정답 및 해설

고3

수학 영역

정답

1	③	2	④	3	②	4	①	5	⑤
6	①	7	④	8	②	9	④	10	③
11	③	12	②	13	⑤	14	②	15	①
16	2	17	5	18	163	19	10	20	24
21	28	22	76						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[4]{3}\times 3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=3$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2+1$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4$

3. [출제의도] 등비수열의 일반항 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$ (단, n은 자연수)

$a_1\times a_{13}=a\times ar^{12}=a^2r^{12}=(ar^6)^2=64$

$ar^6=8$ … ㉠

$\frac{a_5}{a_2}=\frac{ar^4}{ar}=r^3=2$ … ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$4a=8$, $a=2$

따라서 $a_4=ar^3=2\times 2=4$

4. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(ax^3-5)=8a-5$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(ax+1)=2a+1$

$f(2)=2a+1$, $8a-5=2a+1$

따라서 $a=1$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$g'(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+0\times f'(1)=2\times 5=10$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ 이므로

$\cos\theta+\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{5}$

7. [출제의도] 적분과 미분의 관계 이해하기

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^3$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2$

$xf'(x)=3x^2$

$f'(x)=3x$

$f(x)=\frac{3}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^3$

$x=1$일 때,

$0=1\times f(1)-1$, $f(1)=1$

$f(1)=\frac{3}{2}+C=1$ 이므로 $C=-\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$

따라서 $f(2)=6-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

8. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_2 a+\log_4 ab=\log_4 a^2+\log_4 ab$

$=\log_4 a^3b=\frac{5}{2}$

$a^3b=4^{\frac{5}{2}}=(2^2)^{\frac{5}{2}}=2^5=32$

두 수 a, b는 1이 아닌 자연수이므로

$32=2^3\times 4$

$a=2$, $b=4$

따라서 $a+b=6$

9. [출제의도] 정적분 이해하기

$f(0)-f(-1)=\int_{-1}^0 f'(x)dx$ 이므로

$f(0)-f(-1)+\int_0^1\{x^2+2x+f'(x)\}dx$

$=\int_{-1}^0 f'(x)dx+\int_0^1(x^2+2x)dx+\int_0^1 f'(x)dx$

$=\int_{-1}^1 f'(x)dx+\int_0^1(x^2+2x)dx$

$=0+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$

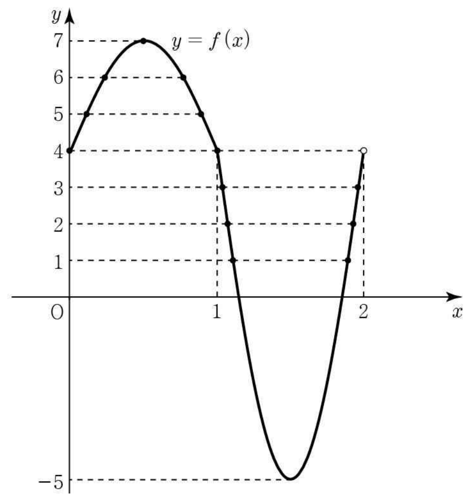
$=\left(\frac{1}{3}+1\right)-0=\frac{4}{3}$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=\begin{cases}3\sin\pi x+4 & (0\le x<1)\\ 9\sin\pi x+4 & (1\le x<2)\end{cases}$

두 함수 $y=3\sin\pi x+4$, $y=9\sin\pi x+4$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수는 13

11. [출제의도] 미분을 활용하여 속도와 가속도 문제 해결하기

시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|x_1-x_2|=\left|t^3-\frac{15}{2}t^2+12t+10\right|$

$f(t)=t^3-\frac{15}{2}t^2+12t+10\,(t\ge 0)$이라 하면

$f'(t)=3t^2-15t+12=3(t-1)(t-4)$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		+	0	−	0	+
$f(t)$	10	↗	극대	↘	극소	↗

$t\ge 0$에서 함수 $f(t)$의 최솟값이 $f(4)=2$이므로 $f(t)>0$

$|x_1-x_2|=t^3-\frac{15}{2}t^2+12t+10$이고

두 점 P, Q 사이의 거리는 $t=4$에서 최소이다.

