3=[a_2]+\frac{2}{2}=1+1=2$$

$$a_4=[a_3]+\frac{3}{2}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

$$a_5=[a_4]+\frac{4}{2}=3+2=5$$

$$a_6=[a_5]+\frac{5}{2}=5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$$

$= [a_6] + \frac{6}{2} = 7 + 3 = 10$

$\vdots$

$a_{2n-1} = 1 + \overset{n-1}{\underset{k=1}{}} (2k-1)$

$\therefore\ a_{39} = 1 + \sum_{k=1}^{19} (2k-1)$

$= 1 + 2 \times \frac{19 \times 20}{2} - 19$

$= 362$

28. 수열의 극한

정답 75

$\mathrm{A}_n\ n,\ \frac{1}{n}\Big)\ \mathrm{B}_n\Big(n,\ \frac{1}{n+1}\Big)\ \mathrm{A}_{n+1}\Big(n+1,\ \frac{1}{n+1}\Big)$

$\mathrm{B}_{n+1}\Big(n+1,\ \frac{1}{n+2}\Big)$이므로

$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

$\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

${}_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2n+2}{n(n+1)(n+2)}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{n(n+2)}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore\ 100 \sum_{n=1}^{\infty} S_n = 100 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} S_k$

$= 100 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= 50 \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$= 50 \times \frac{3}{2}$

$= 75$

29. 순열과 조합

정답 288

각 행에서 1개씩 누르므로 0은 반드시 눌러야 한다.
나머지 1부터 9까지의 숫자 중에서 3개를 누르는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 1열에서 2개, 2열에서 0개, 3열에서 1개 누르는 경우
$({}_3\mathrm{C}_2 \times {}_1\mathrm{C}_0 \times {}_1\mathrm{C}_1) \times 4! = 3 \times 1 \times 1 \times 24 = 72$

(ii) 1열에서 1개, 2열에서 1개, 3열에서 1개 누르는 경우
$({}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1) \times 4! = 3 \times 2 \times 1 \times 24 = 144$

(iii) 1열에서 1개, 2열에서 0개, 3열에서 2개 누르는 경우
$({}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_0 \times {}_2\mathrm{C}_2) \times 4! = 3 \times 1 \times 1 \times 24 = 72$

(i), (ii), (iii)에서 $72 + 144 + 72 = 288$

30. 지수와 로그

정답 22

$2.52^{10n} = a \times 10^k (1 \leqq a \quad 10,\ k$는 자연수)이라 하자.
$a_n > 1$이려면 최고자리의 숫자가 2 이상이어야 하므로
$2.52^{10n} \geqq 2 \times 10^k$을 만족하는 n의 최솟값을 구하면 된다.
$2.52^{10n} \geqq 2 \times 10^k$의 양변에 상용로그를 취하면

$10n\log 2.52 \geqq \log 2 + k$

$10n \times 0.4014 \geqq k + 0.3010$

$4n + 0.014n \geqq k + 0.3010$

$k = 4n,\ 0.014n \geqq 0.3010$

$\therefore\ n \geqq \frac{0.3010}{0.014} = 21.5$

따라서 자연수 n의 최솟값은 22이다.

수리 영역(이과)

1. ⑤	2. ①	3. ①	4. ③	5. ④
6. ③	7. ④	8. ②	9. ⑤	10. ⑤
11. ④	12. ②	13. ②	14. ④	15. ④
16. ②	17. ⑤	18. ②	19. ①	20. ⑤
21. ①	22. ③	23. ①	24. ③	25. 16
26. 21	27. 128	28. 299	29. 11	30. 22

