수학 영역

정답

1	③	2	④	3	②	4	①	5	⑤
6	①	7	④	8	②	9	④	10	③
11	③	12	②	13	⑤	14	②	15	①
16	2	17	5	18	163	19	10	20	24
21	28	22	76						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[4]{3}\times 3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=3$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2+1$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4$

3. [출제의도] 등비수열의 일반항 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$ (단, n은 자연수)

$a_1\times a_{13}=a\times ar^{12}=a^2r^{12}=(ar^6)^2=64$

$ar^6=8$ ⋯ ㉠

$\frac{a_5}{a_2}=\frac{ar^4}{ar}=r^3=2$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$4a=8,\ a=2$

따라서 $a_4=ar^3=2\times 2=4$

4. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(ax^3-5)=8a-5$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(ax+1)=2a+1$

$f(2)=2a+1,\ 8a-5=2a+1$

따라서 $a=1$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$g'(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+0\times f'(1)=2\times 5=10$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ 이므로

$\cos\theta+\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{5}$

7. [출제의도] 적분과 미분의 관계 이해하기

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^3$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2$

$xf'(x)=3x^2$

$f'(x)=3x$

$f(x)=\frac{3}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^3$

$x=1$일 때,

$0=1\times f(1)-1,\ f(1)=1$

$f(1)=\frac{3}{2}+C=1$ 이므로 $C=-\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$

따라서 $f(2)=6-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

8. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_2 a+\log_4 ab=\log_4 a^2+\log_4 ab$

$=\log_4 a^3b=\frac{5}{2}$

$a^3b=4^{\frac{5}{2}}=(2^2)^{\frac{5}{2}}=2^5=32$

두 수 $a,\ b$는 1이 아닌 자연수이므로

$32=2^3\times 4$

$a=2,\ b=4$

따라서 $a+b=6$

9. [출제의도] 정적분 이해하기

$f(0)-f(-1)=\int_{-1}^0 f'(x)dx$ 이므로

$f(0)-f(-1)+\int_0^1\{x^2+2x+f'(x)\}dx$

$=\int_{-1}^0 f'(x)dx+\int_0^1(x^2+2x)dx+\int_0^1 f'(x)dx$

$=\int_{-1}^1 f'(x)dx+\int_0^1(x^2+2x)dx$

$=0+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$

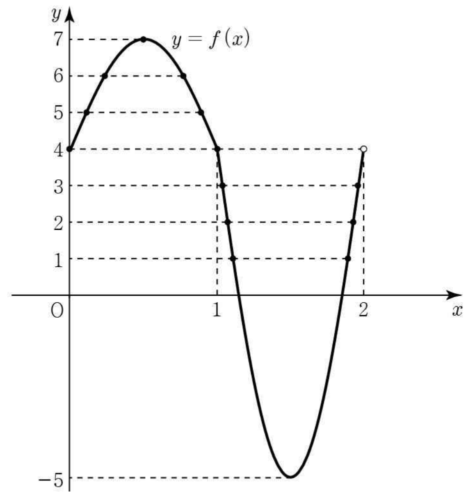
$=\left(\frac{1}{3}+1\right)-0=\frac{4}{3}$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=\begin{cases}3\sin\pi x+4 & (0\le x<1)\\ 9\sin\pi x+4 & (1\le x<2)\end{cases}$

두 함수 $y=3\sin\pi x+4,\ y=9\sin\pi x+4$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수는 13

11. [출제의도] 미분을 활용하여 속도와 가속도 문제 해결하기

시각 $t\ (t\ge 0)$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|x_1-x_2|=\left|t^3-\frac{15}{2}t^2+12t+10\right|$

$f(t)=t^3-\frac{15}{2}t^2+12t+10\ (t\ge 0)$이라 하면

$f'(t)=3t^2-15t+12=3(t-1)(t-4)$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	⋯	1	⋯	4	⋯
$f'(t)$		+	0	−	0	+
$f(t)$	10	↗	극대	↘	극소	↗

$t\ge 0$에서 함수 $f(t)$의 최솟값이 $f(4)=2$ 이므로 $f(t)>0$

$|x_1-x_2|=t^3-\frac{15}{2}t^2+12t+10$ 이고

두 점 P, Q 사이의 거리는 $t=4$에서 최소이다.