시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 점 P의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t)=\frac{dx_1}{dt}=3t^2-10t+10$

$a(t)=v'(t)=6t-10$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$a(4)=6\times 4-10=14$

12. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제 해결하기

$b_4=a_3+b_3$

$b_5=b_4+1=a_3+b_3+1$

$b_6=b_5+1=a_3+b_3+2$

$b_7=a_6+b_6=a_6+a_3+b_3+2$

$b_8=b_7+1=a_6+a_3+b_3+3$

$b_9=b_8+1=a_6+a_3+b_3+4$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=1+2d$, $a_6=1+5d$ 이므로

$b_9-b_3=a_6+a_3+4=7d+6=27$

$d=3$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10\times\{2\times1+(10-1)\times3\}}{2}=145$$

[참고]
$b_1=\alpha$ (α는 실수)라 하면
$b_3=b_1+2=\alpha+2$
$b_9=a_6+a_3+b_1+6=2+7d+\alpha+6$
$b_9-b_3=7d+6$

13. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 함수 추론하기

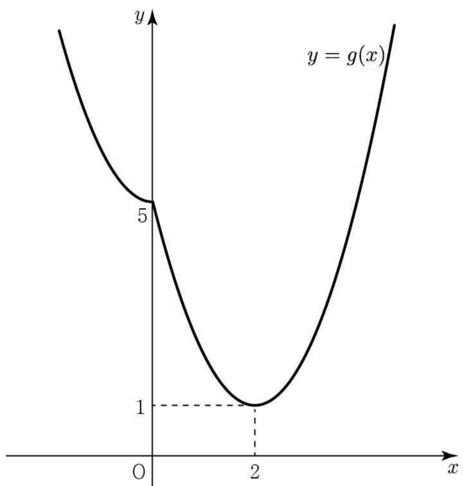
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to0-}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}g(x)=g(0)$

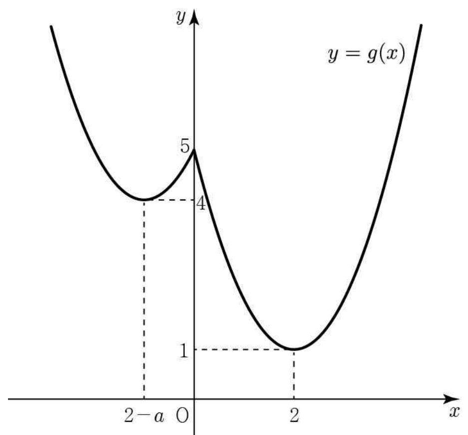
$\lim\limits_{x\to0-}g(x)=f(a)+b$

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=5$

$g(0)=f(0)=5$
$f(a)+b=5$
$a^2-4a+b=0$ ⋯ ㉠
$f(x)=(x-2)^2+1$이므로
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 1을 갖는다.
함수 $y=f(x+a)+b$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이다.
$f(x+a)+b=\{x-(2-a)\}^2+1+b$이므로
함수 $y=f(x+a)+b$는
$x=2-a$에서 최솟값 $1+b$를 갖는다.
(ⅰ) $2-a\ge0$인 경우
함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



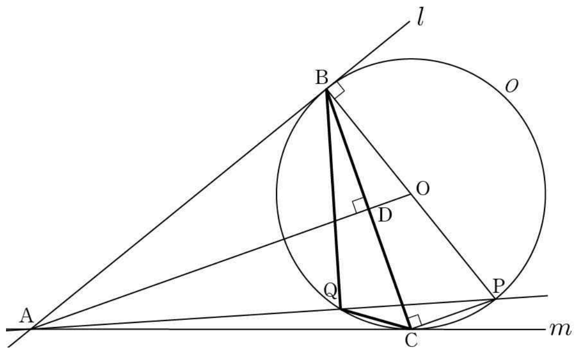
$k=4$ 또는 $k=5$일 때,
$\left|\lim\limits_{t\to k+}h(t)-\lim\limits_{t\to k-}h(t)\right|\ne2$
이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $2-a<0$인 경우
$\left|\lim\limits_{t\to k+}h(t)-\lim\limits_{t\to k-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 k의 값이 1, 4, 5이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2-a)=1+b=4$, $b=3$
㉠에 의하여
$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$
$a>2$이므로 $a=3$
따라서 $g(-4)=f(-4+3)+3=10+3=13$

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

직선 l과 직선 BP가 서로 수직이므로
직선 BP는 원의 중심을 지나고, 선분 BP는 원 O의 지름이다. 원 O의 중심을 O, 선분 AO와 선분 BC가 만나는 점을 D라 하자.



