# 2006 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

## 제 3 교시 수리 영역(수학)

| 문 과 | 성명 | | 수험번호 | | | | | | | A 형 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|



○ 먼저 문제지에 성명과 수험 번호를 정확하게 기입하시오.

○ 답안지에 성명, 수험 번호, 문형을 표기하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 0이 포함된 경우에는 0을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $n=2006$ 이고 $a=\frac{3}{4}$ 일 때, 세 수 $A$, $B$, $C$를 각각

$$A=\sqrt[n]{a^{n-1}},\quad B=\sqrt[n]{a^{n+1}},\quad C=\sqrt[n+1]{a^{n}}$$

이라 하자. 다음 중 세 수 $A$, $B$, $C$의 대소관계로 옳은 것은? [2점]

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$

④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

2. 첫째항이 $-312$ 이고 공차가 8 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

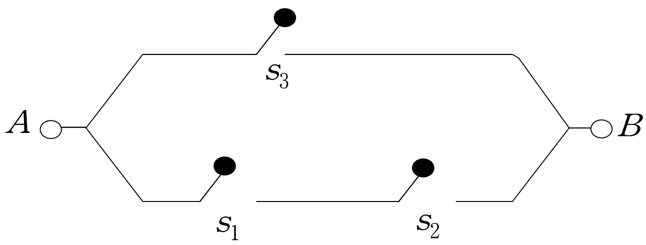
$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$$

로 정의할 때, 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}b_k$의 값은? [2점]

① $-2$ ② $-1$ ③ 0

④ 1 ⑤ 2

3. 그림과 같이 개폐식 스위치 $s_1$, $s_2$, $s_3$ 를 갖춘 전기체계가 있다. 이 전기체계의 각 스위치들은 모두 서로 독립적으로 작동되고, 전류는 스위치 $s_1$과 $s_2$가 모두 닫혀있거나 $s_3$가 닫혀있을 때, $A$에서 $B$로 흐르도록 되어있다. 이 때, 각각의 스위치 $s_k$( $k=1, 2, 3$ )가 닫혀있을 확률이 모두 $\frac{1}{3}$ 로 같다고 할 때, 전류가 $A$에서 $B$로 흐를 확률은? [3점]




① $\frac{1}{27}$　② $\frac{1}{9}$　③ $\frac{5}{27}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{11}{27}$

4. 무한수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합을 $S_n$이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$ 이라 할 때, 극한 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + S_n}{{S_n}^3}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

5. 헌혈을 하려는 학생 10명에게 자신의 혈액형을 A 형, B 형, AB 형, O 형으로만 기록하도록 하였더니 다음과 같은 결과가 나왔다.

| |
|---|
| (가) A 형인 학생 수와 B 형인 학생 수의 합은 AB 형인 학생 수와 O 형인 학생 수의 합과 같다. |
| (나) A 형인 학생 수와 AB 형인 학생 수의 합은 B 형인 학생 수와 O 형인 학생 수의 합과 같다. |
| (다) A 형인 학생 수는 4 명이다. |

이 때, 이 10명의 학생이 모두 헌혈을 하였고, 각 학생의 혈액을 혈액형만 표시된 혈액팩에 넣었다. 이 10개의 혈액팩 모두를 일렬로 나열하는 방법은 모두 몇 가지인가?
(단, 각 혈액팩은 A 형, B 형, AB 형, O 형으로만 혈액형이 기록되어 있고, 기록된 혈액형으로만 구별할 수 있다.) [3점]

① 2100　　② 3900 가지　　③ 4200 가지
④ 6300 가지　　⑤ 12600 가지

6. 다음은 극한 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값의 범위를 구하는 풀이 과정의 일부이다.