시각 $t\ (t\ge 0)$에서의 점 P의 속도와 가속도를 각각 $v(t),\ a(t)$라 하면

$v(t)=\frac{dx_1}{dt}=3t^2-10t+10$

$a(t)=v'(t)=6t-10$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$a(4)=6\times 4-10=14$

12. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제 해결하기

$b_4=a_3+b_3$

$b_5=b_4+1=a_3+b_3+1$

$b_6=b_5+1=a_3+b_3+2$

$b_7=a_6+b_6=a_6+a_3+b_3+2$

$b_8=b_7+1=a_6+a_3+b_3+3$

$b_9=b_8+1=a_6+a_3+b_3+4$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=1+2d,\ a_6=1+5d$ 이므로

$b_9-b_3=a_6+a_3+4=7d+6=27$

$d=3$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10\times\{2\times1+(10-1)\times3\}}{2} = 145$$

[참고]

$b_1 = \alpha$ (α는 실수)라 하면

$b_3 = b_1 + 2 = \alpha + 2$

$b_9 = a_6 + a_3 + b_1 + 6 = 2 + 7d + \alpha + 6$

$b_9 - b_3 = 7d + 6$

13. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 함수 추론하기

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0-} g(x) = \lim_{x\to0+} g(x) = g(0)$

$\lim_{x\to0-} g(x) = f(a)+b$

$\lim_{x\to0+} g(x) = \lim_{x\to0+} f(x) = 5$

$g(0) = f(0) = 5$

$f(a)+b = 5$

$a^2 - 4a + b = 0$ ⋯ ㉠

$f(x) = (x-2)^2 + 1$이므로

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 1을 갖는다.

함수 $y = f(x+a)+b$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이다.

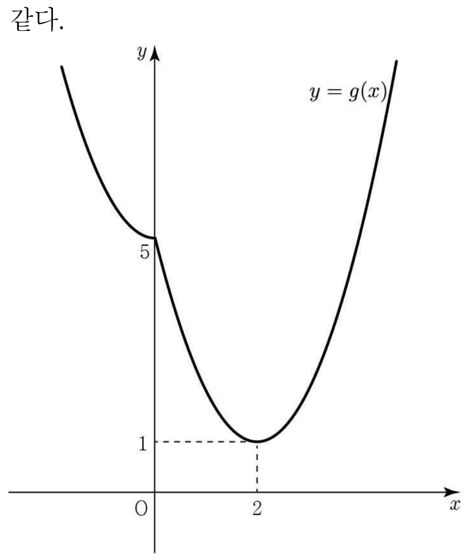
$f(x+a)+b = \{x-(2-a)\}^2 + 1 + b$이므로

함수 $y = f(x+a)+b$는

$x = 2-a$에서 최솟값 $1+b$를 갖는다.

(i) $2-a \geq 0$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



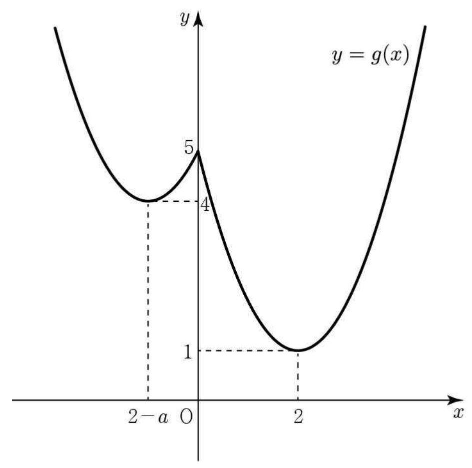
$k=4$ 또는 $k=5$일 때,

$\left|\lim_{t\to k+} h(t) - \lim_{t\to k-} h(t)\right| \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2-a<0$인 경우

$\left|\lim_{t\to k+} h(t) - \lim_{t\to k-} h(t)\right| = 2$를 만족시키는 k의 값이 1, 4, 5이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2-a) = 1+b = 4$, $b=3$

