수리 영역(문과 A형)

1. ④	2. ④	3. ⑤	4. ②	5. ④
6. ⑤	7. ③	8. ③	9. ⑤	10. ③
11. ④	12. ⑤	13. ②	14. ④	15. ①
16. ③	17. ②	18. ④	19. ①	20. ①
21. ②	22. ⑤	23. ③	24. ②	25. 10
26. 20	27. 60	28. 395	29. 12	30. 39

1. 지수와 로그 정답 ④

$n=2006$, $a=\frac{3}{4}$ 이므로

$$A=\sqrt[n]{a^{n-1}}=a^{\frac{n-1}{n}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2005}{2006}}$$

$$B=\sqrt[n]{a^{n+1}}=a^{\frac{n+1}{n}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2007}{2006}}$$

$$C=\sqrt[n+1]{a^{n}}=a^{\frac{n}{n+1}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2006}{2007}}$$

여기서 $\frac{2005}{2006}<\frac{2006}{2007}<\frac{2007}{2006}$ 이므로

$\therefore\ B<C<A$

2. 수열의 극한 정답 ④

수열 $\{a_n\}$의 공차가 8이므로

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n}8=8n$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}b_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}8k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2}$$

$$=\frac{4}{4}=1$$

3. 확률 정답 ⑤

전류가 A에서 B로 흐를 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) s_1, s_2가 닫혀 있고, s_3도 닫혀 있는 경우

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

(ⅱ) s_1, s_2가 닫혀 있고, s_3는 열려 있는 경우

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$$

(ⅲ) s_1, s_2 둘 다 닫혀 있지는 않고, s_3는 닫혀 있는 경우

$$\left(1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{8}{27}=\frac{11}{27}$$

4. 수열의 극한 정답 ②

$\lim_{n\to\infty}S_n=2$로 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+S_n}{S_n^{\,3}}=\frac{0+2}{8}=\frac{1}{4}$$

〔다른 풀이〕

$a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+S_n}{S_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2S_n-S_{n-1}}{S_n^3}=\frac{4-2}{8}=\frac{1}{4}$$

5. 순열과 조합 정답 ④

혈액형이 A형, B형, AB형, O형인 학생 수를 각각 a, b, c, d라 하면

(가) $a+b=c+d$

(나) $a+c=b+d$

(다) $a=4$

(가), (나), (다)에 의하여 $b=c$, $d=4$이다.

$\therefore\ a=4,\ b=1,\ c=1,\ d=4$

따라서, A형 4명, B형 1명, AB형 1명, O형 4명이므로, 10개의 혈액팩 모두를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{10!}{4!\,4!}=6300\text{(가지)}$$

6. 함수의 극한 정답 ⑤

이항정리에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

여기서 $k=0$일 때 ${}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{n}\right)^0=1$,

$k=1$일 때 ${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{n}\right)^1=1$이므로

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$=\boxed{2}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{1}{n^k}$$

$$= 2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \times \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k}}$$

$$= 2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right\}$$

$$< 2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$< 2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

그런데, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \times \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k}} > 0$

이므로,

$$2 < \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \boxed{3}$$

7. 행렬 정답 ③

$\begin{pmatrix} -22 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} = -2A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 이므로

$$A\begin{pmatrix} -22 \\ -2 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 20 \\ -30 \end{pmatrix} = A\cdot(-2)A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 10A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= (-2A^2+10A)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= 12E\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$(\because A^2-5A=-6E)$

$$= \begin{pmatrix} 24 \\ -36 \end{pmatrix}$$

[다른 풀이]

$A^2-5A+6E=O$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이므로

$$A\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = O$$

$$\therefore A\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix} -22 \\ -2 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 20 \\ -30 \end{pmatrix} = -2A\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} + 10A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= -2\begin{pmatrix} 43 \\ 23 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 \\ -36 \end{pmatrix}$$

8. 행렬 정답 ③

$ax^2+y=4$, $by=7$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$a+3=4$에서 $a=1$

$3b=7$에서 $b=\frac{7}{3}$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{3}{7}\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{3}{7}\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

따라서, 구하는 모든 성분의 합은 4이다.

9. 확률 정답 ⑤

구하는 확률은 상자 A에서 빨간 공 2개, 파란 공 1개를 꺼내는 확률과 같다.

$$\therefore \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3} = \frac{3}{5}$$

10. 수열 정답 ③

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k} = \frac{2(2^n-1)}{2-1} = 2^{n+1}-2$$

그런데, 65의 배수의 끝자리 수는 0 또는 5이므로, 2^{n+1}의 끝자리 수는 2여야 한다.

$2^9=512$, $2^{13}=8192$, $2^{17}=131072, \cdots$이므로

$2^9-2=510$, $2^{13}-2=8190$, $2^{17}-2=131070, \cdots$

이 중에서 $2^{13}-2=8190$이 처음으로 65의 배수가 되므로, n의 최소값은 12이다.

11. 수열의 극한 정답 ④

한 회에 투여한 약의 양을 $a$mg이라 하자.
12시간마다 계속하여 일정한 양을 투여하므로
12시간 후의 약의 양은

$$a+\frac{a}{8}$$

24시간 후의 약의 양은

$$a+\frac{1}{8}\left(a+\frac{a}{8}\right) = a+\frac{a}{8}+\frac{a}{8^2}$$

$\cdots$

$12n$시간 후의 약의 양은

$$a+\frac{a}{8}+\frac{a}{8^2}+\frac{a}{8^3}+\cdots+\frac{a}{8^n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} a$$

따라서, 이 약을 규칙적으로 장기간 투여하는 약의 양을 S라 하면

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} a = \frac{a}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}a$$

$\therefore \frac{8}{7}a \le 560$

$\therefore a \le 490$

따라서, 구하는 약의 최대량은 490mg이다.