$\overline{\mathrm{AO}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BO}}^2=12^2+(3\sqrt2)^2=162$
$\overline{\mathrm{AO}}=\sqrt{162}=9\sqrt2$
삼각형 AOB의 넓이는
$\frac12\times\overline{\mathrm{AO}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac12\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BO}}$
$\frac12\times9\sqrt2\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac12\times12\times3\sqrt2$
$\overline{\mathrm{BD}}=4$
$\overline{\mathrm{BC}}=2\times\overline{\mathrm{BD}}=8$
원주각의 성질에 의하여
$\angle\mathrm{BPQ}=\angle\mathrm{BCQ}$, $\angle\mathrm{QPC}=\angle\mathrm{QBC}$
$\sin(\angle\mathrm{BCQ}):\sin(\angle\mathrm{QBC})=3:1$
삼각형 BQC에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\sin(\angle\mathrm{BCQ})}=\dfrac{\overline{\mathrm{QC}}}{\sin(\angle\mathrm{QBC})}$
$\overline{\mathrm{BQ}}:\overline{\mathrm{QC}}=3:1$
$\overline{\mathrm{QC}}=k\ (k>0)$이라 하면, $\overline{\mathrm{BQ}}=3k$
삼각형 BCP는
$\angle\mathrm{BCP}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로
$\angle\mathrm{BPC}=\theta$라 하면 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$
직각삼각형 BCP에서
$\sin\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BP}}}=\dfrac{8}{6\sqrt2}=\dfrac{2\sqrt2}{3}$
$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\dfrac89=\dfrac19$
$\cos\theta=\dfrac13$
사각형 BQCP는 원 O에 내접하므로
$\angle\mathrm{CQB}=\pi-\theta$이다.
$\cos(\angle\mathrm{CQB})=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\dfrac13$
삼각형 BQC에서 코사인법칙에 의하여
$8^2=k^2+(3k)^2-2\times k\times3k\times\left(-\dfrac13\right)$
$k^2=\dfrac{16}{3}$
따라서 삼각형 BQC의 넓이는
$\dfrac12\times\overline{\mathrm{BQ}}\times\overline{\mathrm{QC}}\times\sin(\angle\mathrm{CQB})$
$=\dfrac12\times3k\times k\times\dfrac{2\sqrt2}{3}=k^2\times\sqrt2=\dfrac{16\sqrt2}{3}$

15. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 문제 해결하기

$$g(x)=\begin{cases}\left|x^2+ax+b\right|-x^2 & (x\le0)\\ (x^2+ax+b)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

구간 $(0,\infty)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하므로
조건 (가)에 의하여 $b\le0$
(ⅰ) $b=0$인 경우
$f(x)=x^2+ax=x(x+a)$

$$g(x)=\begin{cases}|x(x+a)|-x^2 & (x\le0)\\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

① $a>0$인 경우

$$g(x)=\begin{cases}ax & (x\le-a)\\ -2x^2-ax & (-a<x\le0)\\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

$x=-a$에서의 미분가능성을 조사하면

$\lim\limits_{x\to-a-}\dfrac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$
$=\lim\limits_{x\to-a-}\dfrac{ax-(-a^2)}{x+a}=a$

$\lim\limits_{x\to-a+}\dfrac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$
$=\lim\limits_{x\to-a+}\dfrac{(-2x^2-ax)-(-a^2)}{x+a}$
$=\lim\limits_{x\to-a+}\dfrac{-(2x-a)(x+a)}{x+a}=3a$

$a>0$이므로 $a\ne3a$
함수 $g(x)$는 $x=-a$에서 미분가능하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $a=0$인 경우