1. 지수와 로그 정답 ⑤

$\cdot^{5}\quad b=1$에서

$a^2\cdot b^{\frac{1}{5}}=1$

양변을 5제곱하면

$a^{10}\cdot b=1 \qquad \therefore b=a^{-10}$

이 때, $ab=a\cdot a^{-10}=a^{-9}$이므로 주어진 식은

$\log_a \frac{1}{ab}=\log_a \frac{1}{a^{-9}}=\log_a a^9=9$

2. 행렬 정답 ①

행렬 BA^{-1}의 역행렬이 A이므로

$(ABA^{-1})A=E$

$AB=E$

즉, A의 역행렬이 B이므로

$B=A^{-1}=\frac{1}{-4+5}\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은

$-2+(-5)+1+2=-4$

3. 방정식과 부등식 정답 ①

$[x]^3-6[x]^2+11[x]-6\geqq 0$

$\Leftrightarrow([x]-1)([x]-2)([x]-3)\geqq 0$

$\Leftrightarrow 1\leqq [x]\leqq 2$ 또는 $[x]\geqq 3$

$[x]$는 정수이므로

$[x]=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

$\therefore x\geqq 1$

따라서 부등식을 만족시키는 모든 실수 x의 집합은

$\{x|x\geqq 1\}$

4. 다항함수의 적분법 정답 ③

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)-3$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-3$

$\therefore f(0)=3$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)+h(1+h)-3-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to 0}(1+h)$$

$$=f'(0)+1=2$$

$\therefore f'(0)=1$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+xh(x+h)-3-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to 0}x(x+h)$$

$$=f'(0)+x^2=1+x^2$$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3+x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=C=3$이므로

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x+3$

$\therefore f(3)=\frac{1}{3}\cdot 27+3+3=15$

5. 다항함수의 적분법 정답 ④

$$\int_{a}^{a_{n+1}} x^2dx=14\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{3}(a_{n+1}{}^3-a_n{}^3)=14\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_{n+1}{}^3-a_n{}^3=42\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$b_n=a_n{}^3$이라 하면

$$b_{n+1}-b_n=42\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n{}^3=b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}42\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=1+\frac{42\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}\quad(\because\ b_1=a_1{}^3=1)$$

$$=1+63\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=64-63\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n{}^3=\lim_{n\to\infty}b_n=64$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=4$

6. 이차곡선

정답 ③

F′Q 8이고, $\overline{\mathrm{F'Q}}+\mathrm{FQ}=14$이므로

$\overline{\mathrm{FQ}}=6$

$\overline{\mathrm{OF}}=\quad 100-75=5$이므로 $\mathrm{FF'}=10$

따라서 $\triangle\mathrm{QF'F}$는 $\angle\mathrm{Q}=90°$인 직각삼각형이다.

$\mathrm{FP}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{FP}}=20$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=12-x$

$\triangle\mathrm{PQF}$에서 $x\ \ =(12-x)^2+6^2$

$24x=180$

$\therefore x=\ \begin{matrix}15\\2\end{matrix}$

7. 벡터

정답 ④

ㄱ. 거짓

BD의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

ㄴ. 참

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AD}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AE}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{AE}}|\cos 60°=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$

이 때, $\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\frac{1}{2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|>|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|>|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AD}}>\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

ㄷ. 참

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos 60°$

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AE}}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{AE}}|\cos 90°=0$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AC}}>\overrightarrow{\mathrm{AD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

8. 다항함수의 적분법

정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\ {}_{n}=\ {}^{\infty}_{k=1}\,f\ \ \frac{k-1}{n}\Big)\frac{1}{n}=\ \ {}^{1}_{0}f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}B_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{1-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}=\int_0^1\{1-f(x)\}dx$$

ㄱ. 참

$$\lim_{n\to\infty}(A_n+B_n)=\lim_{n\to\infty}A_n+\lim_{n\to\infty}B_n$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\{1-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^1 1\,dx=1$$

ㄴ. 참

$$\lim_{n\to\infty}B_n=\int_0^1\{1-f(x)\}dx=\int_0^1(1-x^3)dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

ㄷ. 거짓

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}(A_n-B_n)=\lim_{n\to\infty}A_n-\lim_{n\to\infty}B_n$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

9. 함수의 극한과 연속성

정답 ⑤

ㄱ. 거짓

$$\lim_{x\to 0}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 2+0}f(x)=3$$

ㄴ. 참

$$\lim_{x\to 1-0}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 3-0}f(x)=2$$

$$\lim_{x\to 2+0}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 3-0}f(x)=2$$

$$\therefore\lim_{x\to 1-0}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 2+0}(f\circ f)(x)=2$$

