2007학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수리 영역

이 과

성명	

수험번호							

○ 먼저 문제지에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
○ 답안지에 성명과 수험 번호를 정확하게 표기하시오.
○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 이 포함된 경우에는 0 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 등차수열 $\{a\ \}$에 대하여

$$a_6 - a_7 + a_8 = 2007$$

일 때, a_7 의 값은? [2점]

① $\frac{2007}{4}$ ② 669 ③ $\frac{2007}{2}$
④ 2007 ⑤ 4014

2. $\left\{\dfrac{(\sqrt{10}+3)^{\frac{1}{2}}+(\sqrt{10}-3)^{\frac{1}{2}}}{(\ \ 10+1)^{\frac{1}{2}}}\right\}^2$의 값은? [2점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

3. 함수 $(x) = x\ + k$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x) = \{f(x)\}^2$이라 할 때, $g'(1) = 16$을 만족하는 상수 k의 값은? [2점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

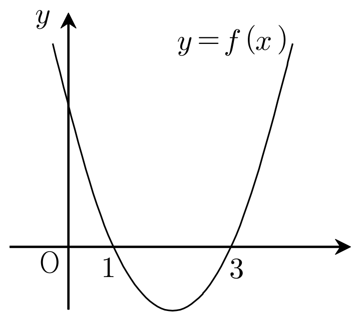
4. 어떤 실수 α의 세제곱에 1을 더한 값이 α와 같을 때, 다음 중 α가 존재하는 구간은? [3점]

① $(-3,\ -2)$　　② $(-2,\ -1)$　　③ $(-1,\ 0)$　　④ $(0,\ 1)$　　⑤ $(1,\ 2)$

5. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 분수부등식

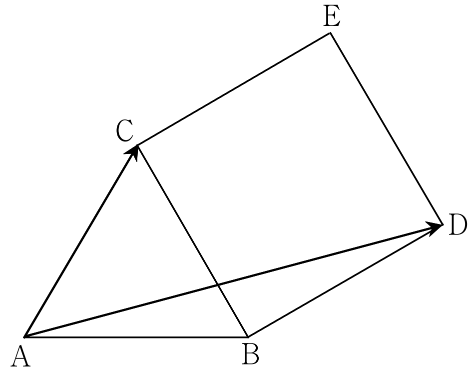
$$\frac{f(x-2)}{f(x)} \leqq 0$$

을 만족하는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]



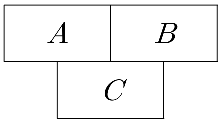
① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

6. 평면 위에 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC와 정사각형 BDEC가 그림과 같이 변 BC를 공유하고 있다. 이 때, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$의 값은? [3점]



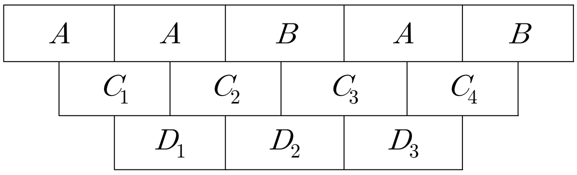
① 1　② 2　③ $\sqrt{3}$　④ $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

7. 이차정사각행렬 , B에 대하여 AB C일 때, 이를 [그림1]과 같이 나타내기로 하자.



[그림1]

이와 같은 방법으로 [그림2]의 이차정사각행렬 C, C_2, C_3, C_4 와 D_1, D_2, D_3 을 정의할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이다.) [3점]



[그림2]

<보 기>

ㄱ. $C_1 = O$ 이면 $A = O$ 이다.

ㄴ. $C_2 = C_3$ 이면 $D_2 = D_3$ 이다.

