2006 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수리 영역(수학)

이 과	성명		수험번호							A 형

○ 먼저 문제지에 성명과 수험 번호를 정확하게 기입하시오.

○ 답안지에 성명, 수험 번호, 문형을 표기하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 0이 포함된 경우에는 0을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $n = 2006$ 이고 $a = \frac{3}{4}$ 일 때, 세 수 A, B, C 를 각각

$$A = \sqrt[n]{a^{n-1}},\quad B = \sqrt[n]{a^{n+1}},\quad C = \sqrt[n+1]{a^{n}}$$

이라 하자. 다음 중 세 수 A, B, C 의 대소관계로 옳은 것은? [2점]

① $A < B < C$　　② $A < C < B$　　③ $B < A < C$

④ $B < C < A$　　⑤ $C < A < B$

2. 이차 이하의 모든 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 등식

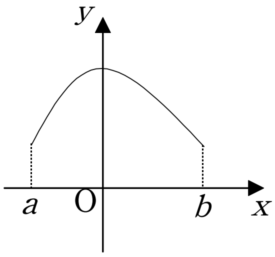
$$\int_0^2 f(x)\,dx = a f(0) + b f(1) + c f(2)$$

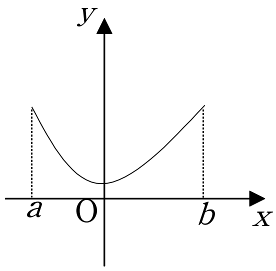
이 항상 성립하도록 하는 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값은? [3점]

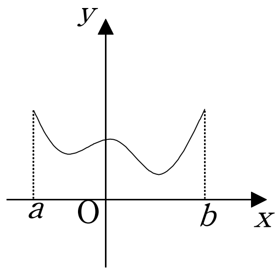
① 4　　② 8　　③ $\frac{4}{27}$

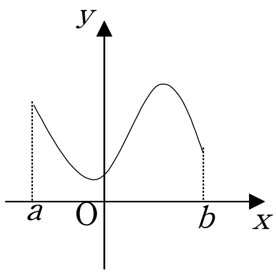
④ $\frac{8}{27}$　　⑤ $\frac{8}{9}$

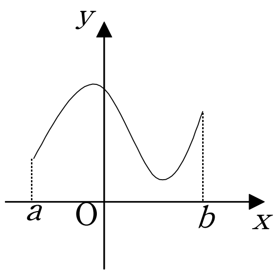
3. 폐구간 $[a, b]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $a < x_1 < x_2 < b$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $\dfrac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} > \dfrac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a}$ 를 만족할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 될 수 있 는 것은? [2점]

①


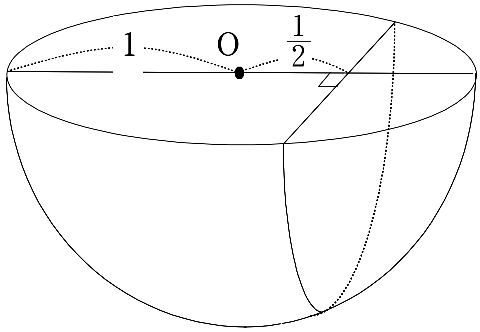
②


③


④


⑤


4. 반지름의 길이가 1 인 구를 두 개의 반구로 나누었다. 그림과 같이 구의 중심 O 로부터 거리가 $\frac{1}{2}$ 인 곳에서 반구의 단면에 수직인 평면으로 반구를 잘랐다. 이 때, 생긴 두 입체 중에서 작은 입체의 부피는? [2점]



① $\frac{1}{5}\pi$

② $\frac{1}{12}\pi$

③ $\frac{5}{48}\pi$

④ $\frac{2}{27}\pi$

⑤ $\frac{7}{36}\pi$

5. 헌혈을 하려는 학생 10 명에게 자신의 혈액형을 A 형, B 형, AB 형, O 형으로만 기록하도록 하였더니 다음과 같은 결과가 나왔다.

> (가) A 형인 학생 수와 B 형인 학생 수의 합은 AB 형인 학생 수와 O 형인 학생 수의 합과 같다.
> (나) A 형인 학생 수와 AB 형인 학생 수의 합은 B 형인 학생 수와 O 형인 학생 수의 합과 같다.
> (다) A 형인 학생 수는 4 명이다.