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x\le0)\\ x^4+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

$x=0$에서의 미분가능성을 조사하면

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{0-0}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x^4+x^3-0}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로
조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $a<0$ 인 경우

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x\le 0)\\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

$x<0$ 인 모든 실수 x 에 대하여
$g(x)=ax\ne 0$ 이므로 조건 (나)를
만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$ 인 경우
조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$ 는
$x=0$ 에서 미분가능하므로 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=g(0)$

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=|b|=-b$

$\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=b^2$

$g(0)=|b|=-b$

이므로 $-b=b^2$

$b<0$ 이므로 $b=-1$ 이고, 함수 $g(x)$ 는
$x=-1$ 에서만 미분가능하지 않다.

$$g(x)=\begin{cases} \left|x^2+ax-1\right|-x^2 & (x\le 0)\\ \left(x^2+ax-1\right)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

방정식 $x^2+ax-1=0$ 의 서로 다른 두
실근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$ 라 하면, 근과 계수의
관계에 의하여 $\alpha\beta=-1$ 이므로
$\alpha<0<\beta$

$$g(x)=\begin{cases} ax-1 & (x\le \alpha)\\ -2x^2-ax+1 & (\alpha<x\le 0)\\ \left(x^2+ax-1\right)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\left(-2x^2-ax+1\right)-1}{x}=-a$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\left\{\left(x^2+ax-1\right)^2+x^3\right\}-1}{x}=-2a$$

에서 $-a=-2a$, $a=0$

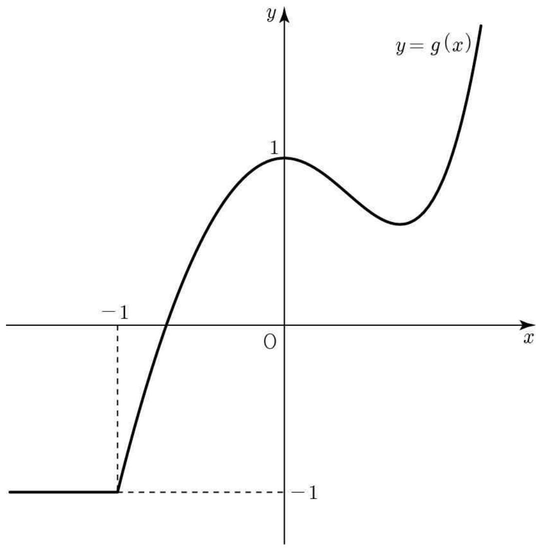
$$g(x)=\begin{cases} \left|x^2-1\right|-x^2 & (x\le 0)\\ \left(x^2-1\right)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

따라서 $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)+g(3)=\dfrac{1}{2}+91=\dfrac{183}{2}$

[참고]
$f(x)=x^2-1$

$$g(x)=\begin{cases} -1 & (x\le -1)\\ -2x^2+1 & (-1<x\le 0)\\ x^4+x^3-2x^2+1 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$2\log_3(x+1)=\log_3(x+7)$
$\log_3(x+1)^2=\log_3(x+7)$
$(x+1)^2=x+7$
$x^2+2x+1=x+7$
$x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$
$x=-3$ 또는 $x=2$
로그의 진수는 양수이므로
$x+1>0$, $x+7>0$
$x>-1$
따라서 $x=2$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(6x^2+1\right)dx$
$\quad=2x^3+x+C$ (단, C 는 적분상수)
$f(0)=C=2$
$f(x)=2x^3+x+2$
따라서 $f(1)=2+1+2=5$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$\sum\limits_{k=1}^{19}\left(2a_{k+1}-b_k\right)$
$\quad=2\sum\limits_{k=1}^{19}a_{k+1}-\sum\limits_{k=1}^{19}b_k=150$ ⋯ ㉠

$\sum\limits_{k=1}^{19}\left(a_{k+1}+b_k\right)$
$\quad=\sum\limits_{k=1}^{19}a_{k+1}+\sum\limits_{k=1}^{19}b_k=330$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면
$3\sum\limits_{k=1}^{19}a_{k+1}=480$, $\sum\limits_{k=1}^{19}a_{k+1}=160$
따라서
$\sum\limits_{k=1}^{20}a_k=a_1+\sum\limits_{k=1}^{19}a_{k+1}=3+160=163$