ㄷ. $D_2 = E$ 이면 $D_3 = E$ 이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

8. <보기>의 함수 중 $\lim_{\to 0}$ (x)의 값이 존재하는 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

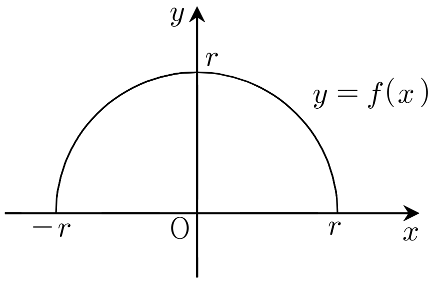
ㄴ. $f(x) = \begin{matrix} x^2 & (x \quad \text{유리수}) \\ 0 & (x\text{는 무리수}) \end{matrix}$

ㄷ. $f(x) = x - [x]$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 연속확률변수 의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 반원의 호가 되도록 상수 r의 값을 정할 때, 확률 $\mathrm{P}\ X \geqq \frac{1}{2\pi}\Big)$의 값은? (단, $-r \leqq x \leqq r$이다.) [3점]



① $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ ② $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3\pi}$ ③ $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$

④ $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ ⑤ $1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}$

10. 다항함수 (x)가

$$\lim_{\to 1} \frac{f(x^2)+f(x)+12}{x-1} = 12$$

를 만족할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 y절편은? [3점]

① -12　② -10　③ -8　④ -6　⑤ -4

11. 5개의 제비 중에서 당첨제비가 2개 있다. 갑이 먼저 한 개의 제비를 뽑은 다음 을이 한 개의 제비를 뽑을 때, 갑이 당첨제비를 뽑을 사건을 , 을이 당첨제비를 뽑을 사건을 B라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 한 번 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.) [3점]

<보 기>

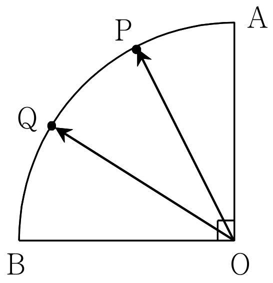
ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$

ㄴ. $\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B|A^c)$

ㄷ. $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(A|B)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

12. 그림과 같이 반지름의 길이가 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위를 움직이는 두 점 P, Q에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]



<보 기>

ㄱ. $|\vec{OP}+\vec{OQ}|$ 의 최소값은 2 이다.
ㄴ. $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|$ 의 최대값은 $\sqrt{2}$ 이다.
ㄷ. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 의 최대값은 1이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 행렬 $= \begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{matrix}\Big)$ 의 역행렬을 B라 할 때, B 의 $(2, 1)$ 성분을 a_n 이라 하자.

$\mathop{}\limits_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [4점]

① $-11-\frac{1}{2^{10}}$　② $-10-\frac{1}{2^{10}}$　③ $-9-\frac{1}{2^{10}}$
④ $-10-\frac{1}{2^{11}}$　⑤ $-9-\frac{1}{2^{11}}$

14. 수열 }에 대하여 $S_n \quad {}_{k=1}^{\;n} \quad 1+\frac{k}{n^2}-1\Big)$ 일 때, 다음은 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값을 구하는 과정이다.

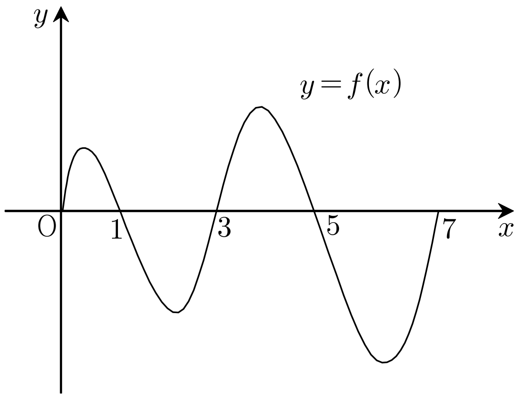
> 모든 양의 실수 x에 대하여 $\frac{x}{2+x} < \quad 1+x-1 < \frac{x}{2}$ 가 성립한다.
> 자연수 k, n $(k \leqq n)$에 대하여 $x=\frac{k}{n^2}$ 를 위 부등식에 대입하여 정리하면
> $$\frac{k}{2n^2+k} < \sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1 < \frac{k}{2n^2}$$
> 이므로
> $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k} < S_n < \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$
> 이다. 이 때,
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k = \boxed{\text{(가)}} \text{ 이고}$$
> $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\right\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)} \leqq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4} = \boxed{\text{(나)}}$$
> 이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	( )	(나)	(다)
①	1 2	0	$\frac{1}{2}$
②	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
③	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
④	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
⑤	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

15. 함수 (x)의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $g(x)$를 $g(x) = {}^{x} f(t)dt$ 라 하자.