㉠에 의하여

$a^2 - 4a + 3 = 0$, $(a-1)(a-3) = 0$

$a>2$이므로 $a=3$

따라서 $g(-4) = f(-4+3)+3 = 10+3 = 13$

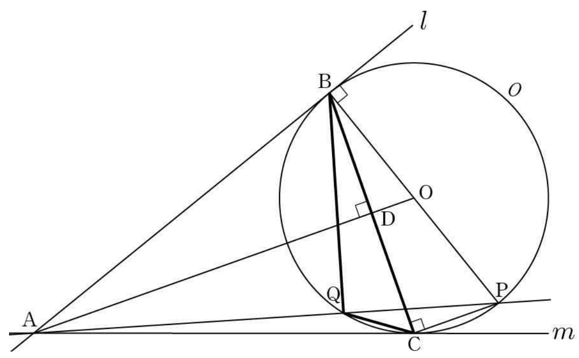
14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

직선 l과 직선 BP가 서로 수직이므로

직선 BP는 원의 중심을 지나고, 선분 BP는

원 O의 지름이다. 원 O의 중심을 O,

선분 AO와 선분 BC가 만나는 점을 D라 하자.



$\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 = 12^2 + (3\sqrt{2})^2 = 162$

$\overline{AO} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$

삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{BD} = \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BO}$

$\frac{1}{2}\times9\sqrt{2}\times\overline{BD} = \frac{1}{2}\times12\times3\sqrt{2}$

$\overline{BD} = 4$

$\overline{BC} = 2\times\overline{BD} = 8$

원주각의 성질에 의하여

$\angle BPQ = \angle BCQ$, $\angle QPC = \angle QBC$

$\sin(\angle BCQ) : \sin(\angle QBC) = 3:1$

삼각형 BQC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BQ}}{\sin(\angle BCQ)} = \frac{\overline{QC}}{\sin(\angle QBC)}$

$\overline{BQ} : \overline{QC} = 3:1$

$\overline{QC} = k\ (k>0)$이라 하면, $\overline{BQ} = 3k$

삼각형 BCP는

$\angle BCP = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\angle BPC = \theta$라 하면 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 BCP에서

$\sin\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}} = \frac{8}{6\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

$\cos\theta = \frac{1}{3}$

사각형 BQCP는 원 O에 내접하므로

$\angle CQB = \pi - \theta$이다.

$\cos(\angle CQB) = \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = -\frac{1}{3}$

삼각형 BQC에서 코사인법칙에 의하여

$8^2 = k^2 + (3k)^2 - 2\times k\times3k\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$k^2 = \frac{16}{3}$

따라서 삼각형 BQC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BQ}\times\overline{QC}\times\sin(\angle CQB)$

$= \frac{1}{2}\times3k\times k\times\frac{2\sqrt{2}}{3} = k^2\times\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

15. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 문제 해결하기

$$g(x) = \begin{cases} |x^2+ax+b| - x^2 & (x\leq0) \\ (x^2+ax+b)^2 + x^3 & (x>0) \end{cases}$$

구간 $(0, \infty)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하므로

조건 (가)에 의하여 $b\leq0$

(i) $b=0$인 경우

$f(x) = x^2 + ax = x(x+a)$

$$g(x) = \begin{cases} |x(x+a)| - x^2 & (x\leq0) \\ x^2(x+a)^2 + x^3 & (x>0) \end{cases}$$

① $a>0$인 경우

$$g(x) = \begin{cases} ax & (x\leq -a) \\ -2x^2 - ax & (-a<x\leq0) \\ x^2(x+a)^2 + x^3 & (x>0) \end{cases}$$

$x=-a$에서의 미분가능성을 조사하면

$\lim_{x\to -a-}\frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$

$= \lim_{x\to -a-}\frac{ax-(-a^2)}{x+a} = a$

$\lim_{x\to -a+}\frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$

$= \lim_{x\to -a+}\frac{(-2x^2-ax)-(-a^2)}{x+a}$

$= \lim_{x\to -a+}\frac{-(2x-a)(x+a)}{x+a} = 3a$

$a>0$이므로 $a\neq3a$

함수 $g(x)$는 $x=-a$에서 미분가능하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $a=0$인 경우

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x\leq0) \\ x^4 + x^3 & (x>0) \end{cases}$$

$x=0$에서의 미분가능성을 조사하면

$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to0-}\frac{0-0}{x} = 0$

$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to0+}\frac{x^4+x^3-0}{x} = 0$

$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $a<0$ 인 경우

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x\le 0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

$x<0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=ax\ne 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$ 인 경우

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=0$ 에서 미분가능하므로 연속이다.