12. 수열 정답 ⑤

$f(n)=\left[\frac{n}{4}\right]$이므로

$f(4k)=f(4k+1)=f(4k+2)=f(4k+3)=k$(단, k는 자연수)

따라서, $a_1=a_2=a_3=0$이고,

$a_{4m}=a_{4m+1}=a_{4m+2}=a_{4m+3}=\sum_{k=1}^{m}k$ (단, m은 자연수)

이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{28}a_n=\left(1+\frac{2\cdot3}{2}+\frac{3\cdot4}{2}+\frac{4\cdot5}{2}+\frac{5\cdot6}{2}+\frac{6\cdot7}{2}\right)\times4+\frac{7\cdot8}{2}$$
$$=252$$

13. 확률분포와 통계적 추정 정답 ②

이 시험의 성적을 확률변수 X라 하면, X는 정규분포 $N(65,\ 10^2)$을 따른다.

선발된 학생의 최저 점수를 x(점)이라 하면,

$$P(X\ge x)=0.5-\frac{40}{1600}$$

$$P\left(Z\ge\frac{x-65}{10}\right)=0.475$$

$$\therefore \frac{x-65}{10}=1.96$$

$\therefore x=84.6$(점)

14. 수열 정답 ④

두 점 $P_n(x_n,\ y_n)$, $P_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$에 대하여, 선분 P_nP_{n+1}을 2 : 1로 내분하는 점을 $P_{n+2}(x_{n+2},\ y_{n+2})$라 하면

$$x_{n+2}=\frac{x_n+2x_{n+1}}{2+1}$$

$$x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{3}(x_{n+1}-x_n)$$

$$x_{2005}=x_1+\sum_{k=1}^{2004}(x_2-x_1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$=1+3\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=1+\frac{9}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}\right\}$$

마찬가지 방법으로

$$y_{2005}=y_1+\sum_{k=1}^{2004}(y_2-y_1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$=-1+(-1)\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=-1-\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}\right\}$$

$$\therefore x_{2005}-y_{2005}=2+\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}\right\}\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)$$

$$=2+3-3\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}$$

$$=5-3^{-2003}$$

15. 확률변수와 확률분포 정답 ①

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따른다고 하면

$np=80$, $np(1-p)=64$

$\therefore n=400,\ p=\frac{1}{5}$

$$\therefore \sum_{r=0}^{n}5^r P(X=r)=\sum_{r=0}^{400}5^r\cdot{}_{400}C_r\left(\frac{1}{5}\right)^r\left(\frac{4}{5}\right)^{n-r}$$

$$=\sum_{r=0}^{400}{}_{400}C_r\left(\frac{5}{5}\right)^r\left(\frac{4}{5}\right)^{n-r}$$

$$=\left(1+\frac{4}{5}\right)^{400}$$

$$=\left(\frac{9}{5}\right)^{400}$$

16. 지수함수와 로그함수 정답 ③

$\log_y(1-x^2)\le 2$에서

$y>0$, $y\ne1$, $-1<x<1$이고

$0<y<1$일 때, $1-x^2\ge y^2 \Rightarrow x^2+y^2\le1$

$y>1$일 때, $1-x^2\le y^2 \Rightarrow x^2+y^2\ge1$

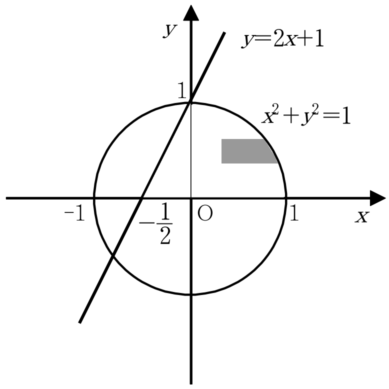
한편, $2^y\le2\cdot4^x$에서

$2^y\le2^{1+2x}$

$\therefore y\le1+2x$

(i) $0<y<1$, $-1<x<1$일 때

$x^2+y^2\le1$, $y\le2x+1$을 만족하는 영역은 다음 그림의 빗금 친 부분과 같다.

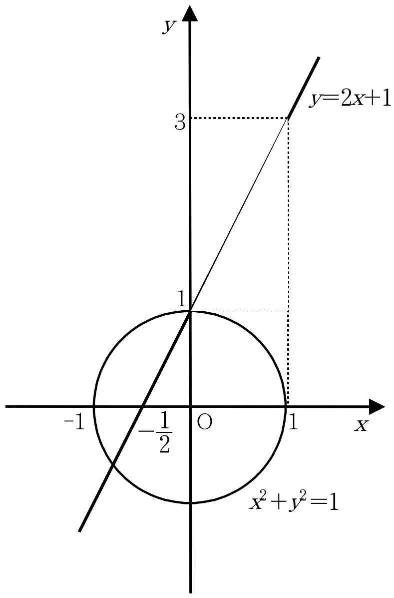


따라서, 빗금 친 부분의 넓이는

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}$$

(ii) $y>1$, $-1<x<1$일 때,

$x^2+y^2\geq1$, $y\leq2x+1$을 만족하는 영역은 다음 그림의 빗금 친 부분과 같다.



따라서, 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$

(i), (ii)에 의하여 구하는 넓이는

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{1}{4}(\pi+5)$$

17. 행렬 정답 ②

ㄱ. 〈참〉 $B=O$이면, $PAP^{-1}=O$

$\therefore A=P^{-1}OP=O$

ㄴ. 〈참〉 $B^{100}=PA^{100}P^{-1}$

$=P(A^3)^{33}AP^{-1}$

$=PAP^{-1}(\because A^3=E)$

$=B$

ㄷ. 〈거짓〉 $AB=APAP^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}a&b\\a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a+b&b\\a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-b&b\\a&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a^2-b^2+ab&ab+b^2\\a^2-ab&ab\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}a^2-b^2+ab=1,\ ab+b^2=0\ \cdots\ ㉠\\a^2-ab=0,\ ab=1\end{cases}$$

$ab=1$을 ㉠에 대입하면

$b^2=-1$

b는 실수이므로 모순이다.