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 정의역은 $x \mid 0 \leqq x \leqq 7 \}$ 이다.) [3점]



<보 기>

ㄱ. $g(x)$는 $x=5$에서 극대값을 갖는다.

ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 최소값을 갖는다.

ㄷ. $g(5) = g(1) - \int_1^3 f(t)dt \Big| + \Big| \int_3^5 f(t)dt \Big|$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

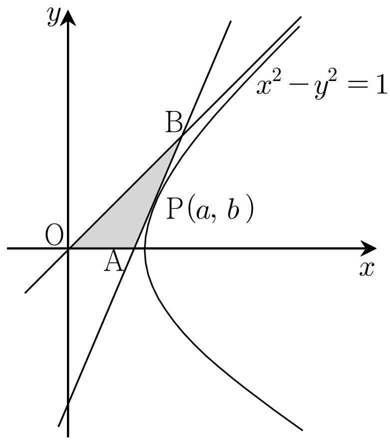
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 좌표공간 위의 두 점 A 0, 0, 1) , B(1, 0, 0) 이 있다. 점 P 가 점 B 에서 출발하여 xy평면 위의 직선 $x=1$을 따라 y축의 양의 방향으로 한없이 움직일 때, 선분 AP 와 평면 $y-z=0$ 이 만나는 점을 Q 라 하자. 점 Q 가 나타내는 자취의 길이는? [4점]

① $\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

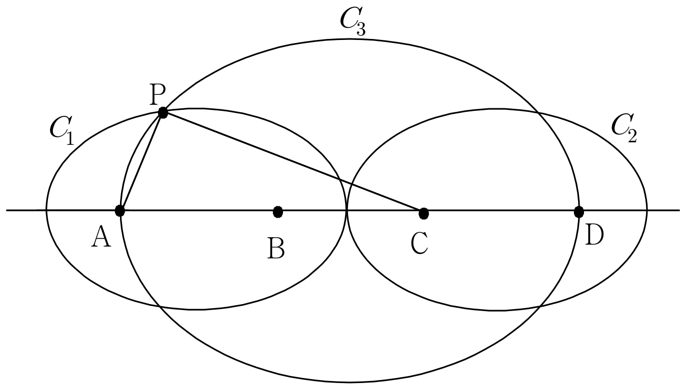
17. 그림과 같이 쌍곡선 $x\ -y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$ $(a>1, b>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A, 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 만나는 점을 B 라 하자. 삼각형 OAB 의 넓이를 (a)라 할 때, $\lim_{a\to\infty} S(a)$의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$

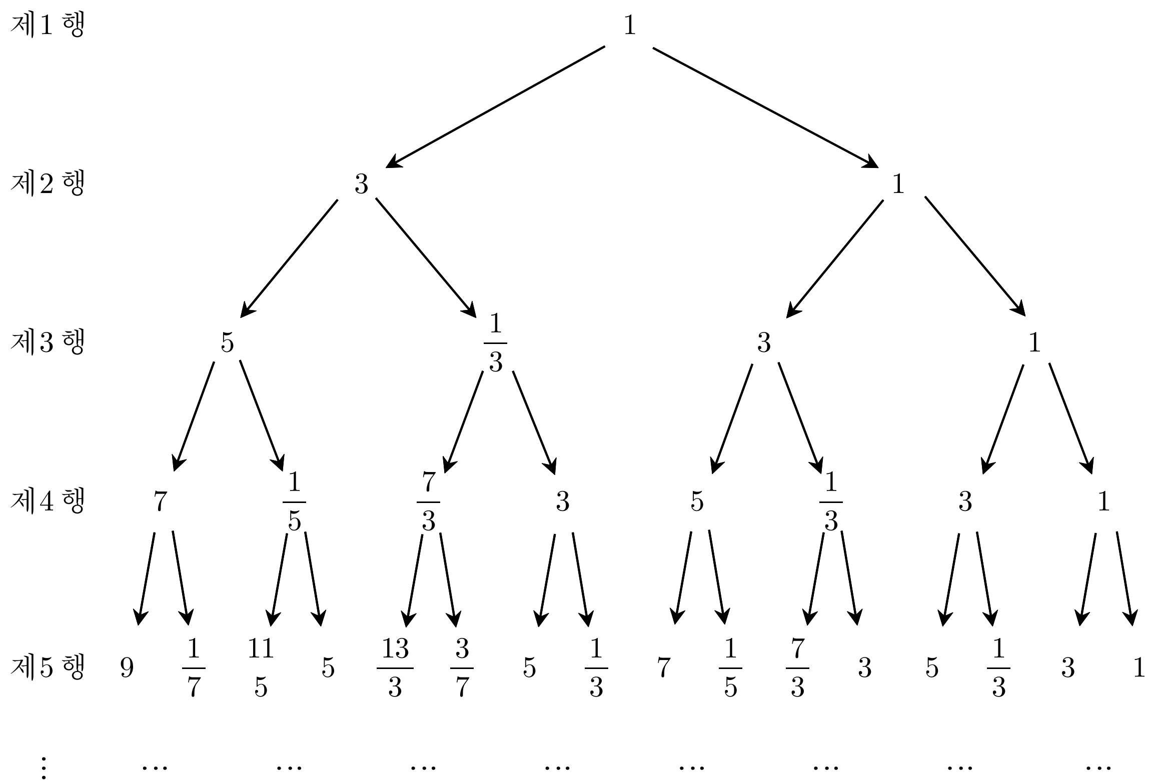
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