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$

$\lim_{x\to 0-}g(x)=|b|=-b$

$\lim_{x\to 0+}g(x)=b^2$

$g(0)=|b|=-b$

이므로 $-b=b^2$

$b<0$ 이므로 $b=-1$ 이고, 함수 $g(x)$는 $x=-1$ 에서만 미분가능하지 않다.

$$g(x)=\begin{cases} \left|x^2+ax-1\right|-x^2 & (x\le 0) \\ \left(x^2+ax-1\right)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

방정식 $x^2+ax-1=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-1$ 이므로

$\alpha<0<\beta$

$$g(x)=\begin{cases} ax-1 & (x\le\alpha) \\ -2x^2-ax+1 & (\alpha<x\le 0) \\ \left(x^2+ax-1\right)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\left(-2x^2-ax+1\right)-1}{x}=-a$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\left\{\left(x^2+ax-1\right)^2+x^3\right\}-1}{x}=-2a$$

에서 $-a=-2a$, $a=0$

$$g(x)=\begin{cases} \left|x^2-1\right|-x^2 & (x\le 0) \\ \left(x^2-1\right)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

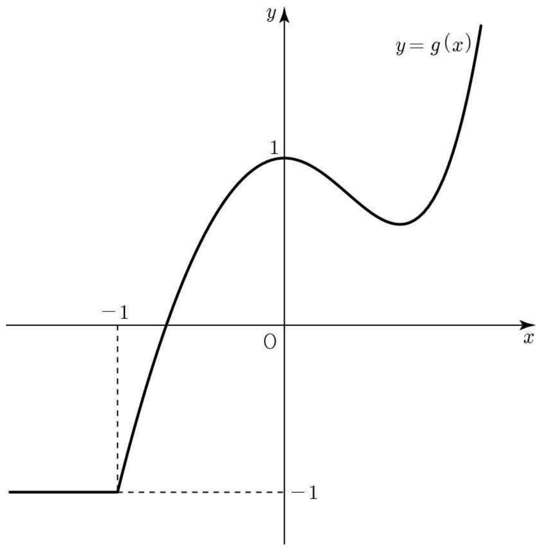
따라서 $g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)=\frac{1}{2}+91=\frac{183}{2}$

[참고]

$f(x)=x^2-1$

$$g(x)=\begin{cases} -1 & (x\le -1) \\ -2x^2+1 & (-1<x\le 0) \\ x^4+x^3-2x^2+1 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$2\log_3(x+1)=\log_3(x+7)$

$\log_3(x+1)^2=\log_3(x+7)$

$(x+1)^2=x+7$

$x^2+2x+1=x+7$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$x=-3$ 또는 $x=2$

로그의 진수는 양수이므로

$x+1>0$, $x+7>0$

$x>-1$

따라서 $x=2$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(6x^2+1\right)dx$

$\quad=2x^3+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=C=2$

$f(x)=2x^3+x+2$

따라서 $f(1)=2+1+2=5$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$\sum_{k=1}^{19}\left(2a_{k+1}-b_k\right)$

$\quad=2\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{19}b_k=150$ ⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{19}\left(a_{k+1}+b_k\right)$

$\quad=\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}+\sum_{k=1}^{19}b_k=330$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$3\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}=480$, $\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}=160$

따라서

$\sum_{k=1}^{20}a_k=a_1+\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}=3+160=163$

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$를 만족시키므로

$f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=2$ 에서 극솟값 -6 을 가지므로

$f'(2)=32+4a=0$, $f(2)=16+4a+b=-6$

$a=-8$, $b=10$

$f(x)=x^4-8x^2+10$

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-2	⋯	0	⋯	2	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