따라서, $AB=E$를 만족하는 행렬 A는 존재하지 않는다.

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

18. 지수함수와 로그함수 정답 ④

$3(\log_a c)^2-2(\log_b c)^2=-(\log_a c)(\log_b c)$에서

$\log_a c=x$, $\log_b c=y$라 하면

$3x^2-2y^2=-xy$

$(3x-2y)(x+y)=0$

$\therefore y=\frac{3}{2}x$ 또는 $y=-x$

그런데 $a>1$, $b>1$, $c>1$이므로 $x>0$, $y>0$이다.

$\therefore y=\frac{3}{2}x$

$\log_b c=\frac{3}{2}\log_a c$

$\frac{1}{\log_c b}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log_c a}$

$3\log_c b=2\log_c a$

$\log_c b^3=\log_c a^2$

$\therefore b^3=a^2=8(\because a^2b^3=64)$

$\therefore a=2^{\frac{3}{2}}$, $b=2$

$\therefore \log_2 ab=\log_2 2^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$

19. 수열 정답 ①

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_1=a-3k$

$a_2=a-k\cdots\cdots$ ①

$a_3=a+k\cdots\cdots$ ②

$a_4=a+3k$

①+②를 하면, $a=\boxed{\frac{a_2+a_3}{2}}$

②-①을 하면, $k=\frac{a_3-a_2}{2}=\frac{d}{2}\boxed{}$

$\therefore a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4+d^4$

$=(a-3k)(a+3k)(a-k)(a+k)+d^4$

$=(a^2-9k^2)(a^2-k^2)+16k^4$

$=a^4-10a^2k^2+25k^4$

$=(\boxed{a^2-5k^2})^2$

이 때, $(a^2-5k^2)^2=a_2{}^2+a_2d-d^2$이고, a_2와 d는 정수이므로 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4+d^4$은 정수의 제곱이 된다.

20. 수열 정답 ①

$a_{n+1}{}^2+4a_n{}^2+(a_1-2)^2=4a_{n+1}a_n$에서

$(a_{n+1}-2a_n)^2+(a_1-2)^2=0$

$\therefore a_{n+1}=2a_n,\ a_1=2$

$\therefore a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

$b_n=\log_{\sqrt{2}}a_n=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^n=2n$

$\therefore \sum_{k=1}^{m}b_k=\sum_{k=1}^{m}2k=m(m+1)=72$

$(m+9)(m-8)=0$

$\therefore m=8$($\because m$은 자연수)

21. 수열 정답 ②

$a_n=3n^2-3n$이므로

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k)$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-\frac{3n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)(2n+1-3)}{2}$

$=n(n+1)(n-1)$

S_n이 16자리의 수가 되려면

$n(n+1)(n-1)>10^{15}$

여기서 $n=10^5$이라 하면 $10^{15}-10^5 \not> 10^{15}$

$n=10^5+1$이라 하면

$(10^5+1)(10^5+2)10^5=10^{15}+3\cdot 10^{10}+2\cdot 10^5>10^{15}$

따라서, S_n이 처음으로 16자리의 정수가 되도록 하는 n은 10^5+1이고, 이를 10으로 나눈 나머지는 1이다..

22. 확률 정답 ⑤

n번째에 10점 부분을 명중시킬 확률을 P_n이라 하자.

$n+1$번째에 10점 부분을 명중시킬 경우는 (n번째에 10점 부분을 명중시키고 $n+1$번째에 명중)시키거나 (n번째에 10점 부분을 명중시키지 못하고 $n+1$번째에 명중)시키는 경우가 있으므로

$P_{n+1}=P_n\cdot\frac{8}{9}+(1-P_n)\cdot\frac{4}{5}$

$=\frac{4}{45}P_n+\frac{4}{5}$

그런데, $\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}P_{n+1}$이므로

$\therefore \lim_{n\to\infty}P_n=\frac{4}{5}\cdot\frac{45}{41}=\frac{36}{41}$

23. 지수함수와 로그함수 정답 ③

$9^x+a=b\cdot 3^x+2$에서

$(3^x)^2-b\cdot 3^x+a-2=0$

$3^x=t$($\because t>0$)라 하면

$t^2-bt+a-2=0\cdots$ ①

ㄱ. 〈거짓〉 ①이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=b^2-4(a-2)>0$

$\therefore b^2>4a-8$

ㄴ. 〈참〉 ①의 한 근이 $3^{\log_3 2}=2$이므로

$4-2b+a-2=0$

$\therefore a=2b-2$

ㄷ. 〈참〉 ①의 두 근이 $3^{\log_3 2}=2,\ 3^{\log_3 k}=k$이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$2k=a-2$

그런데 $k>2$이므로

$\therefore a>6$

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

24. 수열의 극한 정답 ②

$\overline{OQ_1}=\frac{2}{3}r_0,\ \overline{OQ_2}=\frac{2}{3^2}r_0,\ \overline{OQ_3}=\frac{2}{3^3}r_0,\ \cdots$

$\overline{OP_1}=\frac{1}{3}r_0,\ \overline{OP_2}=\frac{1}{3^2}r_0,\ \overline{OP_3}=\frac{1}{3^3}r_0,\ \cdots$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\pi\left(\frac{4}{3^2}-\frac{1}{3^2}\right)r_0{}^2+\pi\left(\frac{4}{3^4}-\frac{1}{3^4}\right)r_0{}^2+\pi\left(\frac{4}{3^6}-\frac{1}{3^6}\right)r_0{}^2+\cdots$