18. 그림과 같이 서로 합동인 두 타원 C_2가 외접하고 있다. 두 점 A, B는 타원 C_1의 초점, 두 점 C, D는 타원 C_2의 초점이고, 네 점 A, B, C, D는 모두 한 직선 위에 있다.
두 점 B, C를 초점, 선분 AD를 장축으로 하는 타원을 C_3이라 하고, 두 타원 C_1, C_3의 교점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=8$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=6$일 때, $\overline{\mathrm{CP}}-\overline{\mathrm{AP}}$의 값은? [4점]



① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

19. 그림은 제 행에 1을 시작으로 바로 다음 행에 ↙ 방향으로는 직전의 수에 2를 더한 수를, ↘ 방향으로는 직전의 수의 역수를 나열하는 과정을 반복한 것이다. 예를 들면, 제3행의 첫 번째 수 5는 직전의 수 3에 2를 더한 수이고, 두 번째 수 $\frac{1}{3}$은 직전의 수 3의 역수이다.



제10행의 맨 왼쪽부터 2 +2) 번째에 있는 수는? [4점]

① $\frac{1}{17}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ 13

④ 15 ⑤ 17

20. 세 로그함수 $(x)=\log\ x$, $g(x)=\log_b x$, $h(x)=\log_c x$ 의 밑 a, b, c 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a+c$ 의 최소값은 $2b$ 이다.

ㄴ. $\dfrac{1}{f(5)}$, $\dfrac{1}{g(5)}$, $\dfrac{1}{h(5)}$ 은 이 순서로 등차수열을 이룬다.

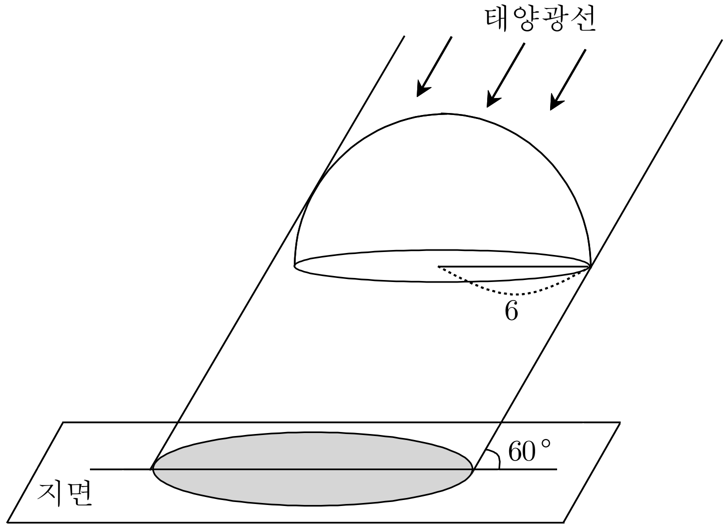
ㄷ. $f(x_1)=g(x_2)=h(x_3)=5$ 이면 x_1, x_2, x_3 은 이 순서로 등비수열을 이룬다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(a, b)$ 가 있다. 선분 AC 의 중점을 P_1 이라 하고, 선분 BP_1 의 중점을 Q_1 이라 하자. 또, 선분 AQ_1 의 중점을 P_2 라 하고, 선분 BP_2 의 중점을 Q_2 라 하자. 이와 같이 모든 자연수 n 에 대하여 선분 BP_n 의 중점을 Q_n 이라 하고, 선분 AQ_n 의 중점을 P_{n+1} 이라 하자. n 이 한없이 커질 때, 점 P_n 은 어떤 점에 한없이 가까워지는가? [4점]