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $f(x)$ 가
모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$ 를
만족시키므로
$f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b 는 상수)
$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 -6 을 가지므로
$f'(2)=32+4a=0$, $f(2)=16+4a+b=-6$
$a=-8$, $b=10$
$f(x)=x^4-8x^2+10$
$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

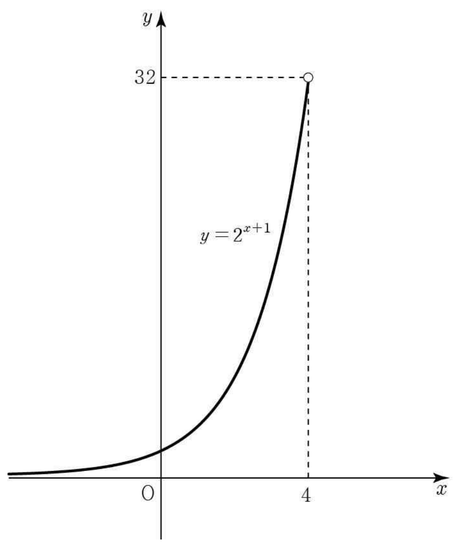
x	⋯	-2	⋯	0	⋯	2	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(0)=10$

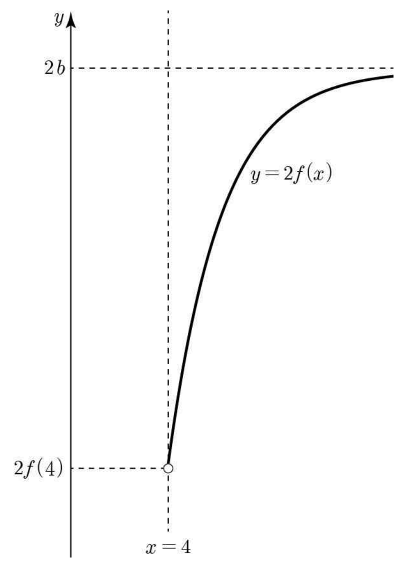
20. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 추론하기

$$g(x)=\begin{cases} 2^{x+1} & (x<4)\\ 2f(x) & (x>4)\end{cases}$$

(i) $x<4$ 인 경우
함수 $y=2^{x+1}$ 의 그래프는
직선 $y=0$ 을 점근선으로 가지므로
함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과
같다.



(ii) $x>4$ 인 경우
함수 $y=2f(x)$ 의 그래프는
직선 $y=2b$ 를 점근선으로 가지므로
함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과
같다.



조건을 만족시키기 위해서는
$2b=32$, $b=16$
$2f(4)=-2^{a-3}+2b$

$= -2^{a-3}+32=0$

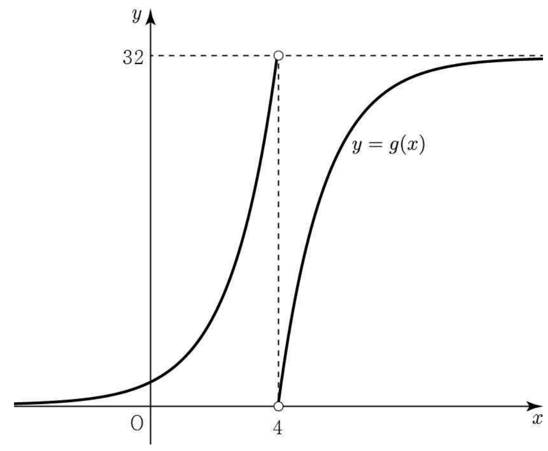
$2^{a-3}=2^5$, $a=8$

$$g(x)=\begin{cases} 2^{x+1} & (x<4) \\ -2^{-x+9}+32 & (x>4) \end{cases}$$

따라서 $g(6)=-2^3+32=24$

[참고]

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



21. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f'(x)=-2x+k$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식 $y=g(x)$는