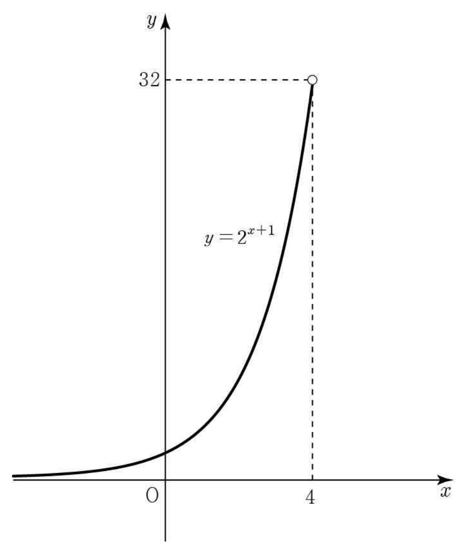
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=10$

20. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 추론하기

$$g(x)=\begin{cases} 2^{x+1} & (x<4) \\ 2f(x) & (x>4)\end{cases}$$

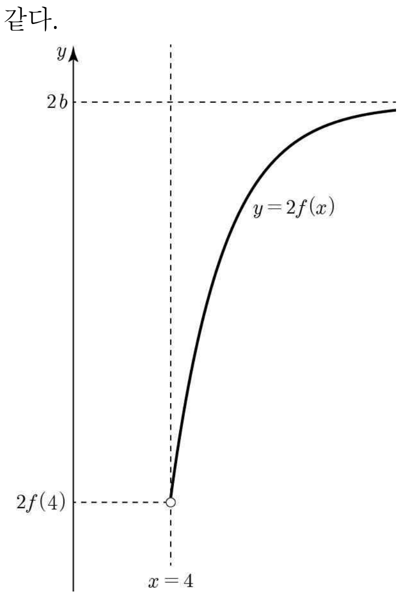
(i) $x<4$ 인 경우

함수 $y=2^{x+1}$의 그래프는 직선 $y=0$ 을 점근선으로 가지므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(ii) $x>4$ 인 경우

함수 $y=2f(x)$의 그래프는 직선 $y=2b$를 점근선으로 가지므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건을 만족시키기 위해서는

$2b=32$, $b=16$

$2f(4)=-2^{a-3}+2b$

$=-2^{a-3}+32=0$

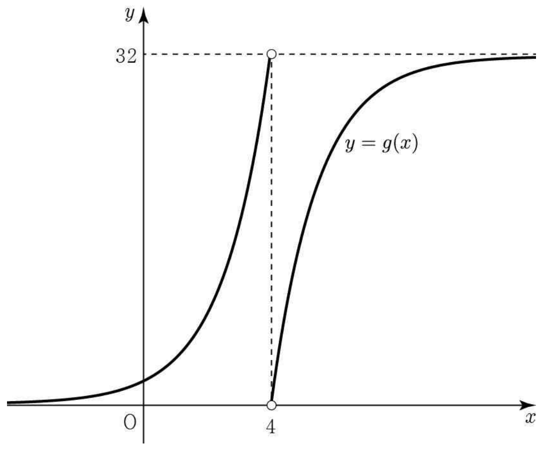
$2^{a-3}=2^5$, $a=8$

$$g(x)=\begin{cases}2^{x+1} & (x<4)\\ -2^{-x+9}+32 & (x>4)\end{cases}$$

따라서 $g(6)=-2^3+32=24$

[참고]

함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



21. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f'(x)=-2x+k$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식 $y=g(x)$ 는

$g(x)=(-2a+k)(x-a)-a^2+ka$

$\quad\;\;=(-2a+k)x+a^2$

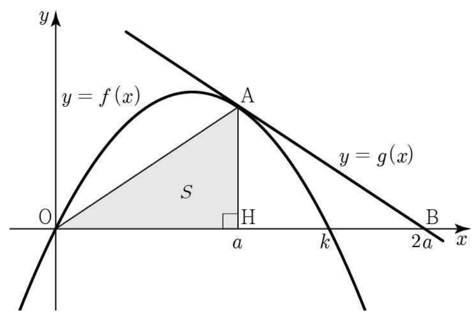
$0=(-2a+k)x+a^2$ 에서 $x=\dfrac{a^2}{2a-k}=b$

직선 $y=g(x)$ 가 x 축과 만나는 점을 B라 하자.

$\displaystyle\int_a^b g(x)dx=S$ 이므로 삼각형 BAH 의 넓이와 삼각형 AOH 의 넓이는 서로 같다.