[풀이]

이항정리에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\boxed{(가)}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$=\boxed{(나)}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\times\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

$$=\boxed{(나)}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right\}$$

$$<\boxed{(나)}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$<\boxed{(나)}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

그런데, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\times\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}>0$ 이므로

$$\boxed{(나)}<\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\boxed{(다)}$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓰면? [3점]

| | (가) | (나) | (다) |
|---|---|---|---|
| ① | ${}_{n}\mathrm{C}_{k}$ | 1 | 2 |
| ② | ${}_{n-1}\mathrm{C}_{k}$ | 1 | 2 |
| ③ | ${}_{n}\mathrm{C}_{k}$ | 1 | 3 |
| ④ | ${}_{n-1}\mathrm{C}_{k}$ | 2 | 3 |
| ⑤ | ${}_{n}\mathrm{C}_{k}$ | 2 | 3 |

7. 이차정사각행렬 $A$ 에 대하여

$$A^2-5A+6E=O,\quad A\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix}$$

이 성립할 때, $A\begin{pmatrix}-22\\-2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}20\\-30\end{pmatrix}$ 는? (단, $E$ 는 단위행렬이고, $O$ 는 영행렬이다.) [4점]

① $\begin{pmatrix}-24\\-36\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}24\\36\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}24\\-36\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}-36\\24\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}36\\-24\end{pmatrix}$

8. 0 이 아닌 두 실수 $a$, $b$에 대하여 이차함수 $ax^2+y=4$ 의 그래프와 직선 $by=7$ 이 $(1, 3)$ 에서 만난다. 이 때, 행렬 $A=\begin{pmatrix}a&1\\0&b\end{pmatrix}$ 에 대하여 $A^{-1}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ 의 모든 성분의 합은? (단, $A^{-1}$ 은 $A$ 의 역행렬이다.) [3점]

① 1

② 2

③ 4

④ 7

⑤ 10

9. 빨간 공 4 개와 파란 공 2 개가 들어 있는 상자 A 가 있다. 상자 A 에서 동시에 공 3 개를 꺼 내어 비어 있는 상자 B 에 넣은 다음 다시 상자 B 에서 공 1 개를 꺼냈다. 상자 B 에서 꺼낸 공이 파란 공이었을 때 상자 A 에서 상자 B 로 옮겨진 공 3 개가 빨간 공 2 개와 파란 공 1 개일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

10. 수열의 합 $\sum_{k=1}^{n} 2^k$ 의 값이 65 의 배수가 되도록 하는 자연수 $n$ 의 최소값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12

④ 13 ⑤ 14

11. 어떤 혈압강하제를 투여하면 혈액 속에 남아 있는 그 약의 양은 매 4 시간이 지날 때마다 4 시간 전의 양의 반으로 줄어든다고 한다. 그 약은 일단 투여를 시작하면 매 12 시간마다 계속하여 일정한 양을 투여하도록 되어있고, 혈액 속에 남아 있는 그 약의 양은 560 ㎎ 이하를 유지해야 한다. 이 약을 규칙적으로 장기간 투여해야 하는 환자에게 매회 투여 가능한 약의 최대량은 몇 ㎎인가? [3점]

① 300 ㎎ ② 375 ㎎ ③ 400 ㎎

④ 490 ㎎ ⑤ 520 ㎎

12. 자연수 $n$ 에 대하여 $f(n)=\left[\dfrac{n}{4}\right]$ 이라 하고, 수열 $\{a_n\}$ 을

$$a_1=a_2=a_3=0\,,\ \ a_n=\sum_{k=1}^{f(n)}k\ \ (\text{단, } n=4\,,5\,,6\,,\cdots)$$

으로 정의할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{28}a_n$ 의 값은?