① $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\Big)$ ② $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
④ $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

22. 그림과 같이 반지름의 길이가   인 반구가 평평한 지면 위에 떠 있다. 반구의 밑면이 지면과 평행하고 태양광선이 지면과 $60°$의 각을 이룰 때, 지면에 나타나는 반구의 그림자의 넓이는? (단, 태양광선은 평행하게 비춘다.) [4점]



① $6(3+\ \ 3)\pi$ ② $6(3+2\sqrt{3})\pi$ ③ $8(2+\sqrt{3})\pi$

④ $8(1+2\sqrt{3})\pi$ ⑤ $8(2+3\sqrt{3})\pi$

23. 공기는 산소, 수소, 질소 등과 같은 여러 가지 원소들로 이루어져 있다. 지표면에서부터 높이가 x (km)인 곳에서의 어떤 원소의 밀도를 $n(x)$라 하면 관계식

$$\log n(x) = \log n \ - kx$$ (단, n_0은 지표면에서의 밀도, k는 양의 상수)

가 성립한다고 한다. 이 원소의 밀도가 지표면에서의 밀도의 $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{1000}$배가 되는 높이를 각각 x_1, x_2라 할 때, $\frac{x_2}{x_1}$의 값은? (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [4점]

① 5 ② 8 ③ 10

④ 15 ⑤ 20

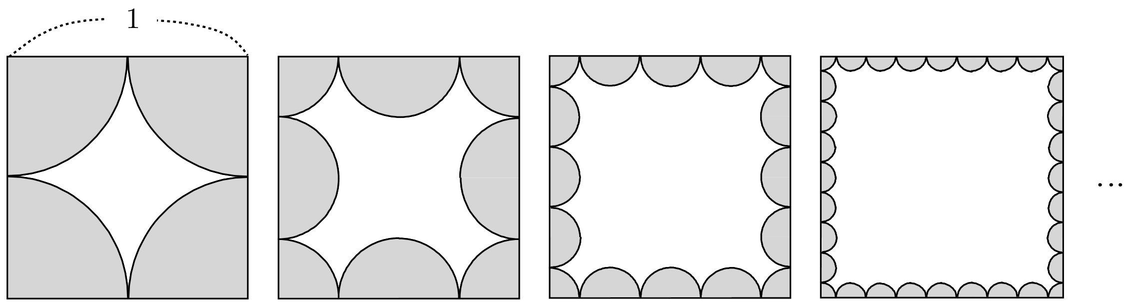
24. 한 변의 길이가   인 정사각형을   라 하자.

R의 각 변을 2등분 한 후 [그림1]과 같이 각 꼭지점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 사분원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S 이라 하자.

R의 각 변을 4등분 한 후 [그림2]와 같이 각 꼭지점 및 각 변의 이등분점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$ 인 사분원과 반원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_2 라 하자.

R의 각 변을 8등분 한 후 [그림3]과 같이 각 꼭지점 및 각 변의 사등분점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}$ 인 사분원과 반원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_3 이라 하자.