점 H 의 좌표는 $(a, 0)$ 이고 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{BH}}$ 이므로

$b=2a$



$\dfrac{a^2}{2a-k}=2a$ 에서 $k=\dfrac{3}{2}a$

$\displaystyle\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{2}ax\right\}dx$

$\displaystyle=\int_0^a\left(-x^2+\frac{3}{2}ax-\frac{1}{2}ax\right)dx$

$\displaystyle=\int_0^a(-x^2+ax)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a$

$=\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{32}{3}$

$a=4$, $k=6$

$g(x)=-2x+16$

따라서 $g(-k)=g(-6)=12+16=28$

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 문제 해결하기

a_n, a_{n+1} 이 모두 홀수라 가정하면

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 에서 a_{n+2} 는 짝수이므로

연속하는 세 항 중 적어도 하나의 항은 짝수이다. … (★)

(ⅰ) a_4 가 짝수인 경우

$a_6=6=\dfrac{1}{2}a_4$, $a_4=12$

a_4 가 짝수이므로 조건 (나)에 의하여

a_2, a_3, a_5 는 홀수이다.

a_2, a_3 이 홀수이므로 (★)에 의하여

a_1은 짝수이다.

$a_3=\dfrac{1}{2}a_1$

$a_5=a_4+a_3=12+\dfrac{1}{2}a_1$

$a_4=a_3+a_2=\dfrac{1}{2}a_1+a_2=12$

$a_2=12-\dfrac{1}{2}a_1$

a_2 가 홀수이므로

$\dfrac{1}{2}a_1$ 은 11 이하의 홀수이다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	11	1	12	13	6
6	9	3	12	15	6
10	7	5	12	17	6
14	5	7	12	19	6
18	3	9	12	21	6
22	1	11	12	23	6

주어진 조건을 만족시키는 모든 a_1 의 값은

2, 6, 10, 14, 18, 22 이다.

(ⅱ) a_4 가 홀수인 경우

$a_6=6=a_5+a_4$ 에서

a_4, a_5가 홀수이므로 (★)에 의하여

a_3은 짝수이다.

$a_5=\dfrac{1}{2}a_3$ 에서 $a_4=6-\dfrac{1}{2}a_3$

a_3 이 짝수이므로 조건 (나)에 의하여

a_2는 홀수이다.

$a_4=a_3+a_2$ 에서

$6-\dfrac{1}{2}a_3=a_3+a_2$ 이므로 $a_3=4-\dfrac{2}{3}a_2$

a_3 이 자연수이므로 $a_2=3$, $a_3=2$

a_1 이 홀수이면 $a_3=a_2+a_1$

$2=3+a_1$ 이므로 a_1 은 자연수가 아니다.

그러므로 a_1은 짝수이고

$a_3=\dfrac{1}{2}a_1$, $a_1=4$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
4	3	2	5	1	6

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

모든 a_1 의 값의 합은

$(2+6+10+14+18+22)+4=76$

확률과 통계 정답

23	④	24	①	25	③	26	②	27	①
28	②	29	285	30	34				

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 중복순열 계산하기

${}_4\Pi_3=4^3=64$

24. [출제의도] 배반사건의 성질 이해하기

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\qquad\qquad\;\,=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{9}{10}=\dfrac{2}{5}+\mathrm{P}(B)$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$

25. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

주머니에서 임의로 2 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2 개의 공에 적힌 수 중 적어도 하나가 8 의 약수인 사건을 X 라 하자.

주머니에서 임의로 2 개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{12}\mathrm{C}_2=66$

8 의 약수가 4 개이므로 꺼낸 2 개의 공에 적힌 수가 모두 8 의 약수가 아닌 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=28$

따라서 구하고자 하는 사건의 확률은

$\mathrm{P}(X)=1-\mathrm{P}\left(X^C\right)$

$\qquad\;\;=1-\dfrac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=1-\dfrac{28}{66}=\dfrac{19}{33}$

26. [출제의도] 이항정리를 이용하여 항의 계수 이해하기

다항식 $(2+x)^5$ 의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r\times2^{5-r}\times x^r$ $(r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