ㄷ. 참

$(f\circ f)(3)=f(2)=3$이고

$\lim_{x\to 3}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 2+0}f(x)=3$이므로

함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

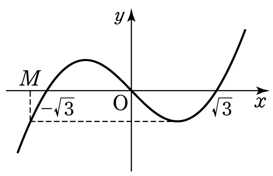
10. 다항함수의 미분법

정답 ⑤

삼차함수

$f(x)=x^3-3x$

$=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$



의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(a)\geq f(b)$를 만족시키는 음의 실수 b의 최댓값은 오른쪽 그림에서 M의 값이다.

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소값 $f(1)=1-3=-2$를 가지므로 b의 최댓값 M은 $f(x)=-2$를 만족하는 x의 값 중 음수인 것이다.

즉, $x^3-3x=-2$에서

$x^3-3x+2=0$, $(x+2)(x-1)^2=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$이므로 $M=-2$

11. 다항함수의 적분법 정답 ④

분이 지난 순간 물탱크의 물의 부피를 (t)라 하면 (가)에서 $0 \leqq t \leqq 20$일 때

$$V(t)= {}^{t}(t+8)dt=\frac{1}{2}t^2+8t(\mathrm{L}/분)$$

$\frac{1}{2}t^2+8t=130$에서 $t^2+16t-260=0$

$(t+26)(t-10)=0$

$\therefore\ t=10$

따라서 물을 넣기 시작한지 10분이 지난 순간 물의 부피가 130L이므로

(나)에서

$$V(t)=130+\int_0^t(t+8)dt-26(t-10)$$

$$=130+\left[\frac{1}{2}t^2+8t\right]_{10}^{t}-26t+260$$

$$=130+\frac{1}{2}t^2+8t-(50+80)-26t+260$$

$$=\frac{1}{2}t^2-18t+260$$

$V(t)=\frac{1}{2}t^2-18t+260=100$에서

$t^2-36t+320=0$

$(t-16)(t-20)=0$

$\therefore\ t=16$ 또는 $t=20$

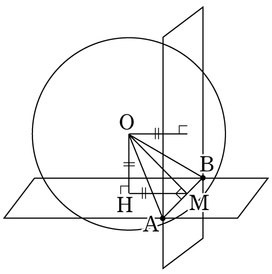
따라서 물의 양이 두 번째로 100L가 될 때까지 걸리는 시간은 16분이다. ($\because$ 130L가 되기 전에 처음 100L가 되었다.)

12. 공간도형과 공간좌표 정답 ②

점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, AB의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{OM}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이고,

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AB}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{OM}}=\ \frac{3}{2}$



$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{MH}}$이므로 $\triangle\mathrm{OHM}$에서

$\sqrt{2}\cdot\overline{\mathrm{OH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OH}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

13. 공간도형과 공간좌표 정답 ②

평면 OAB와 평면 ECD가 평행하므로 평면 OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기는 $180°-\theta$이다.

한 모서리의 길이를 a, 점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle\mathrm{HAB}=\frac{1}{4}a^2$

한편, $\triangle\mathrm{OAB}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이고, $\triangle\mathrm{HAB}$는 $\triangle\mathrm{OAB}$의 정사영이므로

$\frac{1}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos(180°-\theta)$

$-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \cos^2\theta=\frac{1}{3}$

14. 순열과 조합 정답 ④

$a_n={}_{2n}\mathrm{C}_2\cdot{}_{2n-2}\mathrm{C}_2\cdot{}_{2n-4}\mathrm{C}_2\cdot\cdots\cdot{}_2\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{n!}$ 이므로

$$\frac{a_{11}}{a_{10}}=\frac{{}_{22}\mathrm{C}_2\cdot{}_{20}\mathrm{C}_2\cdot\ \cdots\cdot{}_2\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{11!}}{{}_{20}\mathrm{C}_2\cdot{}_{18}\mathrm{C}_2\cdot\ \cdots\cdot{}_2\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{10!}}$$

$$={}_{22}\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{11}=\frac{22\cdot21}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{11}=21$$