이 때, 이 10 명의 학생이 모두 헌혈을 하였고, 각 학생의 혈액을 혈액형만 표시된 혈액팩에 넣었다. 이 10 개의 혈액팩 모두를 일렬로 나열하는 방법은 모두 몇 가지인가?
(단, 각 혈액팩은 A 형, B 형, AB 형, O 형으로만 혈액형이 기록되어 있고, 기록된 혈액형으로만 구별할 수 있다.) [3점]

① 2100 ② 3900 가지 ③ 4200 가지
④ 6300 가지 ⑤ 12600 가지

6. 공간에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 3, 4인 두 개의 구 S_1, S_2가 있다. 이 때, 구 S_1 위의 임의의 점을 P, 구 S_2 위의 임의의 점을 Q라 하고, 이 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$을 만족하는 점을 R이라 하자. 다음은 $|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}|$의 최대값을 구하는 풀이과정이다.

[풀이]

$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$, $\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$라 하면

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}=(\vec{q}-\vec{p})+(\vec{q}+\vec{p})$$

이므로

$$|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}|^2=|\vec{q}-\vec{p}|^2+2(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p})+|\vec{q}+\vec{p}|^2$$

$$=2(\boxed{(가)})+2(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

그런데, $(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p})\leq|\vec{q}-\vec{p}||\vec{q}+\vec{p}|$

$$=\sqrt{|\vec{q}-\vec{p}|^2|\vec{q}+\vec{p}|^2}$$

$$=\boxed{(나)} \quad \cdots\cdots ㉡$$

따라서, ㉠과 ㉡에 의해 $|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}|$의 최대값은 $\boxed{(다)}$이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓰면? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\|\vec{p}\|^2+\|\vec{q}\|^2$	$\sqrt{25-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$	$\sqrt{60}$
②	$\|\vec{p}\|^2+\|\vec{q}\|^2$	$\sqrt{25^2-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$	15
③	$\|\vec{p}\|^2+\|\vec{q}\|^2$	$\sqrt{25^2-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$	10
④	$\|\vec{p}\|^2\|\vec{q}\|^2$	$\sqrt{25-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$	10
⑤	$\|\vec{p}\|^2\|\vec{q}\|^2$	$\sqrt{25-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$	$\sqrt{60}$

7. 쌍곡선 $4x^2-9y^2=36$ 이 x축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하고, 직선 $x=t$ (단, $t>3$) 가 이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 C, D 라 하자. t의 값이 변함에 따라 두 직선 AC 와 BD 의 교점 P 는 곡선을 그린다. 이 때, 이 곡선의 두 초점 사이의 거리는? [4점]

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{13}$

④ $2\sqrt{15}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

8. 자연수 n과 실수 x에 대하여 함수 $F_n(x)$ 가

$$F_n(x)=\int \frac{x^{3n}-1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$F_n(1)=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n-5}+\cdots+\frac{1}{2}-1$$

와 같이 정의될 때, $F_n(0)$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{n(n-1)}{2}$

② $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

③ $\dfrac{(n-1)(n-2)}{n+1}$

④ 0

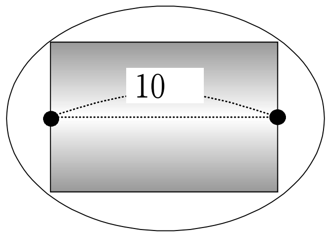
⑤ 1

9. 빨간 공 4 개와 파란 공 2 개가 들어 있는 상자 A 가 있다. 상자 A 에서 동시에 공 3 개를 꺼 내어 비어 있는 상자 B 에 넣은 다음 다시 상자 B 에서 공 1 개를 꺼냈다. 상자 B 에서 꺼낸 공이 파란 공이었을 때 상자 A 에서 상자 B 로 옮겨진 공 3 개가 빨간 공 2 개와 파란 공 1 개일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