$g(x)=(-2a+k)(x-a)-a^2+ka$

$\quad =(-2a+k)x+a^2$

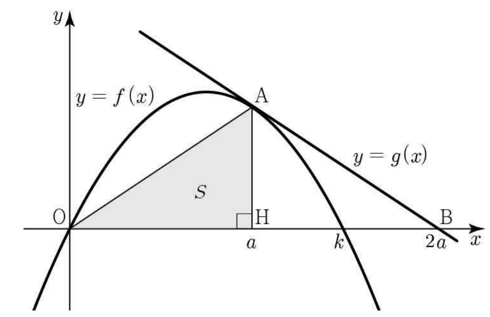
$0=(-2a+k)x+a^2$에서 $x=\dfrac{a^2}{2a-k}=b$

직선 $y=g(x)$가 x축과 만나는 점을 B라 하자.

$\displaystyle\int_a^b g(x)dx=S$이므로 삼각형 BAH의 넓이와 삼각형 AOH의 넓이는 서로 같다.

점 H의 좌표는 $(a,\ 0)$이고 $\overline{OH}=\overline{BH}$이므로

$b=2a$



$\dfrac{a^2}{2a-k}=2a$에서 $k=\dfrac{3}{2}a$

$\displaystyle\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{2}ax\right\}dx$

$\displaystyle=\int_0^a\left(-x^2+\frac{3}{2}ax-\frac{1}{2}ax\right)dx$

$\displaystyle=\int_0^a(-x^2+ax)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a$

$=\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{32}{3}$

$a=4$, $k=6$

$g(x)=-2x+16$

따라서 $g(-k)=g(-6)=12+16=28$

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 문제 해결하기

a_n, a_{n+1}이 모두 홀수라 가정하면

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서 a_{n+2}는 짝수이므로

연속하는 세 항 중 적어도 하나의 항은 짝수이다. … (★)

(ⅰ) a_4가 짝수인 경우

$a_6=6=\dfrac{1}{2}a_4$, $a_4=12$

a_4가 짝수이므로 조건 (나)에 의하여

a_2, a_3, a_5는 홀수이다.

a_2, a_3이 홀수이므로 (★)에 의하여

a_1은 짝수이다.

$a_3=\dfrac{1}{2}a_1$

$a_5=a_4+a_3=12+\dfrac{1}{2}a_1$

$a_4=a_3+a_2=\dfrac{1}{2}a_1+a_2=12$

$a_2=12-\dfrac{1}{2}a_1$

a_2가 홀수이므로

$\dfrac{1}{2}a_1$은 11 이하의 홀수이다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	11	1	12	13	6
6	9	3	12	15	6
10	7	5	12	17	6
14	5	7	12	19	6
18	3	9	12	21	6
22	1	11	12	23	6

주어진 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값은

2, 6, 10, 14, 18, 22이다.

(ⅱ) a_4가 홀수인 경우

$a_6=6=a_5+a_4$에서

a_4, a_5가 홀수이므로 (★)에 의하여

a_3은 짝수이다.

$a_5=\dfrac{1}{2}a_3$에서 $a_4=6-\dfrac{1}{2}a_3$

a_3이 짝수이므로 조건 (나)에 의하여

a_2는 홀수이다.

$a_4=a_3+a_2$에서

$6-\dfrac{1}{2}a_3=a_3+a_2$이므로 $a_3=4-\dfrac{2}{3}a_2$

a_3이 자연수이므로 $a_2=3$, $a_3=2$

a_1이 홀수이면 $a_3=a_2+a_1$

$2=3+a_1$이므로 a_1은 자연수가 아니다.