15. 수열 정답 ④

수열 $a_nb_n\}$이 등차수열이므로 모든 자연수 n에 대하여

$\sqrt{a_nb_n}+\sqrt{a_{n+2}b_{n+2}}=2\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}}=\sqrt{\boxed{4a_{n+1}b_{n+1}}}$ ……… ㉠

또, 두 수열 $a_n\}$, $\{b_n\}$이 등차수열이므로

$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$ ……… ㉡

$b_n+b_{n+2}=2b_{n+1}$ ……… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입한 후, 양변을 제곱하여 정리하면

$2\sqrt{a_nb_na_{n+2}b_{n+2}}=a_nb_{n+2}+a_{n+2}b_n$

다시 위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$4a_nb_na_{n+2}b_{n+2}=a_n{}^2b_{n+2}{}^2+2a_nb_na_{n+2}b_{n+2}+a_{n+2}{}^2b_n{}^2$

$a_n{}^2b_{n+2}{}^2-2a_nb_na_{n+2}b_{n+2}+a_{n+2}{}^2b_n{}^2=0$

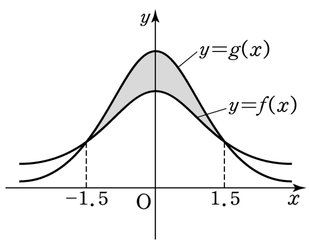
$(a_nb_{n+2}-a_{n+2}b_n)^2=0$

$a_{n+2}b_n=\boxed{a_nb_{n+2}}$

$\therefore\ \frac{b_n}{a_n}=\frac{b_{n+2}}{a_{n+2}}=\boxed{\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}$

16. 확률변수와 통계적 추정 정답 ②

(가)에서 σ 1이므로 위쪽에 있는 곡선이 $y=g(x)$, 아래쪽에 있는 곡선이 $y=f(x)$이다.



두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 0.096이므로

$\mathrm{PP}\ -1.5 \leqq \quad \leqq 1.5) - \mathrm{P}(-1.5 \leqq X \leqq 1.5) = 0.096$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ \sigma)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(-1.5 \leqq Z \leqq 1.5) - \mathrm{P}\left(\frac{-1.5}{\sigma} \leqq Z \leqq \frac{1.5}{\sigma}\right) = 0.096$$

$$\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 1.5) - \mathrm{P}\left(0 \leqq Z \leqq \frac{1.5}{\sigma}\right) = 0.048$$

$\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 1.5) = 0.433$이므로

$$\mathrm{P}\left(0 \leqq Z \leqq \frac{1.5}{\sigma}\right) = 0.433 - 0.048 = 0.385$$

$$\therefore\ \frac{1.5}{\sigma} = 1.2$$

$$\therefore\ \sigma = \frac{1.5}{1.2} = 1.25$$

17. 수열의 극한 정답 ⑤

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$$S_n = \ _{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$T_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= 2-2+2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ㄱ. 참

$$a_n + S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2$$

ㄴ. 참

$$T_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = a_{n-1}$$

ㄷ. 참

$$S_n + T_n = 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n + T_n) = 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

18. 확률변수와 통계적 추정 정답 ②

포도송이의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(600,\ 100^2)$을 따른다.

포도송이의 무게가 636g 이상일 확률은

$$\mathrm{P}(X \geqq 636) = \mathrm{P}\left(Z \geqq \frac{36}{100}\right) = \mathrm{P}(Z \geqq 0.36)$$

$$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 0.36)$$

$$= 0.5 - 0.14 = 0.36$$

따라서 임의 추출된 100송이 중 636g 이상인 포도송이의 개수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.36)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(Y) = 100 \times 0.36 = 36$

