

제2교시

수리 · 탐구 영역(I)

자연계

성명

수험번호

홀수형

1

- 먼저 수험생이 선택한 계열의 문제인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지에 수험 번호, 응시 계열, 문형, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
- 주관식 답의 숫자에 0이 포함된 경우, 0을 OMR 답안지에 반드시 표기해야 합니다.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점 또는 3점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $(\sqrt{2})^5$ 의 값은? [2점]

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

2. 이차방정식 $x^2 + 7x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $(\alpha^2 + \beta^2) + 7(\alpha + \beta)$ 의 값은? [3점]

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

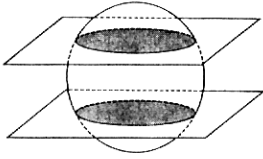
3. $(2 + 2\sin\frac{\pi}{3})(2 - \tan\frac{\pi}{3})$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

4. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ 일 때, $f'(0)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 거리가 1 인 두 평행한 평면으로 반지름의 길이가 1 인 구를 잘라서 얻어진 두 단면의 넓이의 합의 최대값은? [3점]



- ① $\frac{1}{2}\pi$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ π ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

6. 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선이 y 축과 만나는 점의 y 좌표는? [3점]

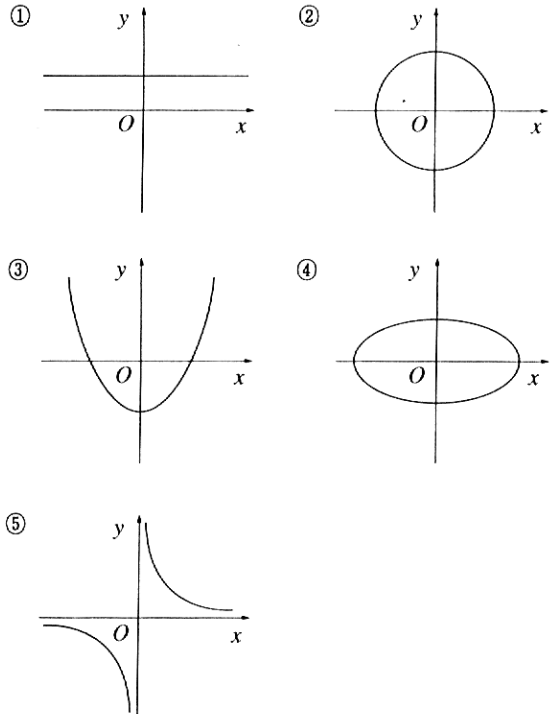
- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 일 때, 행렬 $A^{-1} + AB$ 는?

(단, A^{-1} 는 A 의 역행렬) [3점]

- ① $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

8. 복소평면 위의 다음 곡선 중, 그 위의 어떠한 두 점 $P(z_1)$, $Q(z_2)$ 에 대하여도 복소수 $\frac{z_1}{z_2}$ 이 순허수가 될 수 없는 것은? [3점]



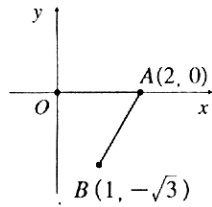
9. 일차변환 f 를 나타내는 행렬이

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

라 하자. 오른쪽 그림의 꺾인 선분

OAB 를 f 에 의하여 옮겨서 얻은

꺾인 선분과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [2점]



- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 1 ⑤ 2

10. 구간 $[0, 1]$ 에서 정의된 연속확률변수 X 의 확률밀도함수가 $f(x) = ax + a$ 로 주어졌을 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

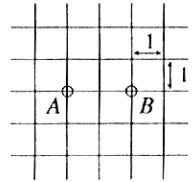
11. 삼차함수 $y = f(x)$ 가 서로 다른 세 실수 a, b, c 에 대하여

$$f(a) = f(b) = 0, \quad f'(a) = f'(c) = 0$$

을 만족시킨다. c 를 a 와 b 로 나타내면? [2점]

- ① $a+b$ ② $\frac{a+b}{2}$ ③ $\frac{a+b}{3}$
④ $\frac{a+2b}{3}$ ⑤ $\frac{2a+b}{3}$

12. 그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1인 바둑판 모양의 도로망이 있다. 두 차량이 각각 A 와 B 에서 출발하여 A, B 이외의 교차로 P 에서 만났다. 두 차량이 움직인 거리의 합이 4가 되는 P 의 위치를 모두 표시하면? [3점]



- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

13. 다음은 좌표평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D 에 대한 설명이다.