$(1+ax)(2+x)^5$ 의 전개식에서

x^3 의 계수는

$1\times{}_5\mathrm{C}_3\times2^2+a\times{}_5\mathrm{C}_2\times2^3=40+80a$

x^4 의 계수는

$1\times{}_5\mathrm{C}_4\times2+a\times{}_5\mathrm{C}_3\times2^2=10+40a$

x^3 의 계수와 x^4 의 계수의 합이 290 이므로

$(40+80a)+(10+40a)=290$

$50+120a=290$

따라서 $a=2$

27. [출제의도] 이산확률변수의 확률분포 이해하기

$\mathrm{P}(X=k+2)-\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{(-1)^k}{4}$ 에서

$k=1$ 일 때, $\mathrm{P}(X=3)-\mathrm{P}(X=1)=-\dfrac{1}{4}$

$k=2$ 일 때, $\mathrm{P}(X=4)-\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=1)=a$, $\mathrm{P}(X=2)=b$ 라 하면

$\mathrm{P}(X=3)=a-\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=4)=b+\frac{1}{4}$

이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$a-\frac{1}{4}$	$b+\frac{1}{4}$	1

이산확률변수의 확률분포의 성질에 의하여 확률의 합이 1 이므로

$a+b+\left(a-\frac{1}{4}\right)+\left(b+\frac{1}{4}\right)=1$

$a+b=\frac{1}{2}$ ⋯ ㉠

$\mathrm{E}(X)$

$=1\times a+2\times b+3\times\left(a-\frac{1}{4}\right)+4\times\left(b+\frac{1}{4}\right)$

$=4a+6b+\frac{1}{4}=\frac{21}{8}$

$4a+6b=\frac{19}{8}$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$a=\frac{5}{16}$, $b=\frac{3}{16}$

따라서 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{5}{16}$

28. [출제의도] 중복조합의 수를 활용하여 추론하기

$n=4$, 5, 6 일 때,

$f(f(n))=n$ 을 만족시키는 경우는

$f(n)=n$ 또는

$f(n)=m$, $f(m)=n\ (n\neq m,\ m\in X)$ ⋯ (★)

(ⅰ) $f(4)<4$ 인 경우

$f(4)=a\ (a<4)$라 하면

(★)에 의하여 $f(a)=4$

$f(4)<f(a)$이므로

조건 (가)를 만족시키는 함수 f 는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $f(4)=4$ 인 경우

조건 (가)에 의하여

$1\le f(1)\le f(2)\le f(3)\le 4$ 이므로

세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 을 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_3$

$f(5)=b$ 라 하면

(★)에 의하여 $f(b)=5$ 이므로 $b\neq 4$

$f(b)=5>f(4)=4$ 이므로

조건 (가)에 의하여 $b>4$

그러므로 $b=5$ 또는 $b=6$

① $f(5)=5$ 인 경우

$f(6)=c$ 라 하면

(★)에 의하여 $f(c)=6$ 이므로 $c\neq 5$

$f(c)=6>f(4)=4$ 이므로

조건 (가)에 의하여 $c>4$

그러므로 $c=6$

$f(4)=4$, $f(5)=5$, $f(6)=6$ 이므로

조건을 만족시키는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3\times 1={}_6\mathrm{C}_3=20$

② $f(5)=6$ 인 경우

(★)에 의하여 $f(6)=5$

그러므로 $f(4)=4$, $f(5)=6$, $f(6)=5$

조건을 만족시키는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3\times 1={}_6\mathrm{C}_3=20$

①, ②에 의하여 $f(4)=4$ 일 때,

조건을 만족시키는 경우의 수는

$20+20=40$

(ⅲ) $f(4)=5$ 인 경우

$1\le f(1)\le f(2)\le f(3)\le 5$ 이므로

세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 을 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_3$

(★)에 의하여 $f(5)=4$

$f(6)=c$ 라 하면

(★)에 의하여 $f(c)=6$ 이므로 $c\neq 5$

$f(c)=6>f(4)=5$ 이므로

조건 (가)에 의하여 $c>4$

그러므로 $c=6$

$f(4)=5$, $f(5)=4$, $f(6)=6$ 이므로

조건을 만족시키는 경우의 수는

${}_5\mathrm{H}_3\times 1={}_7\mathrm{C}_3=35$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$40+35=75$