$\mathrm{V}(Y) = 100 \times 0.36 \times 0.64 = (4.8)^2$

따라서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(36,\ (4.8)^2)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y \geqq 42) = \mathrm{P}\left(Z \geqq \frac{6}{4.8}\right)$$

$$= \mathrm{P}(Z \geqq 1.25)$$

$$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 1.25)$$

$$= 0.5 - 0.39 = 0.11$$

19. 지수함수와 로그함수 정답 ①

$\log_2 n = -\log_2 x$에서 $x = \frac{1}{n}$ 이므로

$\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{n},\ \log_2 n\right)$

또, $\mathrm{A}_n(n,\ \log_2 n)$, $\mathrm{B}_n(n,\ -\log_2 n)$, $\mathrm{D}(1,\ 0)$이므로

$$S_n = \frac{1}{2}\cdot 2\log_2 n \cdot (n-1)$$

$$= (n-1)\log_2 n$$

$$T_n = \frac{1}{2}\cdot\left(n-\frac{1}{n}\right)\cdot\log_2 n$$

$$= \frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)\log_2 n$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)\log_2 n}{(n-1)\log_2 n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n}}{2(n-1)}$$

$$\lim_{\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

20. 수열

정답 ⑤

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯	19	20
1												
2	2		3		5		7		9	⋯	19	
3												
4	4		4		5		7		9		19	
5												
6	6		6		6		7		9		19	
7												
8	8		8		8		8		9		19	
	⋮											
20	20		20		20		20		20		⋮	

위의 표에서 대각선을 기준으로 위쪽에 있는 수와 아래쪽에 있는 수를 나누어 생각하면 위쪽에 있는 수들의 합은

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\ldots+9\cdot19=\sum_{k=1}^{9}k(2k+1)$$

아래쪽에 있는 수들의 합은

$$1\cdot2+2\cdot4+3\cdot6+\ldots+10\cdot20=\sum_{k=1}^{10}k\cdot2k$$

따라서 구하는 자연수의 합은

$$\sum_{k=1}^{9}k(2k+1)+\sum_{k=1}^{10}k\cdot2k$$

$$=\sum_{k=1}^{9}(2k^2+k)+\sum_{k=1}^{10}2k^2$$

$$=2\cdot\frac{9\cdot10\cdot19}{6}+\frac{9\cdot10}{2}+2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}$$

$$=570+45+770=1385$$

21. 수열의 극한

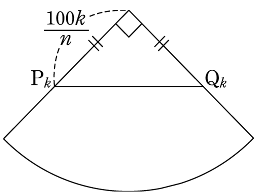
정답 ①

밑면인 원의 둘레의 길이는 50π이므로 옆면인 부채꼴의 중심각의 크기를 x라 하면

$$200\pi\cdot\frac{x}{360^\circ}=50\pi$$

$\therefore\ x=90^\circ$

$\overline{AP}=\frac{100}{n}\cdot k$이고, 점 P_k에서 원뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아서 점 P_k로 되돌아오는 최단 경로는 오른쪽 그림의 P_kQ_k와 같으므로



$$l_k=\ \ 2\cdot\frac{100}{n}\cdot k=\frac{100\sqrt{2}\,k}{n}$$

$$\therefore\ \ {}_n=\sum_{k=1}^{n}l_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{100\sqrt{2}\,k}{n}$$

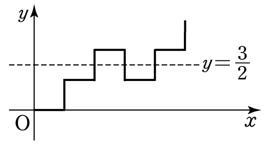
$$=\frac{100\sqrt{2}}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=50\sqrt{2}(n+1)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{50\sqrt{2}(n+1)}{n}=50\sqrt{2}$$

22. 확률

정답 ③

동전을 5번 던질 때, 점 P가 지나간 자취와 직선 $y=\frac{3}{2}$이 오직 한 점에서 만나려면 다음 그림의 1 경우를 제외하고 뒷면이 한 번 이하로 나와야 한다.