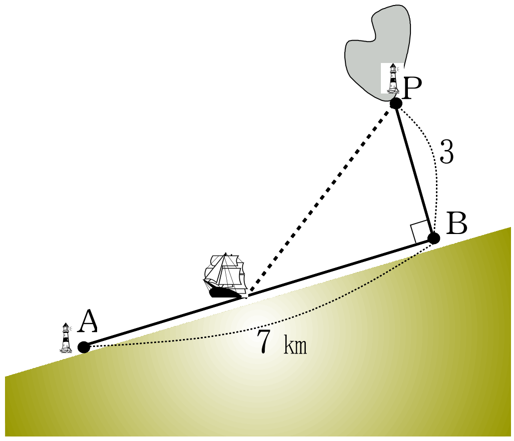
10. 오른쪽 그림과 같이 편평한 땅에 거리가 10 m 떨어진 두 개의 말뚝 이 있다. 두 개의 말뚝에 길이가 14 m 인 끈을 묶고 이 끈을 팽팽하 게 유지하면서 곡선을 그렸다. 두 말뚝을 지나면서 이 곡선에 접하는 직사각형 모양의 꽃밭을 만들었을 때, 이 꽃밭의 넓이는? [3점]



① $\frac{400}{7}$ ㎡ ② $\frac{420}{7}$ ㎡ ③ $\frac{440}{7}$ ㎡

④ $\frac{460}{7}$ ㎡ ⑤ $\frac{480}{7}$ ㎡

11. 어느 항구 A 에서 해안선과 인근 섬의 P 지점을 운항하는 관광유람선이 있다. 그림과 같이 P 지점에서 해안선까지의 최단거리인 지점 B 까지의 거리는 3 ㎞이고, B 로부터 해안선을 따라 7 ㎞ 떨어진 지점에 A 가 위치하고 있다. 이 유람선은 A 를 출발하여 해안선을 따라서 어떤 지점까지는 매시 12 ㎞의 속력으로 운항한 후, 곧바로 그 지점으로부터 섬의 P 지점을 향하여 매시 10 ㎞의 속력으로 직선거리를 운항한다. 이 때, 이 유람선이 항구 A 를 출발하여 섬의 P 지점에 도착하기까지 45 분 걸리고 운항거리가 최소가 되도록 운항경로를 정한다면 해안선을 따라서 이동한 거리는? (단, 해안선은 직선을 이루고 있다.) [3점]



① 2 ㎞

② $\frac{21}{11}$ ㎞

③ $\frac{25}{11}$ ㎞

④ $\frac{27}{11}$ ㎞

⑤ 3 ㎞

12. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \left[\frac{n}{4} \right]$ 이라 하고, 수열 $\{a_n\}$ 을

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0\,,\ \ a_n = \sum_{k=1}^{f(n)} k \ \ (\text{단, } n = 4, 5, 6, \cdots)$$

으로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{28} a_n$ 의 값은?

(단, 실수 x 에 대하여 $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

① 204 ② 212 ③ 220

④ 224 ⑤ 252

13. 어느 대학에서는 공개선발시험으로 40 명의 학생을 선발하여 해외연수를 보내려고 한다. 이 시험에 응시한 학생 1600 명의 시험성적은 평균 65 점, 표준편차 10 점인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 표준정규분포표를 이용하여 선발된 학생의 최저점수를 구하면? [3점]

① 80.3

② 84.6 점

③ 86.7 점

④ 87.4 점

⑤ 90.8 점

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq z)$
1.53	0.4370
1.96	0.4750
2.17	0.4850
2.24	0.4875
2.58	0.4951

14. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}_1(1, -1)$, $\mathrm{P}_2(4, -2)$에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$를 $2:1$로 내분하는 점을 P_3, 선분 $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}$을 $2:1$로 내분하는 점을 P_4이라 하자. 이와 같은 과정을 계속 하여 선분 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$을 $2:1$로 내분하는 점을 P_{n+2} (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$)라 하자.