29. [출제의도] 정규분포의 표준화를 활용하여 문제 해결하기

확률변수 X 가 정규분포 $\mathrm{N}(80,\,5^2)$ 을 따르므로 Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때

$\mathrm{P}(b\le X\le 75)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{b-80}{5}\le Z\le\frac{75-80}{5}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{b-80}{5}\le Z\le -1\right)$

$=\mathrm{P}\left(1\le Z\le\frac{80-b}{5}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-b}{5}\right)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-b}{5}\right)-0.3413=0.1359$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-b}{5}\right)=0.4772$

주어진 표준정규분포표를 이용하면

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$ 이므로

$\frac{80-b}{5}=2$, $b=70$

$Y=-2X+a$ 이므로

$\mathrm{P}(a-160\le Y\le b)$

$=\mathrm{P}(a-160\le -2X+a\le 70)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{a-70}{2}\le X\le 80\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{\frac{a-70}{2}-80}{5}\le Z\le\frac{80-80}{5}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{a-230}{10}\le Z\le 0\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{230-a}{10}\right)=0.4332$

주어진 표준정규분포표를 이용하면

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$ 이므로

$\frac{230-a}{10}=1.5$, $a=215$

따라서 $a+b=215+70=285$

[다른 풀이]

확률변수 X 가 정규분포 $\mathrm{N}(80,\,5^2)$ 을 따르므로

$Y=-2X+a$ 에서

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(-2X+a)$

$=-2\mathrm{E}(X)+a$

$=-160+a$

$\sigma(Y)=\sigma(-2X+a)$

$=2\sigma(X)$

$=10$

이므로 확률변수 $Y=-2X+a$ 는

정규분포 $\mathrm{N}(a-160,\,10^2)$ 을 따른다.

$\mathrm{P}(a-160\le Y\le b)$

$=\mathrm{P}(a-160\le Y\le 70)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{(a-160)-(a-160)}{10}\le Z\le\frac{70-(a-160)}{10}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{230-a}{10}\right)=0.4332$

주어진 표준정규분포표를 이용하면

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$ 이므로

$\frac{230-a}{10}=1.5$, $a=215$

따라서 $a+b=215+70=285$

30. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

시행을 한 번 하여 두 주머니 A, B에서 꺼낸 카드 중 같은 숫자가 적힌 카드가 있는 사건을 X, 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2인 사건을 Y 라 하자.

(Ⅰ) k가 3의 배수인 경우

주머니 A에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸 후 주머니 B에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=36$

같은 숫자가 적힌 카드가 있는 경우의 수는

① 같은 숫자가 적힌 카드가 1쌍일 때,

${}_3\mathrm{C}_1\times\left({}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1-2\right)=21$

② 같은 숫자가 적힌 카드가 2쌍일 때,

${}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2=3$

k가 3의 배수일 때

같은 숫자가 적힌 카드가 있을 확률은

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{21}{36}+\frac{3}{36}\right)=\frac{2}{9}$

(Ⅱ) k가 3의 배수가 아닌 경우

주머니 A에서 임의로 1장의 카드를 꺼낸 후 주머니 B에서 임의로 1장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=16$

이 중 같은 숫자가 적힌 카드를 꺼내는 경우는 같은 숫자가 적힌 카드가 1쌍인 경우이므로 꺼내는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1=3$

k가 3의 배수가 아닐 때

같은 숫자가 적힌 카드가 있을 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{16}=\frac{1}{8}$

(Ⅰ), (Ⅱ)에 의하여

$\mathrm{P}(X)=\frac{2}{9}+\frac{1}{8}=\frac{25}{72}$ … ㉠

(ⅰ) k가 3의 배수인 경우

같은 숫자가 적힌 카드가 있고 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2인 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=9$

k가 3의 배수일 때

같은 숫자가 적힌 카드가 있고

숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2일 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{9}{36}=\frac{1}{12}$

(ⅱ) k가 3의 배수가 아닌 경우

같은 숫자가 적힌 카드가 있고 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2인 경우의 수는

${}_1\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1=1$

k가 3의 배수가 아닐 때

같은 숫자가 적힌 카드가 있고

숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2일 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{24}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{25}{72}}=\frac{9}{25}$$

$p=25$, $q=9$

따라서 $p+q=34$