뒷면이 1번, 앞면이 4번 나오는 경우는 5가지, 앞면이 5번 나오는 경우는 1가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{5+1-1}{2^5}=\frac{5}{32}$$

23. 경우의 수

정답 ①

5개의 돌 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$$

(i) 가운데 원에 돌을 놓는 경우

가운데 원에 놓을 돌을 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_1$이고, 나머지 4개의 원 중 2개의 원에 돌을 놓는 방법의 수는 이웃하게 놓는 2가지와 이웃하지 않게 놓는 1가지가 있으므로

${}_3C_1\times(2+1)=9$

(ii) 가운데 원에 돌을 놓지 않는 경우

나머지 4개의 원 중 3개의 원에 돌을 놓으면 되므로

$3!=6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10(9+6)=150$

24. 지수와 로그

정답 ③

$f(50)=a(1-b^{50})=400$ ································· ㉠

$f(100)=a(1-b^{100})=640$ ······························ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$$\frac{a(1-b^{100})}{a(1-b^{50})}=\frac{640}{400}$$

$$\frac{(1-b^{50})(1+b^{50})}{-b^{0}}=1.6$$

$1+b^{50}=1.6$

$\therefore\ b^{50}=0.6$

㉠에 대입하면

$a(1-0.6)=400$

$\therefore\ a=1000$

$\therefore\ f(n)=1000(1-0.6^{\frac{n}{50}})(\because\ b=0.6^{\frac{1}{50}})$

$1000(1-0.6^{\frac{n}{50}})\geqq 800$에서

$1-0.6^{\frac{n}{50}}\geqq 0.8$

$0.6^{\frac{n}{50}}\leqq 0.2$

양변에 상용로그를 취하면

$\frac{n}{50}\log\frac{6}{10}\leqq\log\frac{2}{10}$

$\frac{n}{50}(\log2+\log3-1)\leqq\log2-1$

$-0.22\cdot\frac{n}{50}\leqq-0.70$

$n\geqq 159.\ldots$

따라서 총 흥행 수입이 처음으로 800억을 넘어서는 날을 개봉한 후 160일째이다.

25. 지수함수와 로그함수 정답 16

$3(1-\log_2 x)^2-2(1-\log_2 x)-4=0$에서

$1-\log_2 x=$ 라 하면

$3X^2-2X-4=0$

x에 대한 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 X에 대한 방정식의 두 근을 $1-\log_2\alpha,\ 1-\log_2\beta$이다.

근과 계수의 관계에 의해

$(1-\log_2\alpha)+(1-\log_2\beta)=\frac{2}{3}$

$2-\log_2\alpha-\log_2\beta=\frac{2}{3}$

$\log_2\alpha\beta=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \alpha\beta=2^{\frac{4}{3}}$

$\therefore\ \alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3$

$\quad=\ 2^{\frac{4}{3}}\big)^{3}$

$\quad=2^4=16$

26. 함수의 극한과 연속성 정답 21

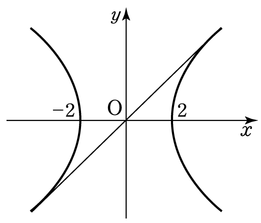
$$\lim_{x\to2}\frac{4f(x)-40g(x)}{2f(x)-g(x)}=\lim_{x\to2}\frac{2\{2f(x)+g(x)\}-42g(x)}{2f(x)+g(x)-2g(x)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\frac{2\{2f(x)+g(x)\}}{g(x)}-42}{\frac{2f(x)+g(x)}{g(x)}-2}$$

$$=\frac{-42}{-2}$$

$$=21$$

27. 이차곡선 정답 128



두 포물선은 위의 그림과 같으므로 포물선의 방정식은

$y^2=8(x-2),\ y^2=-8(x+2)$

두 포물선에 동시에 접하는 직선은 원점을 지나므로 $y=mx$라 하면 $(mx)^2=8(x-2)$는 중근을 갖는다.

즉, $m^2x^2-8x+16=0$에서

$\frac{D}{4}=16-16m^2=16(1-m)(1+m)=0$

$\therefore\ m=1(\because\ m\quad 0)$

따라서 직선의 방정식은 $y=x$이므로

$x^2=8(x-2)$에서

$x^2-8x+16=0,\ (x-4)^2=0$

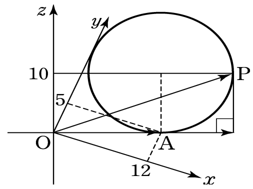
$\therefore\ x=4$

따라서 접점의 좌표는 $(4,\ 4),\ (-4,\ -4)$이므로

$d^2=\{4-(-4)\}^2+\{4-(-4)\}^2=128$

28. 공간도형과 공간좌표 정답 299

$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OP}$가 이루는 각을 θ라 하면 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta$이고, $|\overrightarrow{OP}|\cos\theta$는 $\overrightarrow{OP}$의 xy평면 위로의 정사영의 길이이므로 점 P가 오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 지나고 xy평면에 평행한 직선이 구와 만나는 점 중 원점으로부터 더 멀리 있는 점일 때 최대가 된다.