이 때, 점 P_n의 좌표를 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$이라 하면 $x_{2005} - y_{2005}$의 값은? [4점]

① $6 + 3^{-2003}$ ② $6 - 3^{-2003}$ ③ $5 + 3^{-2003}$

④ $5 - 3^{-2003}$ ⑤ $5 - 3^{-2005}$

15. 실수전체의 집합에서 정의된 다항함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하고, 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)$ 를 만족한다. 이 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & (x\neq 0) \\ f'(0) & (x=0) \end{cases}$$

으로 정의하자. [보기]에서 함수 $g(x)$ 에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

[보기]

ㄱ. 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=g(x)$ 이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$ 는 일차함수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 두 부등식 $\begin{cases} \log_y(1-x^2)\leqq 2 \\ 2^y\leqq 2\cdot 4^x \end{cases}$ 을 동시에 만족시키는 영역의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{4}(\pi+1)$ ② $\frac{1}{4}(\pi+3)$ ③ $\frac{1}{4}(\pi+5)$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

17. 실수 a, b와 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 B를 $B=PAP^{-1}$라 하자.

[보기]에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.) [4점]

[보기]

ㄱ. $B=O$이면 $A=O$이다.

ㄴ. $A^3=E$이면 $B^{100}=B$ 이다.

ㄷ. $AB=E$를 만족하는 행렬 A가 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄴ, ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 두 함수 $g(x)$, $h(x)$ 를 $g(x)=f'(x)$, $h(x)=g'(x)$ 로 정의하자. $g(0)=h(0)=0$ 이고 $f(0)\,h'(0)<0$ 일 때, 방정식 $f(x)=0$ 의 실근에 대한 설명으로 옳은 것은? [3점]

① 서로 다른 세 개의 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 세 개의 음의 실근을 갖는다.

③ 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 갖는다.

④ 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖는다.

⑤ 한 개의 양의 실근을 갖는다.

19. 다음은 각 항이 정수이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4$ 이 어떤 정수의 제곱임을 증명하는 과정이다.

[증명]

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$$a_1 = a - 3k,\ \ a_2 = a - k,\ \ a_3 = a + k,\ \ a_4 = a + 3k$$

이 성립하도록

$$a = \boxed{\text{(가)}},\ \ k = \boxed{\text{(나)}}$$

를 택하면

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4 = \left(\boxed{\text{(다)}}\right)^2$$

이 성립한다.

이 때, $\boxed{\text{(다)}} = a_2{}^2 + a_2 d - d^2$이고,

a_2와 d는 정수이므로 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4$는 정수의 제곱이 된다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓰면? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{a_2 + a_3}{2}$	$\dfrac{d}{2}$	$a^2 - 5k^2$
②	$\dfrac{a_2 + a_3}{2}$	$\dfrac{d}{2}$	$a^2 - 3k^2$
③	$\dfrac{a_2 + a_3}{2}$	$\dfrac{d}{4}$	$a^2 - 5k^2$
④	$\dfrac{a_1 + a_4}{2}$	$\dfrac{d}{2}$	$a^2 - 3k^2$
⑤	$\dfrac{a_1 + a_4}{2}$	$\dfrac{d}{4}$	$a^2 - 3k^2$

20. 모든 자연수 n 에 대하여 각 항이 실수인 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$ 이

$$a_{n+1}{}^2 + 4a_n{}^2 + (a_1 - 2)^2 = 4a_{n+1}a_n$$

$$b_n = \log_{\sqrt{2}} a_n$$

와 같이 정의될 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k = 72$ 가 성립하도록 하는 자연수 m 의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10

④ 11 ⑤ 12

21. $a_n = 3n^2 - 3n$ ($n = 1, 2, \cdots$)과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n이 처음으로 16 자리의 정수가 되도록 하는 n 을 10 으로 나눈 나머지는? [4점]

① 0 ② 1 ③ 2

④ 8 ⑤ 9

22. 양궁대회에 참가한 어떤 선수가 활을 쏘아 과녁의 10 점 부분을 명중시킨 다음 다시 활을 쏘아 10 점 부분을 명중시킬 확률이 $\frac{8}{9}$ 이고, 10 점 부분을 명중시키지 못한 다음 다시 10 점 부분을 명중시키지 못할 확률이 $\frac{1}{5}$ 이다. 이 선수가 반복하여 계속 활을 쏜다고 할 때, n 번째에 10 점 부분을 명중시킬 확률을 p_n 이라 하자. 이 때, $\lim_{n\to\infty} p_n$ 의 값은? [4점]