$=\frac{1}{3}\pi r_0^2+\frac{1}{3^3}\pi r_0^2+\frac{1}{3^5}\pi r_0^2+\cdots$

$=\dfrac{\frac{1}{3}\pi r_0^2}{1-\frac{1}{9}}$

$=\frac{3}{8}\pi r_0^2$

25. 행렬 정답 10

$A^2X=X$에서

$\begin{pmatrix}1&2\\3&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&a\end{pmatrix}X-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}7&2+2a\\3+3a&6+a^2\end{pmatrix}X-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}6&2+2a\\3+3a&5+a^2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

이를 만족하는 행렬 X가 2개 이상 존재하므로

$6(5+a^2)-(2+2a)(3+3a)=0$

$24-12a=0$

$\therefore a=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}16\\24\end{pmatrix}$

$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-2\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\24\end{pmatrix}$

$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-16\\-24\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

$\therefore p+q=4+6=10$

26. 지수함수와 로그함수 정답 20

$\frac{2}{\log_x 4}+\frac{1}{\log_y 2}=3$에서

$2\log_4 x+\log_2 y=3$

$\therefore \log_2 x+\log_2 y=3$ … ㉠

$\log_2 3x+\log_{\sqrt{2}} y=\log_2 48$에서

$\log_2 3+\log_2 x+2\log_2 y=4+\log_2 3$ … ㉡

㉡-㉠을 하면 $\log_2 y=1$ $\therefore y=2$

이를 ㉠에 대입하면 $\log_2 x=2$ $\therefore x=4$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=4+16=20$

27. 지수와 로그 정답 60

$\frac{2^{68}\times5^{68}}{2^7\times5^7+2^4\times5^4}=\frac{10^{68}}{10^7+10^4}=\frac{10^{64}}{10^3+1}$

그런데, $10^3<10^3+1<10^4$이므로

$\frac{10^{64}}{10^3+1}=\alpha\times10^{60}$ ($\because 1\leq\alpha<10$)

$\therefore n=60$

28. 지수와 로그 정답 395

$\log_a I_0-\log_a I=kx$에 $x=0.2$를 대입하면

$\log_a\frac{I_0}{I}=0.2k$

$\left(\frac{6}{5}\right)^5=a^k$($\because I=\frac{5}{6}I_0$)

$\therefore 1000\log_{10}a^k=1000\log_{10}\left(\frac{6}{5}\right)^5$

$=5000\log_{10}\frac{6}{5}$

$=5000(2\log_{10}2+\log_{10}3-1)$

$=5000(0.602+0.477-1)$

$=5000\times0.079$

$=395$

29. 순열과 조합 정답 12

$f(x)={}_6C_0+{}_6C_1x^2+{}_6C_2x^4+{}_6C_3x^6+{}_6C_4x^8+{}_6C_5x^{10}+{}_6$

$=(1+x^2)^6$

$\therefore f(\tan\theta)=(1+\tan^2\theta)^6$

$=(\sec^2\theta)^6$

$=\sec^{12}\theta=2^{12}$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\frac{36\theta}{\pi}=12$

30. 수열 정답 39

$a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_3=5,\quad a_4=26,\quad a_5=677,$

$a_6=458330,$ …이므로

$r_1=1,\ r_2=2,\ r_3=5,\ r_4=26,\ r_5=0,\ r_6=1,\ \cdots$

따라서, 어두운 부분에 채워지는 수들의 합은

$r_{46}+(r_{54}+r_{55}+r_{56}+r_{57}+r_{58})+r_{66}+(r_{75}+r_{76}+r_{77})$

$=1+(26+0+1+2+5)+1+(0+1+2)$

$=39$

수리 영역(자연 A형)

1. ④	2. ③	3. ①	4. ③	5. ④
6. ③	7. ②	8. ④	9. ⑤	10. ⑤
11. ④	12. ⑤	13. ②	14. ④	15. ③
16. ③	17. ②	18. ⑤	19. ①	20. ①
21. ②	22. ⑤	23. ③	24. ①	25. 10
26. 65	27. 16	28. 190	29. 12	30. 39

1. 지수와 로그 　정답 ④

$n=2006$, $a=\frac{3}{4}$ 이므로

$$A=\sqrt[n]{a^{n-1}}=a^{\frac{n-1}{n}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2005}{2006}}$$

$$B=\sqrt[n]{a^{n+1}}=a^{\frac{n+1}{n}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2007}{2006}}$$

$$C=\sqrt[n+1]{a^{n}}=a^{\frac{n}{n+1}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2006}{2007}}$$

여기서 $\frac{2005}{2006}<\frac{2006}{2007}<\frac{2007}{2006}$ 이므로

$\therefore\ B<C<A$

2. 다항함수의 적분법 　정답 ③

이차 이하의 다항함수를 $f(x)=px^2+qx+r$ 이라 하면

$$(\text{좌변})=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(px^2+qx+r)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}px^3+\frac{1}{2}qx^2+rx\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{3}p+2q+2r \cdots ㉠$$

$$(\text{우변})=af(0)+bf(1)+cf(2)$$
$$=ar+b(q+q+r)+c(4p+2q+r)$$
$$=(b+4c)p+(b+2c)q+(a+b+c)r \ \cdots ㉡$$

㉠=㉡이므로 $b+4c=\frac{8}{3}$, $b+2c=2$, $a+b+c=2$

$\therefore a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{4}{3}$, $c=\frac{1}{3}$

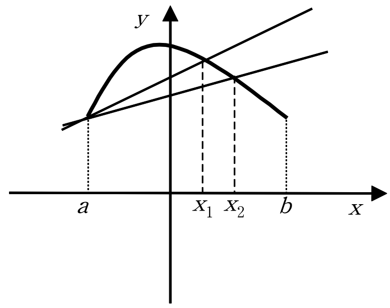
$\therefore abc=\frac{4}{27}$

3. 다항함수의 미분법 　정답 ①

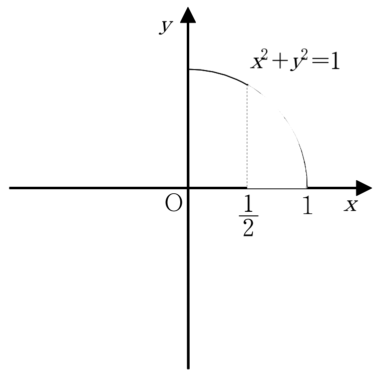
구간 $[a,\ x_1]$, $[a,\ x_2]$에서의 직선의 기울기는 각각