(단, 실수 $x$ 에 대하여 $[x]$ 는 $x$ 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

① 204 ② 212 ③ 220

④ 224 ⑤ 252

13. 어느 대학에서는 공개선발시험으로 40 명의 학생을 선발하여 해외연수를 보내려고 한다. 이 시험에 응시한 학생 1600 명의 시험성적은 평균 65 점, 표준편차 10 점인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 표준정규분포표를 이용하여 선발된 학생의 최저점수를 구하면? [3점]

① 80.3 점

② 84.6

③ 86.7 점

④ 87.4 점

⑤ 90.8 점

<표준정규분포표>

| $z$ | $\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq z)$ |
|---|---|
| 1.53 | 0.4370 |
| 1.96 | 0.4750 |
| 2.17 | 0.4850 |
| 2.24 | 0.4875 |
| 2.58 | 0.4951 |

14. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}_1(1, -1)$, $\mathrm{P}_2(4, -2)$에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$를 $2:1$로 내분하 는 점을 $\mathrm{P}_3$, 선분 $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{P}_4$이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하 여 선분 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{P}_{n+2}$ (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$)라 하자.

이 때, 점 $\mathrm{P}_n$의 좌표를 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$이라 하면 $x_{2005} - y_{2005}$의 값은? [4점]

① $6 + 3^{-2003}$ ② $6 - 3^{-2003}$ ③ $5 + 3^{-2003}$

④ $5 - 3^{-2003}$ ⑤ $5 - 3^{-2005}$

15. 사건 $A$가 1회의 시행에서 일어날 확률이 $p$일 때, $n$회의 독립시행에서 사건 $A$가 일어나는 횟수를 확률변수 $X$라 하자. 확률변수 $X$의 평균이 80이고 분산이 64라 할 때, $\sum_{r=0}^{n} 5^r \mathrm{P}(X=r)$의 값은? (단, $\mathrm{P}(X=r)$은 $X=r$일 때의 확률이다.) [3점]

① $\left(\frac{9}{5}\right)^{400}$　② $\left(\frac{7}{5}\right)^{450}$　③ $\left(\frac{9}{5}\right)^{399}$

④ $2^{399}$　⑤ $2^{400}$

16. 두 부등식 $\begin{cases} \log_y (1-x^2) \leq 2 \\ 2^y \leq 2 \cdot 4^x \end{cases}$ 을 동시에 만족시키는 영역의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{4}(\pi+1)$　② $\frac{1}{4}(\pi+3)$　③ $\frac{1}{4}(\pi+5)$

④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{9}{4}$

17. 실수 $a$, $b$와 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $B$를 $B=PAP^{-1}$라 하자.

[보기]에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, $E$는 단위행렬이고 $O$는 영행렬이다.) [4점]

[보기]

ㄱ. $B=O$이면 $A=O$이다.

ㄴ. $A^3=E$이면 $B^{100}=B$ 이다.

ㄷ. $AB=E$를 만족하는 행렬 $A$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 1 보다 큰 세 실수 $a$, $b$, $c$ 에 대하여 두 등식

$$\begin{cases} a^2b^3=64 \\ 3(\log_a c)^2-2(\log_b c)^2=-(\log_a c)(\log_b c) \end{cases}$$

이 성립하도록 하는 두 수 $a$와 $b$에 대하여 $\log_2 ab$ 의 값은? [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

19. 다음은 각 항이 정수이고 공차가 $d$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4$ 이 어떤 정수의 제곱임을 증명하는 과정이다.

> [증명]
> 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로
> $$a_1 = a - 3k,\ a_2 = a - k,\ a_3 = a + k,\ a_4 = a + 3k$$
> 이 성립하도록
> $$a = \boxed{\quad (가) \quad},\ k = \boxed{\quad (나) \quad}$$
> 를 택하면
> $$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4 = \left(\boxed{\quad (다) \quad}\right)^2$$
> 이 성립한다.
> 이 때, $\boxed{\quad (다) \quad} = a_2{}^2 + a_2 d - d^2$이고,
> $a_2$와 $d$는 정수이므로 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4$는 정수의 제곱이 된다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓰면? [4점]