① $\frac{14}{27}$　② $\frac{17}{27}$　③ $\frac{25}{41}$

④ $\frac{32}{41}$　⑤ $\frac{36}{41}$

23. 두 지수함수

$$f(x) = 9^x + a, \quad g(x) = b \cdot 3^x + 2$$

에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 곡선 $y = g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 x 좌표가 $x = \log_3 2$, $x = \log_3 k$ (단, $k > 2$)일 때, [보기]에서 실수 a , b 에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

[보기]

ㄱ. $b^2 = 4a - 8$

ㄴ. $a = 2b - 2$

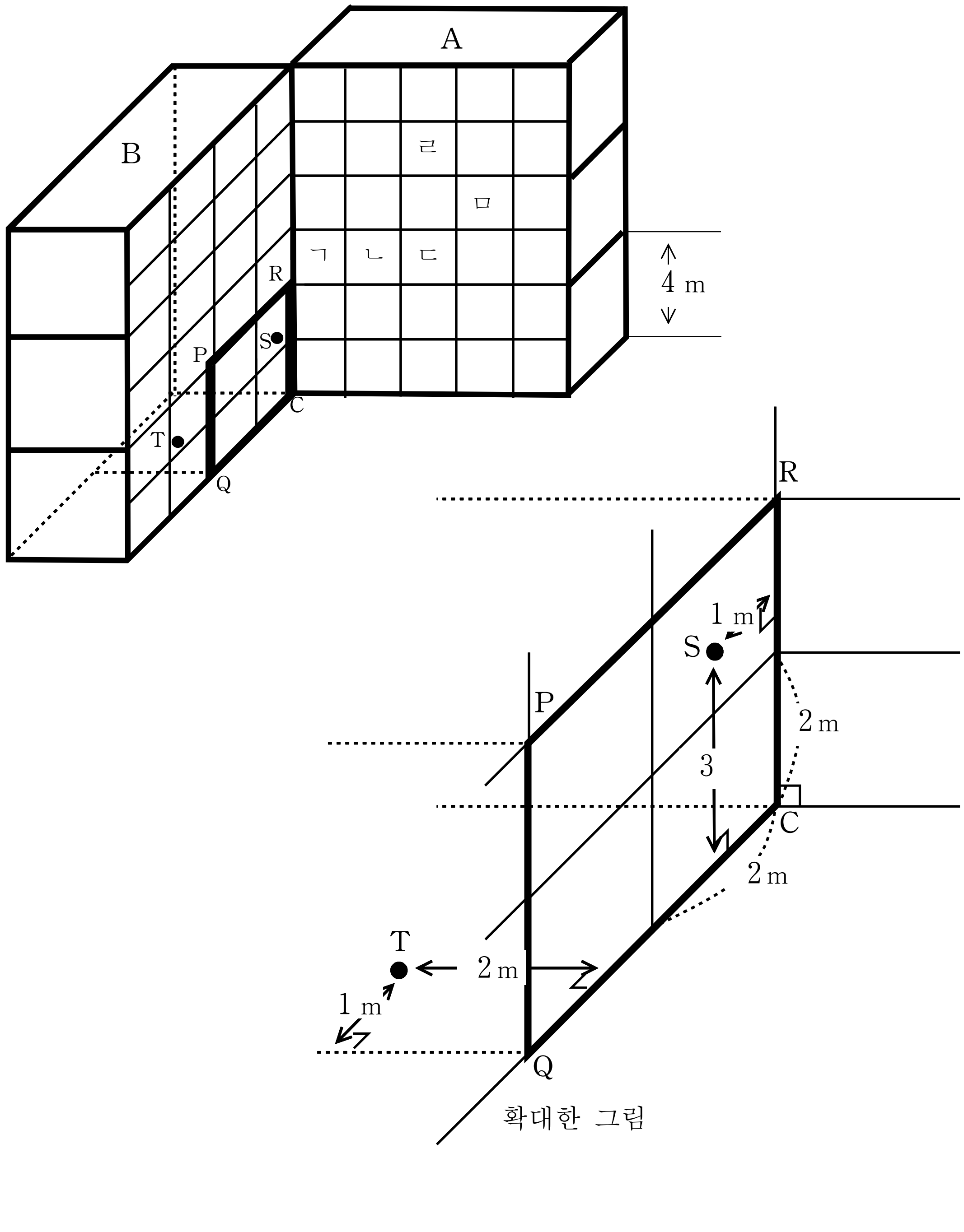
ㄷ. $a > 6$

① ㄴ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24. 그림과 같이 각 층의 높이가 4 m인 직육면체 형태의 두 건물 A, B 가 있다. 건물 A 와 건물 B 는 서로 수직으로 붙어 있고, 두 건물의 외벽은 한변의 길이가 2 m인 정사각형 모양의 유리창으로 서로 이어져있다. 어떤 사람이 건물 A 의 어느 창가에서 건물 B 의 유리창을 향하여 레이저 빛을 쏘았는데 이 레이저 빛은 건물 B 의 창문의 S 지점과 바닥 면의 T 지점을 지났다. 다음 중 레이저를 쏜 창가는? (단, 유리창들의 두께는 무시하고, 레이저 빛은 유리창을 통과할 때 굴절되지 않는다고 가정한다.) [4점]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄹ ⑤ ㅁ



확대한 그림

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & a\end{pmatrix}$에 대하여 $A^2X=X$를 만족하는 행렬 X가 2 개 이상 존재하도록 실수 a의 값을 정할 때, $A\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\ 24\end{pmatrix}$를 만족하는 상수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오. [3점]

단, 행렬 X는 2×1 행렬이다

26. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3-2x^2+3x-4}=1\ ,\quad \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=4$$