$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}$, $\frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$ 이고,

$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>\frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$ 이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



4. 다항함수의 적분법 　정답 ③



$$\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}y^2dx=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2)dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right)$$
$$=\frac{5}{48}\pi$$

5. 순열과 조합 　정답 ④

혈액형이 A형, B형, AB형, O형인 학생 수를 각각 a, b, c, d라 하면

(가) $a+b=c+d$

(나) $a+c=b+d$

(다) $a=4$

(가), (나), (다)에 의하여 $b=c, d=4$이다.

$\therefore\ a=4,\ b=1, c=1, d=4$

따라서, A형 4명, B형 1명, AB형 1명, O형 4명이므로,

10개의 혈액팩 모두를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{10!}{4!\,4!}=6300$(가지)

6. 벡터

정답 ③

$\overrightarrow{OP}=\vec{p},\ \overrightarrow{OQ}=\vec{q}$라 하면

$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}=(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})$

$=(\vec{q}-\vec{p})+(\vec{q}+\vec{p})$

$\therefore |\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}|^2$

$=|\vec{q}-\vec{p}|^2+2(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p})+|\vec{q}+\vec{p}|^2$

$=2(|\vec{p}|^2\boxed{+|\vec{q}|^2)+2(}\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p})$

$=50+2(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p})$ ⋯ ㉠

$(\because |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=4)$

그런데,

$(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p})\le|\vec{q}-\vec{p}||\vec{q}+\vec{p}|$

$=\sqrt{|\vec{q}-\vec{p}|^2|\vec{q}+\vec{p}|^2}$

$=\sqrt{(|\vec{q}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{p}|^2)(|\vec{q}|^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{p}|^2)}$

$=\sqrt{(|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2)^2-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$

$=\sqrt{25^2-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해서 $|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}|$의 최대값은 10이다.

7. 이차곡선

정답 ②

$4x^2-9y^2=36$⋯⋯ ①

이 x축과 만나는 점 A, B는

A(-3, 0), B(3, 0)

①이 직선 $x=t\,(t>3)$와 만나는 점 C, D는

$\mathrm{C}\left(t,\ \frac{2}{3}\sqrt{t^2-9}\right)$, $\mathrm{D}\left(t,\ -\frac{2}{3}\sqrt{t^2-9}\right)$

따라서, 직선 AC, BD의 방정식은 각각

$y=\dfrac{\frac{2}{3}\sqrt{t^2-9}}{t+3}(x+3)$⋯⋯ ②

$y=-\dfrac{\frac{2}{3}\sqrt{t^2-9}}{t-3}(x-3)$

즉, $\dfrac{\frac{2}{3}\sqrt{t^2-9}}{t+3}(x+3)=-\dfrac{\frac{2}{3}\sqrt{t^2-9}}{t-3}(x-3)$에서

$x=\frac{9}{t}$

이를 ②에 대입하면 $y=\frac{2\sqrt{t^2-9}}{3}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{9}{t},\ \frac{2\sqrt{t^2-9}}{3}\right)$

여기서 $\frac{9}{t}=X,\ \frac{2\sqrt{t^2-9}}{3}=Y$라 하면

$t=\frac{9}{X},\quad Y=\dfrac{2\sqrt{\frac{81}{X^2}-9}}{3}=2\sqrt{9-X^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$\therefore \frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$

이 타원의 초점의 x좌표를 c라 하면

$c^2=9-4=5\qquad \therefore c=\pm\sqrt{5}$

따라서, 이 곡선의 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$이다.

8. 다항함수의 적분법

정답 ④

$F_n(x)=\frac{1}{3n-1}x^{3n-1}-\frac{1}{3n-2}x^{3n-2}+\frac{1}{3n-4}x^{3n-4}$

$-\frac{1}{3n-5}x^{3n-5}+\cdots+\frac{1}{2}x^2-x+C$

(단, C는 적분 상수)

여기에 $x=1$을 대입하면

$F_n(1)=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n-5}+\cdots+\frac{1}{2}-1+C$

$\therefore C=0$

$\therefore F_n(0)=C=0$

9. 확률

정답 ⑤

구하는 확률은 상자 A에서 빨간 공 2개, 파란 공 1개를 꺼내는 확률과 같다.

$\therefore \frac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{3}{5}$

10. 이차곡선

정답 ⑤

그려지는 곡선은 타원이므로, 이 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면,

$2a=14$에서 $a=7$

$b=\sqrt{a^2-25}=\sqrt{24}$

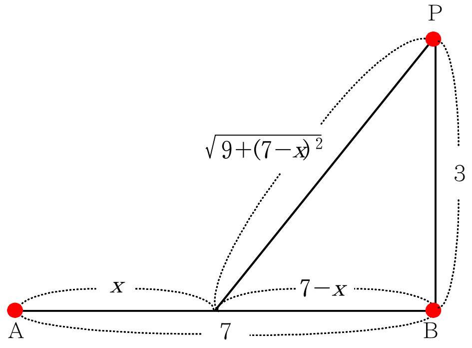
$\therefore \frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{24}=1$