| | (가) | (나) | (다) |
|---|---|---|---|
| ① | $\dfrac{a_2 + a_3}{2}$ | $\dfrac{d}{2}$ | $a^2 - 5k^2$ |
| ② | $\dfrac{a_2 + a_3}{2}$ | $\dfrac{d}{2}$ | $a^2 - 3k^2$ |
| ③ | $\dfrac{a_2 + a_3}{2}$ | $\dfrac{d}{4}$ | $a^2 - 5k^2$ |
| ④ | $\dfrac{a_1 + a_4}{2}$ | $\dfrac{d}{2}$ | $a^2 - 3k^2$ |
| ⑤ | $\dfrac{a_1 + a_4}{2}$ | $\dfrac{d}{4}$ | $a^2 - 3k^2$ |

20. 모든 자연수 $n$ 에 대하여 각 항이 실수인 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$ 이

$$a_{n+1}{}^2 + 4a_n{}^2 + (a_1 - 2)^2 = 4a_{n+1}a_n$$

$$b_n = \log_{\sqrt{2}} a_n$$

와 같이 정의될 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k = 72$ 가 성립하도록 하는 자연수 $m$ 의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

21. $a_n = 3n^2 - 3n$ ( $n = 1, 2, \cdots$ )과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합을 $S_n$ 이라 할 때, $S_n$ 이 처음으로 16 자리의 정수가 되도록 하는 $n$ 을 10 으로 나눈 나머지는? [4점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 8 ⑤ 9

22. 양궁대회에 참가한 어떤 선수가 활을 쏘아 과녁의 10점 부분을 명중시킨 다음 다시 활을 쏘아 10점 부분을 명중시킬 확률이 $\frac{8}{9}$ 이고, 10점 부분을 명중시키지 못한 다음 다시 10점 부분을 명중시키지 못할 확률이 $\frac{1}{5}$ 이다. 이 선수가 반복하여 계속 활을 쏜다고 할 때, $n$번째에 10점 부분을 명중시킬 확률을 $p_n$이라 하자. 이 때, $\lim_{n\to\infty} p_n$의 값은? [4점]

① $\frac{14}{27}$ ② $\frac{17}{27}$ ③ $\frac{25}{41}$

④ $\frac{32}{41}$ ⑤ $\frac{36}{41}$

23. 두 지수함수

$$f(x) = 9^x + a\ ,\ \ g(x) = b\cdot 3^x + 2$$

에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 곡선 $y = g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 $x$ 좌표가 $x = \log_3 2$ , $x = \log_3 k$ (단, $k > 2$)일 때, [보기]에서 $a$, $b$에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

[보기]

ㄱ. $b^2 = 4a - 8$

ㄴ. $a = 2b - 2$

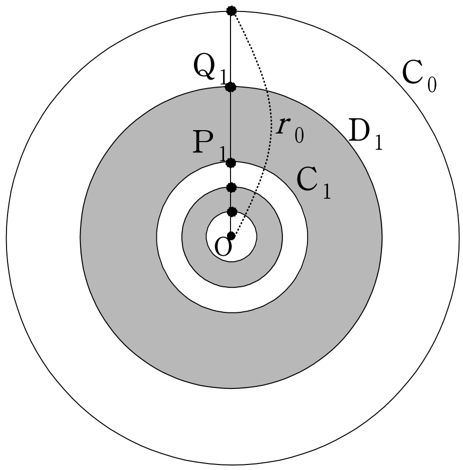
ㄷ. $a > 6$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24. 다음 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 $r_0$ 인 원 $C_0$ 가 있다. 원 $C_0$ 의 반지름을 3 등분하여 원점 O 에서부터 가까운 점을 차례로 $P_1$, $Q_1$ 이라 하고, 중심이 O 이고 반지름을 $\overline{OP_1}$, $\overline{OQ_1}$ 으로 하는 원을 각각 $C_1$, $D_1$ 이라 하자. 같은 방법으로 원 $C_1$ 의 반지름 $\overline{OP_1}$ 을 3 등분하여 원점 O 에서부터 가까운 점을 차례로 $P_2$, $Q_2$ 이라 하고, 중심이 O 이고 반지름을 $\overline{OP_2}$, $\overline{OQ_2}$ 으로 하는 원을 각각 $C_2$, $D_2$ 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 원 $C_n$, $D_n$ (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$ )을 만든다.