이 성립하고, 극한 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{13f(x)}{x^2-3x+2}$이 α로 수렴할 때, 상수 α의 값을 구하시오. [3점]

27. $xy=10$ 이고 $1 \leqq x \leqq 10^4$ 일 때, $(\log_{10} y)^3 + 3(\log_{10} x)^2 - 6\log_{10} x + 15$ 의 최대값을 구하시오. [3점]

28. 동일한 직선도로 위를 같은 방향으로 달리는 두 자동차 A 와 B 가 있다. 자동차 A 가 매시 72 ㎞의 속력으로 달리고 있던 중 P 지점에 이르렀을 때, P 지점에서 100 m 앞에 정지하고 있던 자동차 B 를 발견하고 제동장치를 작동하여 -5 m/초^2 의 가속도로 운행하였다. A 가 제동장치를 작동한지 4 초가 되는 순간에 정지하고 있던 B 는 6 m/초^2 의 가속도로 출발하였고, 동시에 A 는 10 m/초^2 의 가속도로 계속하여 운행하였다. 이 때, P 지점에서 A 가 B 를 추월하는 지점까지의 거리는 몇 m 인지를 구하시오. [4점]

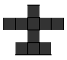
29. 실수 x에 대한 함수 $f(x)$가

$$f(x) = {}_6C_0 + {}_6C_1 x^2 + {}_6C_2 x^4 + {}_6C_3 x^6 + {}_6C_4 x^8 + {}_6C_5 x^{10} + {}_6C_6 x^{12}$$

와 같이 정의될 때, $f(\tan\theta) = 2^{12}$을 만족하는 각 θ에 대하여 $\dfrac{36\theta}{\pi}$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$) [4점]

30. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$)으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{r_n\}$의 제 n항 r_n은 a_n을 a_5로 나눈 나머지로 정의하자. 예를 들어 r_1은 a_1을 a_5로 나눈 나머지이고, r_2는 a_2를 a_5로 나눈 나머지이다.

이 때, 다음 그림과 같이 100개의 작은 사각형으로 이루어진 바둑판 모양의 사각형 각 칸에 r_1부터 r_{100}까지의 수를 차례로 채워나갈 때, 글자  모양의 어두운 부분에 채워지는 수들의 합을 구하시오. [4점]

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
r_{11}									r_{20}
r_{21}									r_{30}
r_{31}									r_{40}
r_{41}									r_{50}
r_{51}									r_{60}
r_{61}									r_{70}
r_{71}									r_{80}
r_{81}									r_{90}
r_{91}									r_{100}