여기서 $x=5$이면 $y=\frac{24}{7}$이므로, 구하는 꽃밭의 넓이는

$5\times\frac{24}{7}\times4=\frac{480}{7}\ (\mathrm{m}^2)$

11. 방정식과 부등식 〔정답 ②〕

유람선이 해안선을 따라서 이동한 거리를 x(km)라 하면



$$\frac{x}{12}+\frac{\sqrt{9+(7-x)^2}}{10}=\frac{45}{60}\cdots ㉠$$

$$5x+6\sqrt{9+(7-x)^2}=45$$

$$6\sqrt{9+(7-x)^2}=45-5x$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$$11x^2-54x+63=0$$

$$(11x-21)(x-3)=0$$

$$\therefore x=\frac{21}{11} \text{ 또는 } x=3$$

이 중 ㉠을 만족하는 것은 $x=\frac{21}{11}$ 뿐이다.

$$\therefore x=\frac{21}{11}\text{(km)}$$

12. 수열 〔정답 ⑤〕

$f(n)=\left[\frac{n}{4}\right]$이므로

$f(4k)=f(4k+1)=f(4k+2)=f(4k+3)=k$(단, k는 자연수)

따라서, $a_1=a_2=a_3=0$이고,

$a_{4m}=a_{4m+1}=a_{4m+2}=a_{4m+3}=\sum_{k=1}^{m}k$ (단, m은 자연수)

이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{28}a_n=\left(1+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\frac{4\cdot 5}{2}+\frac{5\cdot 6}{2}+\frac{6\cdot 7}{2}\right)\times 4+\frac{7\cdot 8}{2}$$

$$=252$$

13. 확률분포와 통계적 추정 〔정답 ②〕

이 시험의 성적을 확률변수 X라 하면, X는 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 10^2)$을 따른다.

선발된 학생의 최저 점수를 x(점)이라 하면,

$$\mathrm{P}(X\geqq x)=0.5-\frac{40}{1600}$$

$$\mathrm{P}\left(Z\geqq\frac{x-65}{10}\right)=0.475$$

$$\therefore \frac{x-65}{10}=1.96$$

$$\therefore x=84.6\text{(점)}$$

14. 수열 〔정답 ④〕

두 점 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$, $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$에 대하여, 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 2 : 1로 내분하는 점을 $\mathrm{P}_{n+2}(x_{n+2},\ y_{n+2})$라 하면

$$x_{n+2}=\frac{x_n+2x_{n+1}}{2+1}$$

$$x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{3}(x_{n+1}-x_n)$$

$$x_{2005}=x_1+\sum_{k=1}^{2004}(x_2-x_1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$=1+3\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=1+\frac{9}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}\right\}$$

마찬가지 방법으로

$$y_{2005}=y_1+\sum_{k=1}^{2004}(y_2-y_1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$=-1+(-1)\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=-1-\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}\right\}$$

$$\therefore x_{2005}-y_{2005}=2+\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}\right\}\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)$$

$$=2+3-3\left(-\frac{1}{3}\right)^{2004}$$

$$=5-3^{-2003}$$

15. 다항함수의 미분법 〔정답 ③〕

ㄱ. 〈참〉 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} & (x\neq 0)\\ f''(0) & (x=0)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. 〈참〉

$$g(2x)=\begin{cases} \dfrac{f(2x)}{2x}=\dfrac{2f(x)}{2x}=\dfrac{f(x)}{x} & (x\neq 0) \\ f'(0) & (x=0) \end{cases}$$

$\therefore g(2x)=g(x)$

ㄷ. 〈거짓〉 $f(x)=x$라 하면,

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}=1 & (x\neq 0) \\ f'(0)=1 & (x=0) \end{cases}$$

이 때, $g(x)$는 상수함수이다.

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

16. 지수함수와 로그함수 　정답 ③

$\log_y(1-x^2)\leqq 2$에서

$y>0$, $y\neq 1$, $-1<x<1$이고

$0<y<1$일 때, $1-x^2\geqq y^2 \Rightarrow x^2+y^2\leqq 1$

$y>1$일 때, $1-x^2\leqq y^2 \Rightarrow x^2+y^2\geqq 1$

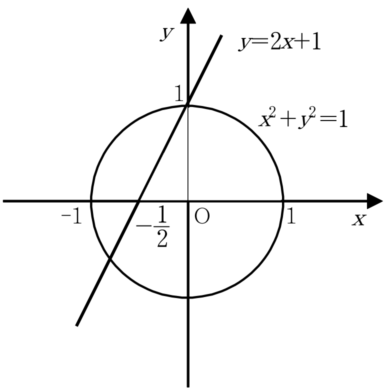
한편, $2^y\leqq 2\cdot 4^x$에서

$2^y\leqq 2^{1+2x}$

$\therefore y\leqq 1+2x$

(i) $0<y<1$, $-1<x<1$일 때

$x^2+y^2\leqq 1$, $y\leqq 2x+1$을 만족하는 영역은 다음 그림의 빗금 친 부분과 같다.

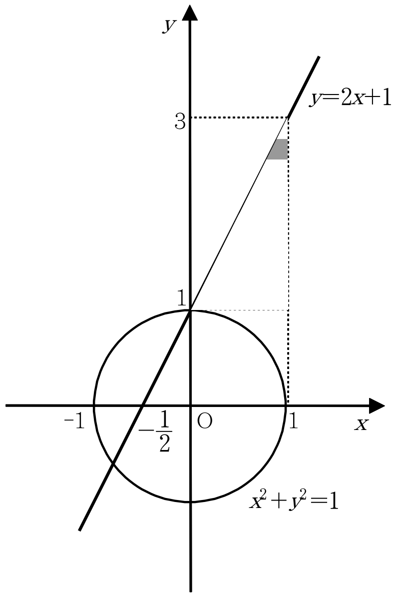


따라서, 빗금 친 부분의 넓이는

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}$$

(ii) $y>1$, $-1<x<1$일 때,

$x^2+y^2\geqq 1$, $y\leqq 2x+1$을 만족하는 영역은 다음 그림의 빗금 친 부분과 같다.