이 때, 원 $D_n$ 의 넓이에서 원 $C_n$ 의 넓이를 뺀 값을 $s_n$ 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ 의 값은? [4점]




① $\frac{3}{4}\pi r_0^2$

② $\frac{3}{8}\pi r_0^2$

③ $\frac{5}{8}\pi r_0^2$

④ $\frac{9}{16}\pi r_0^2$

⑤ $\frac{9}{64}\pi r_0^2$

## 주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2X=X$를 만족하는 행렬 $X$가 2 개 이상 존재하도록 실수 $a$의 값을 정할 때, $A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix}$를 만족하는 상수 $p$, $q$의 합 $p+q$의 값을 구하시오. [3점]

단, 행렬 $X$는 $2\times1$ 행렬이다

26. 연립방정식

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\log_x 4}+\dfrac{1}{\log_y 2}=3 \\ \log_2 3x+\log_{\sqrt{2}} y=\log_2 48 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [3점]

27. $\dfrac{2^{68}\times5^{68}}{2^{7}\times5^{7}+2^{4}\times5^{4}}=\alpha\times10^{n}$ (단, $1\leqq\alpha<10$)라 할 때, 자연수 $n$의 값을 구하시오. [3점]

28. 다음은 오존층의 두께를 조사하는 방법 중 하나를 서술한 것이다.

> 태양광선이 대기권에 도달하기 전의 특정한 파장의 세기를 $I_0$, 그 파장이 두께가 $x$㎝인 오존층을 통과한 후의 파장의 세기를 $I$라 하면
>
> $$\log_a I_0-\log_a I=kx$$
>
> 이 성립한다.
>
> 여기서, $a$는 $2<a<3$인 상수이고, $k$는 그 파장에 대한 오존의 흡수상수이다.

위와 같은 공식을 이용하면, 진폭이 $3\times10^{-8}$ ㎝ 인 특정파장이 두께가 $0.2$㎝인 오존층을 통과 하였을 때, $I=\dfrac{5}{6}I_0$를 만족한다고 한다. 이 때, $1000\log_{10}a^{k}$의 값을 구하시오.

(단, $\log_{10}2=0.301$, $\log_{10}3=0.477$로 계산한다.) [4점]

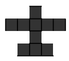
29. 실수 $x$에 대한 함수 $f(x)$가

$$f(x) = {}_6\mathrm{C}_0 + {}_6\mathrm{C}_1 x^2 + {}_6\mathrm{C}_2 x^4 + {}_6\mathrm{C}_3 x^6 + {}_6\mathrm{C}_4 x^8 + {}_6\mathrm{C}_5 x^{10} + {}_6\mathrm{C}_6 x^{12}$$

와 같이 정의될 때, $f(\tan\theta) = 2^{12}$을 만족하는 $\theta$에 대하여 $\dfrac{36\theta}{\pi}$ 의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ) [4점]

30. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$)으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{r_n\}$의 제$n$항 $r_n$은 $a_n$을 $a_5$로 나눈 나머지로 정의하자. 예를 들어 $r_1$은 $a_1$을 $a_5$로 나눈 나머지이고, $r_2$는 $a_2$를 $a_5$로 나눈 나머지이다.

이 때, 다음 그림과 같이 100개의 작은 사각형으로 이루어진 바둑판 모양의 사각형 각 칸에 $r_1$부터 $r_{100}$까지의 수를 차례로 채워나갈 때, 글자  모양의 어두운 부분에 채워지는 수들의 합을 구하시오. [4점]