- (가) 점 A 와 점 B 는 x 축 위에 있다.
 (나) 점 B 의 x 좌표는 점 A 의 x 좌표보다 크다.
 (다) $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{CD}$

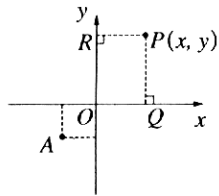
점 A, B, C, D 의 x 좌표를 각각 a, b, c, d 라 할 때 옳은 것은?
 [3점]

- ① $a < d < c < b$ ② $c < a < d < b$ ③ $c < d < a < b$
 ④ $d < a < c < b$ ⑤ $d < c < a < b$

14. 좌표평면의 제 1 사분면 위의 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라 하자. 점 $A(-1, -1)$ 에 대하여

$$\overline{PA} = \overline{PQ} + \overline{PR}$$

를 만족시키는 점 P 의 자취의 개형은? [3점]



- ① ② ③ ④ ⑤

15. 자연수 n 에 대하여 n^2 을 오진법으로 표시했을 때 일의 자리수를 $f(n)$ 이라 하자. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

- <보 기>
 ㄱ. $f(3) = 4$
 ㄴ. $0 \leq f(n) \leq 4$
 ㄷ. $f(n) = 2$ 인 자연수 n 은 없다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 서로 다른 두 부분집합 X, Y 에 대하여 $(X \cup Y) - (X \cap Y)$ 의 가장 작은 원소가 X 에 속할 때, $X \supset Y$ 라 하자. U 의 부분집합

$$A = \{2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 2, 5\}, \quad C = \{2, 4, 5\}$$

에 대하여 옳은 것은? [3점]

- ① $A \supset B \supset C$ ② $A \supset C \supset B$ ③ $B \supset A \supset C$
 ④ $B \supset C \supset A$ ⑤ $C \supset A \supset B$

17. 다음은 지수법칙 $a^{r+s} = a^r a^s$ 으로부터
모든 양수 x, y 에 대하여

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

가 성립함을 증명한 것이다. (단, $a \neq 1, a > 0$)

<증명>

$r = \log_a x, s = \log_a y$ 로 놓으면

$$a^r = x, a^s = \boxed{\text{(가)}}$$

지수법칙으로부터

$$a^{r+s} = \boxed{\text{(나)}}$$

로그의 정의에 의하여

$$r + s = \log_a \boxed{\text{(나)}}$$

그러므로 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [3점]

- ① $x, x+y$ ② $y, x+y$ ③ x, xy
④ y, xy ⑤ $x, \frac{x}{y}$

18. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC} < \overline{AC} < \overline{AB}$ 일 때,
삼각형 내부의 한 점 P 에 대하여

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$$

임을 증명한 것이다.

<증명>

가정에 의해

$$\overline{BC} < \overline{AC} < \overline{AB} \text{ 이므로}$$

$$\angle A < \angle B < \angle C$$

점 P 를 지나고 선분 BC 에 평행한

직선이 선분 AB, AC 와 만나는 점을 각각 D, E 라고 하자.

선분 DE 와 선분 BC 가 평행하므로

$$\angle ADE = \angle B, \angle AED = \angle C$$

따라서

$$\angle A < \angle ADE < \angle AED$$

그러므로 $\triangle ADE$ 에서

$$\boxed{\text{(가)}} \cdots \cdots \text{①}$$

이고

$$\overline{PA} < \overline{AD} \cdots \cdots \text{②}$$

$\triangle BDP$ 에서

$$\overline{PB} < \overline{PD} + \overline{DB} \cdots \cdots \text{③}$$

$\triangle EPC$ 에서

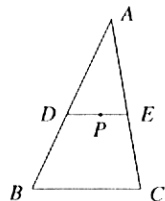
$$\overline{PC} < \overline{PE} + \overline{EC} \cdots \cdots \text{④}$$

①, ②, ③, ④ 에서

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$$

위의 증명에서 (가)에 알맞은 것은? [2점]

- ① $\overline{AD} < \overline{AE} < \overline{DE}$
② $\overline{AD} < \overline{DE} < \overline{AE}$
③ $\overline{AE} < \overline{AD} < \overline{DE}$
④ $\overline{AE} < \overline{DE} < \overline{AD}$
⑤ $\overline{DE} < \overline{AE} < \overline{AD}$

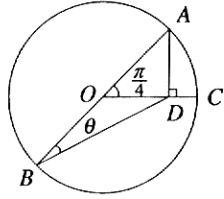


19. 그림에서 선분 AB 는 원 O 의 지름이고,

$$\angle AOC = \frac{\pi}{4}, \quad \overline{OC} \perp \overline{AD}$$

이다. $\angle ABD = \theta$ 일 때,

$\sin 2\theta$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

20. 함수 $y = x^3 + ax$ 의 그래프를 원점을 중심으로 양의 방향으로 45° 회전시켜 얻은 곡선이 실수 전체에서 정의된 어떤 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 되는 실수 a 의 범위는? [2점]

- ① $a \geq 1$ ② $a \geq 0$ ③ $a \leq 1$
④ $a \leq -1$ ⑤ $0 \leq a \leq 2$

21. 다음은 정적분 $\int_0^1 (x^2 + 1) dx$ 의 근사값의 오차의 한계를 구하는 과정의 일부이다.