따라서, 빗금 친 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$

(i), (ii)에 의하여 구하는 넓이는

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{1}{4}(\pi+5)$$

17. 행렬 　정답 ②

ㄱ. 〈참〉 $B=O$이면, $PAP^{-1}=O$

$\therefore A=P^{-1}OP=O$

ㄴ. 〈참〉

$$\begin{aligned} B^{100}&=PA^{100}P^{-1}\\ &=P(A^3)^{33}AP^{-1}\\ &=PAP^{-1}(\because A^3=E)\\ &=B \end{aligned}$$

ㄷ. 〈거짓〉

$$\begin{aligned} AB&=APAP^{-1}\\ &=\begin{pmatrix} a & b \\ a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} a+b & b \\ a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-b & b \\ a & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} a^2-b^2+ab & ab+b^2 \\ a^2-ab & ab\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore\begin{cases} a^2-b^2+ab=1,\ ab+b^2=0 \cdots ㉠ \\ a^2-ab=0,\ ab=1 \end{cases}$$

$ab=1$을 ㉠에 대입하면

$b^2=-1$

b는 실수이므로 모순이다.

따라서, $AB=E$를 만족하는 행렬 A는 존재하지 않는다.

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

18. 다항함수의 미분법 정답 ⑤

삼차함수 $f(x)$를 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면,

$g(x)=f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$h(x)=g'(x)=6ax+2b$

$h'(x)=6a$

한편, $g(0)=h(0)=0$이므로

$c=0,\ b=0$

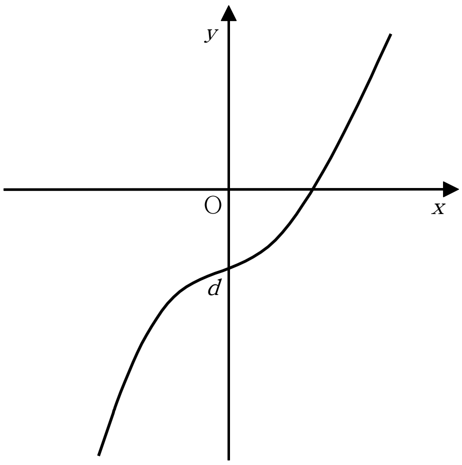
$\therefore f(x)=ax^3+d$

또, $f(0)h'(0)<0$이므로

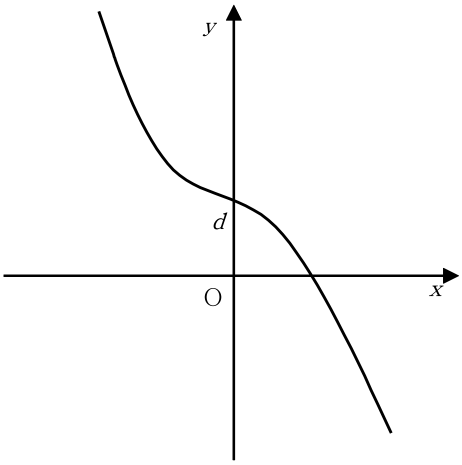
$6ad<0$

$\therefore ad<0$

(i) $a>0$일 때, $f(0)=d<0$이므로



(ii) $a<0$일 때, $f(0)=d>0$이므로



따라서, $f(x)=0$은 한 개의 양의 실근을 갖는다.

19. 수열 정답 ①

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_1=a-3k$

$a_2=a-k$ …… ①

$a_3=a+k$ …… ②

$a_4=a+3k$

①+②를 하면, $a=\boxed{\dfrac{a_2+a_3}{2}}$

②-①을 하면, $k=\dfrac{a_3-a_2}{2}=\dfrac{d}{2}\boxed{}$

$\therefore a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4+d^4$

$=(a-3k)(a+3k)(a-k)(a+k)+d^4$

$=(a^2-9k^2)(a^2-k^2)+16k^4$

$=a^4-10a^2k^2+25k^4$

$=(\boxed{a^2-5k^2})^2$

이 때, $(a^2-5k^2)^2=a_2^{\,2}+a_2d-d^2$이고, a_2와 d는 정수이므로 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4+d^4$은 정수의 제곱이 된다.

20. 수열 정답 ①

$a_{n+1}^{\,2}+4a_n^{\,2}+(a_1-2)^2=4a_{n+1}a_n$에서

$(a_{n+1}-2a_n)^2+(a_1-2)^2=0$

$\therefore a_{n+1}=2a_n,\ a_1=2$

$\therefore a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

$b_n=\log_{\sqrt{2}}a_n=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^n=2n$

$\therefore \sum_{k=1}^{m}b_k=\sum_{k=1}^{m}2k=m(m+1)=72$

$(m+9)(m-8)=0$

$\therefore m=8$($\because m$은 자연수)

21. 수열 정답 ②

$a_n=3n^2-3n$이므로

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k)$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}-\dfrac{3n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1-3)}{2}$

$=n(n+1)(n-1)$

S_n이 16자리의 수가 되려면

$n(n+1)(n-1)>10^{15}$

여기서 $n=10^5$이라 하면 $10^{15}-10^5\not>10^{15}$

$n=10^5+1$이라 하면

$(10^5+1)(10^5+2)10^5=10^{15}+3\cdot10^{10}+2\cdot10^5>10^{15}$

따라서, S_n이 처음으로 16자리의 정수가 되도록 하는 n은 10^5+1이고, 이를 10으로 나눈 나머지는 1이다..

22. 확률

정답 ⑤

n번째에 10점 부분을 명중시킬 확률을 P_n이라 하자.