이와 같은 방법으로 S_4, S_5, S_6, $\cdots$을 구할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



[그림1] [그림2] [그림3] [그림4]

① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ $\frac{7}{9}\pi$

④ $\frac{7}{8}\pi$ ⑤ $\frac{8}{9}\pi$

주관식 문항 (25 ~ 30)

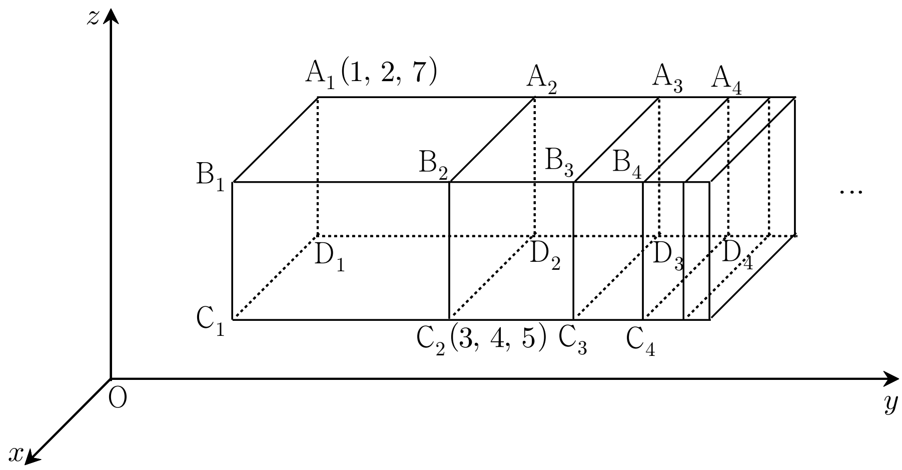
25. 이차함수 $f(x) = -12x(x-a)$에 대하여 $f'(0)+f'(2)=0$일 때, $\int^{a} f(x)dx$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

26. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = n - 4\left[\frac{n}{4}\right]$$

일 때, $\sum_{n=1}^{25} a_n$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

27. 좌표공간에 두 점 A $\ 1,2,7)$, $\mathrm{C}_2(3,4,5)$가 있다. 그림과 같이 각 면이 xy 평면 또는 yz 평면 또는 zx 평면에 평행한 직육면체 $\mathrm{A_1B_1B_2A_2-D_1C_1C_2D_2}$를 만든다. 면 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 공유하고 $\mathrm{C_2C_3}=\dfrac{1}{2}\,\overline{\mathrm{C_1C_2}}$가 되도록 그림과 같이 직육면체 $\mathrm{A_2B_2B_3A_3-D_2C_2C_3D_3}$을 만든다. 면 $\mathrm{A_3B_3C_3D_3}$을 공유하고 $\overline{\mathrm{C_3C_4}}=\dfrac{1}{2}\,\overline{\mathrm{C_2C_3}}$이 되도록 그림과 같이 직육면체 $\mathrm{A_3B_3B_4A_4-D_3C_3C_4D_4}$를 만든다. 이와 같은 과정을 계속하여 직육면체 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{D}_n\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$을 만들 때, n의 값이 한없이 커지면 점 D_n은 점 (a,b,c)에 한없이 가까워진다. abc의 값을 구하시오. [3점]



28. 삼차함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(가) 곡선 $y=f(x)+1$은 $x=1$에서 x축에 접한다. (나) 곡선 $y=f(x)-1$은 $x=-1$에서 x축에 접한다.

이 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

29. 수면에서 수면과 수직인 방향으로 물속을 향해 발사된 총알은 시간이 지날수록 물의 저항에 의해 속도가 줄어든다. 수면에서 000 (m/초)의 속도로 어떤 총알이 발사된 후 t초 $\left(0 \leq t < \frac{1}{50}\right)$가 지난 순간 총알의 속도를 $v(t)$ (m/초)라 하면 관계식

$$(t) = a \cdot b^{00t} \quad (\text{단, } a \text{와 } b \text{는 양의 상수})$$

이 성립한다고 하자. 발사 후 $\frac{1}{100}$초가 지난 순간 총알의 속도가 50(m/) 이었다. 총알의 속도가 100 5 (m/초) 가 되는 것은 총알이 발사된 후 p초가 지난 순간이다. $\frac{1}{p}$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 집합 = 1, 2, 3, 4, 5 }에서 X로의 함수 중에서 다음 조건을 모두 만족하는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) f의 역함수가 존재한다.
(나) $f(1)=1$
(다) $f(2) \neq f(f(1))$