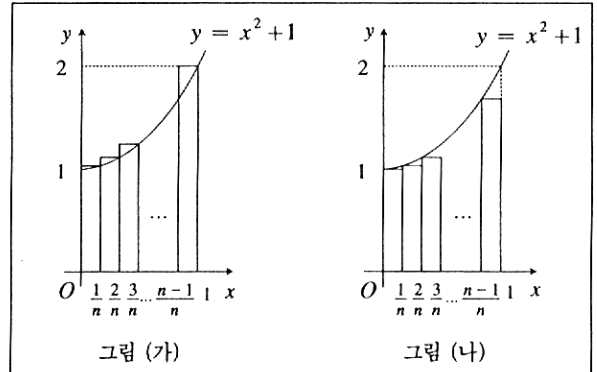


그림 (가), (나)와 같이 폐구간 $[0, 1]$ 을 n 개의 직사각형들의 넓이의 합을 각각 A, B 라 하자.

$$A - B \leq 0.15$$

가 되는 n 의 최소값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

22. 영어의 알파벳 A, B, ..., Z 에 십진법의 수 1 부터 26 에 해당하는 이진법의 수 $00001_{(2)}, 00010_{(2)}, \dots, 11010_{(2)}$ 을 순서대로 대응시키자. 이진법의 수 α 와 β 의 각 자리의 수를 비교하여 같으면 0, 다르면 1을 그 자리에 대응시켜 얻은 이진법의 수를 $\alpha \wedge \beta$ 라 하자. 예를 들면

$$10001_{(2)} \wedge 10101_{(2)} = 00100_{(2)}$$

$$00001_{(2)} \wedge 10101_{(2)} = 10100_{(2)}$$

각 알파벳에 대응하는 이진법의 수를 $10101_{(2)}$ 과 연산 $\wedge$ 을 하여 얻은 이진법의 수로 그 알파벳을 암호화하였다. 예를 들면 암호가 $10100_{(2)}$ 인 알파벳은 A이다. 암호가 $11001_{(2)}$ 인 알파벳은? [2점]

- ① B ② D ③ L ④ P ⑤ S

23. 좌표평면 위의 네 점

$(-2, 2), (4, 2), (1, -2),$

$(4, -2)$ 에 있는 나사를 모두

조이는 작업을 반복하는 로봇팔

의 한쪽 끝을 점 P 에 고정시키

려한다. 로봇팔은 점 P 를

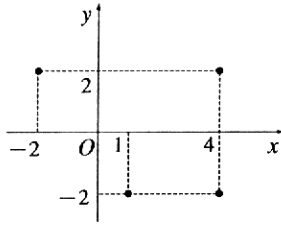
중심으로 360° 회전 가능하고,

점 P 로부터의 거리가 로봇팔의 길이 이하인 모든 곳의 나사를

조일 수 있다. 로봇팔의 길이를 최소로 할 수 있는 점 P 의 좌표는?

[3점]

- ① $(0, 0)$ ② $(0, 1)$ ③ $(0, -1)$ ④ $(1, 0)$ ⑤ $(1, 1)$



주관식 문항 (25~30)

25. 삼차함수 $f(x) = ax^3 + b$ 의 역함수 f^{-1} 가 $f^{-1}(5) = 2$ 를 만족시킬 때, $8a + b$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 다음은 세계 석유 소비 증가 추세에 관한 글이다.

…… 매년 석유 소비량을 조사한 결과, 최근 10년 동안 소비된 석유의 양은 그 이전까지 소비된 석유의 양과 같다. 예를 들어 1981년부터 1990년까지 소비된 석유의 양은 1980년까지 소비된 석유 전체의 양과 같다. ……

이와 같은 석유 소비 추세가 계속된다고 가정하고, 현재까지 소비된 석유의 양을 a , 현재의 석유 매장량을 b 라 할 때, 앞으로 몇 년 동안 석유를 사용할 수 있겠는가? [3점]

- ① $10 \log_2 \left(\frac{b}{2a} + 1 \right)$ ② $10 \log_2 \left(\frac{b}{a} + 1 \right)$
 ③ $10 \log_2 \left(\frac{2b}{a} + 1 \right)$ ④ $10 \log_2 \left(\frac{b}{a} + 2 \right)$
 ⑤ $10 \log_2 \left(\frac{2b}{a} + 2 \right)$

26. 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지가 $4x+3$ 일 때, $f(2x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 구하시오. [2점]

27. 두 벡터

$$\vec{a} = (9, x+1, -12), \quad \vec{b} = (-8, x, 7)$$

이 수직일 때, 양수 x 의 값을 구하시오. [2점]

28. 문자 a, b, c 에서 중복을 허용하여 세 개를 택하여 만든 단어를 전송하려고 한다. 단, 전송되는 단어에 a 가 연속되면 수신이 불가능하다고 하자. 예를 들면 aab, aaa 등은 수신이 불가능하고 bba, aba 등은 수신이 가능하다. 수신 가능한 단어의 개수를 구하시오. [2점]

29. 함수 $f(x)$ 가 $f(10) = 50, f(1) = 3$ 을 만족시킬 때,

$$\sum_{k=1}^9 f(k+1) - \sum_{k=2}^{10} f(k-1)$$

의 값을 구하시오. [3점]

30. 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + 1) \cos x \, dx$ 의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오. [2점]

* 확인 사항

- 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 문제지는 답안지와 함께 제출합니다. 답안지의 표기가 끝나면 답안지는 오른쪽, 문제지는 왼쪽에 놓으시오.