$n+1$번째에 10점 부분을 명중시킬 경우는 (n번째에 10점 부분을 명중시키고 $n+1$번째에 명중)시키거나 (n번째에 10점 부분을 명중시키지 못하고 $n+1$번째에 명중)시키는 경우가 있으므로

$$P_{n+1}=P_n\cdot\frac{8}{9}+(1-P_n)\cdot\frac{4}{5}$$
$$=\frac{4}{45}P_n+\frac{4}{5}$$

그런데, $\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}P_{n+1}$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty}P_n=\frac{4}{5}\cdot\frac{45}{41}=\frac{36}{41}$$

23. 지수함수와 로그함수

정답 ③

$9^x+a=b\cdot3^x+2$에서

$(3^x)^2-b\cdot3^x+a-2=0$

$3^x=t(\because t>0)$라 하면

$t^2-bt+a-2=0\cdots$ ①

ㄱ. 〈거짓〉 ①이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=b^2-4(a-2)>0$

$\therefore b^2>4a-8$

ㄴ. 〈참〉 ①의 한 근이 $3^{\log_3 2}=2$이므로

$4-2b+a-2=0$

$\therefore a=2b-2$

ㄷ. 〈참〉 ①의 두 근이 $3^{\log_3 2}=2$, $3^{\log_3 k}=k$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2k=a-2$

그런데 $k>2$이므로

$\therefore a>6$

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

24. 벡터

정답 ①

T(3, −2, 0), S(1, 0, 3)이므로, 이 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-3}{-3}$$

여기서 $x=0$이면 $y=1$, $z=\frac{9}{2}$이므로 레이저를 쏜 창가는 ㄱ이다.

25. 행렬

정답 10

$A^2X=X$에서

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&a\end{pmatrix}X-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7&2+2a\\3+3a&6+a^2\end{pmatrix}X-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6&2+2a\\3+3a&5+a^2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

이를 만족하는 행렬 X가 2개 이상 존재하므로

$6(5+a^2)-(2+2a)(3+3a)=0$

$24-12a=0$

$\therefore a=2$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}16\\24\end{pmatrix}$$
$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-2\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\24\end{pmatrix}$$
$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-16\\-24\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$$

$\therefore p+q=4+6=10$

26. 함수의 극한과 연속성

정답 65

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3-2x^2+3x-4}=1$이므로 $f(x)$는 삼차함수이고 첫째항의 계수는 1이다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=4\cdots$ ①, $\lim_{x\to2}\frac{13f(x)}{x^2-3x+2}=\alpha$이므로

$f(x)=(x-t)(x-1)(x-2)$라 둘 수 있다.

이를 ①에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-t)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to1}(x-t)$$
$$=1-t=4$$

$\therefore t=-3$

$\therefore f(x)=(x+3)(x-1)(x-2)$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{13f(x)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{13(x+3)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}13(x+3)$$
$$=13\cdot5=65$$

27. 지수함수와 로그함수 정답 16

$xy=10$에서 $y=\dfrac{10}{x}$이므로,

$$\log_{10}y=\log_{10}\frac{10}{x}=1-\log_{10}x$$

$$\therefore (\log_{10}y)^3+3(\log_{10}x)^2-6\log_{10}x+15$$
$$=(1-\log_{10}x)^3+3(\log_{10}x)^2-6\log_{10}x+15$$

여기서 $\log_{10}x=t$로 치환하면

$1\leqq x\leqq 10^4 \Leftrightarrow 0\leqq t\leqq 4$이다.

$$\therefore\ f(t)=(1-t)^3+3t^2-6t+15$$
$$=-t^3+6t^2-9t+16$$

$$f'(t)=-3t^2+12t-9$$
$$=-3(t^2-4t+3)$$
$$=-3(t-1)(t-3)$$

t	0		1		3		4
$f'(t)$	-	-	0	+	0	-	-
$f(t)$	↘	↘	극소	↗	극대	↘	↘

따라서, $f(t)$는 $t=3$일 때 최대값 $f(3)=16$을 가진다.

28. 다항함수의 적분법 정답 190

A의 속력을 m/s 단위로 변환하면 20m/s가 된다. 따라서, A가 제동장치를 작동한 후 4초간 이동한 거리는

$$vt+\frac{1}{2}at^2=20\cdot4+\frac{1}{2}\cdot(-5)\cdot16=40\ (\mathrm{m})$$

따라서, 4초 때 A와 B 사이의 거리는 100 - 40 = 60(m)이다.

이때부터 A가 $10\,\mathrm{m/s^2}$의 가속도로 운동한 거리가, B가 $6\,\mathrm{m/s^2}$의 가속도로 운동한 거리보다 60m만큼 더 많으면 A가 B를 추월하게 된다.

A가 이동한 거리를 S_A, B가 이동한 거리를 S_B라 하면

$S_A=\dfrac{1}{2}\times10\times t^2=5t^2$, $S_B=\dfrac{1}{2}\times6\times t^2=3t^2$이므로

$5t^2=3t^2+60$에서 $t=\sqrt{30}$

따라서, 구하는 거리는 $40+5\cdot(\sqrt{30})^2=190\ (\mathrm{m})$이다.

29. 순열과 조합 정답 12

$$f(x)={}_6\mathrm{C}_0+{}_6\mathrm{C}_1x^2+{}_6\mathrm{C}_2x^4+{}_6\mathrm{C}_3x^6+{}_6\mathrm{C}_4x^8+{}_6\mathrm{C}_5x^{10}+{}_6$$
$$=(1+x^2)^6$$

$$\therefore f(\tan\Theta)=(1+\tan^2\Theta)^6$$
$$=(\sec^2\Theta)^6$$
$$=\sec^{12}\Theta=2^{12}$$

$$\cos\Theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\Theta=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\frac{36\Theta}{\pi}=12$$

30. 수열 정답 39

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=5$, $a_4=26$, $a_5=677$, $a_6=458330$, …이므로

$r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=5$, $r_4=26$, $r_5=0$, $r_6=1$, …

따라서, 어두운 부분에 채워지는 수들의 합은

$$r_{46}+(r_{54}+r_{55}+r_{56}+r_{57}+r_{58})+r_{66}+(r_{75}+r_{76}+r_{77})$$
$$=1+(26+0+1+2+5)+1+(0+1+2)$$
$$=39$$