따라서 $|\overrightarrow{OP}|\cos\theta$의 최댓값은 $|\overrightarrow{OA}|+10$이고,

$|\overrightarrow{OA}|=\ \ 5^2+12^2=13$이므로 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$의 최댓값은

$|\overrightarrow{OA}|\cdot(|\overrightarrow{OA}|+10)=13(13+10)=299$

29. 벡터

정답 11

원 $\quad +(z-1)^2=1$ 위의 점을 $(a,\ 0,\ c)$라 하면

$a^2+(c-1)^2=1$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ㉠

직선 AP의 방정식은

$\frac{x}{a}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{c-2}$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ ㉡

점 Q의 좌표를 $(x_1,\ y_1,\ 0)$이라 하면 점 Q는 직선 AP 위의 점이므로

$$\frac{x_1}{a}=y_1+1=\frac{-2}{c-2}$$

$\frac{x_1}{a}=y_1+1$에서 $a=\frac{x_1}{y_1+1}$

$y_1+1=\frac{-2}{c-2}$에서 $c=\frac{-2}{y_1+1}+2=\frac{2y_1}{y_1+1}$

구한 a, c를 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{x_1}{y_1+1}\right)^2+\left(\frac{2y_1}{y_1+1}-1\right)^2=1$$

$$\frac{{x_1}^2}{{y_1}^2+2y_1+1}+\frac{{y_1}^2-2y_1+1}{{y_1}^2+2y_1+1}=1$$

$${x_1}^2+{y_1}^2-2y_1+1={y_1}^2+2y_1+1$$

$${x_1}^2=4y_1$$

즉, $y_1=\frac{1}{4}{x_1}^2$이므로 점 Q의 자취는 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$의 일부와 그 내부이다. P$(1,\ 0,\ 1)$일 때 ㉡에서

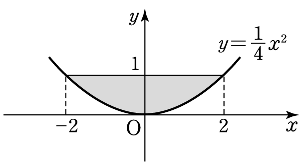
$$\frac{1}{a}=1=\frac{-1}{c-2}$$

$\therefore\ a=1,\ c=1$

따라서 직선 AP의 방정식은

$$x=y+1=\frac{z-2}{-1}$$

점 Q의 좌표는 $z=0$일 때 $x=2,\ y=1$이므로 $(2,\ 1,\ 0)$ 마찬가지로 P$(-1,\ 0,\ 1)$일 때 점 Q의 좌표는 $(-2,\ 1,\ 0)$이므로 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 어두운 부분이다.



곡선과 x축 사이의 넓이는

$$\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}x^2dx=2\int_0^2\frac{1}{4}x^2dx$$

$$=2\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^2$$

$$=2\cdot\frac{1}{12}\cdot 8=\frac{4}{3}$$

이므로 구하는 넓이는

$$4\times 1-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

$\therefore\ a+b=3+8=11$

30. 지수와 로그

정답 22

$2.52^{10n}=a\times 10^k(1\leq a<10,\ k$는 자연수)이라 하자.

$a_n>1$이려면 최고자리의 숫자가 2 이상이어야 하므로

$2.52^{10n}\geq 2\times 10^k$을 만족하는 n의 최솟값을 구하면 된다.

$2.52^{10n}\geq 2\times 10^k$의 양변에 상용로그를 취하면

$10n\log 2.52\geq \log 2+k$

$10n\times 0.4014\geq k+0.3010$

$4n+0.014n\geq k+0.3010$

$k=4n,\ 0.014n\geq 0.3010$

$\therefore\ n\geq\frac{0.3010}{0.014}=21.5$

따라서 자연수 n의 최솟값은 22이다.