그러므로 a_1은 짝수이고

$a_3=\dfrac{1}{2}a_1$, $a_1=4$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
4	3	2	5	1	6

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

모든 a_1의 값의 합은

$(2+6+10+14+18+22)+4=76$

기하 정답

23	③	24	①	25	④	26	③	27	②
28	⑤	29	12	30	25				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 합 계산하기

$\vec{a}=(-6,\ 0)$, $\vec{b}=(k,\ 2)$에 대하여

$\vec{a}+2\vec{b}=(-6,\ 0)+(2k,\ 4)$

$\quad=(-6+2k,\ 4)=(0,\ 4)$이므로

$-6+2k=0$

따라서 $k=3$

24. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기

타원 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의

접선의 방정식은 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{8}=1$

$y=-2x+4$

따라서 y절편은 4

25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\{(x,\ y)-(3,\ 4)\}\cdot(-3,\ 6)=0$

$-3(x-3)+6(y-4)=0$

$x-2y+5=0$

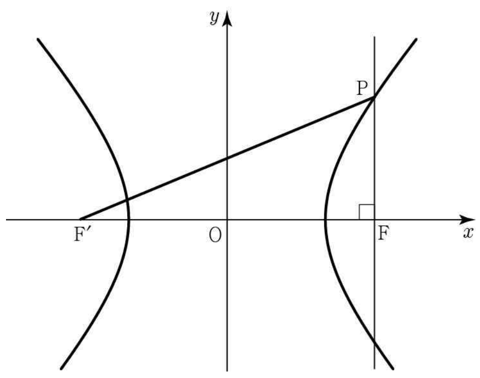
$|\overrightarrow{OP}|$의 최솟값은 점 $O(0,\ 0)$과

직선 $x-2y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

따라서 $|\overrightarrow{OP}|$의 최솟값은 $\sqrt{5}$

26. [출제의도] 쌍곡선의 성질 이해하기



다른 한 초점을 $F'(-c,\ 0)$이라 하면

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=8$

$\overline{PF'}=\overline{PF}+8=5+8=13$

삼각형 PFF′은 직각삼각형이므로

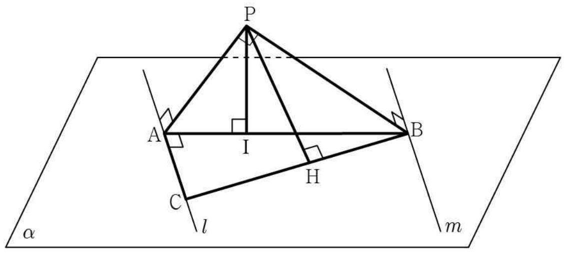
$\overline{FF'}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

$2c=12$, $c=6$

따라서 $b^2 = 6^2 - 4^2 = 20$

27. [출제의도] 삼수선의 정리 이해하기

점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$\overline{\mathrm{PI}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{PA}} \perp l$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{IA}} \perp l$ … ㉠

$\overline{\mathrm{PI}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{PB}} \perp m$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{IB}} \perp m$ … ㉡

평면 α 위의 두 직선 l, m이 서로 평행이므로

㉠, ㉡에 의하여

세 점 A, B, I는 한 직선 위에 있다.

$\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{CA}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{BA}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{BA}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$ 에 의하여

두 삼각형 ABP와 CBA는 서로 닮음이다.

$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{BPA} = \dfrac{\pi}{2}$

삼각형 ABP에서

$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 = 3^2 + (3\sqrt{2})^2 = 27$

$\overline{\mathrm{AB}} = 3\sqrt{3}$

삼각형 ABP의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PI}} \times \overline{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{BP}}$

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PI}} \times 3\sqrt{3} = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PI}} = \sqrt{6}$

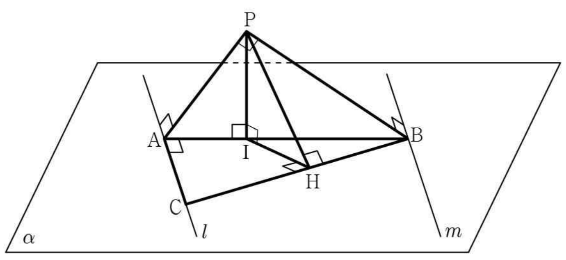
삼각형 BPI에서

$\overline{\mathrm{BI}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 - \overline{\mathrm{PI}}^2 = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2 = 12$

$\overline{\mathrm{BI}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{PI}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{PH}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{IH}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$



두 삼각형 ABP, CBA는 서로 닮음이고

두 삼각형 IBH, CBA는 서로 닮음이므로

두 삼각형 ABP, IBH는 서로 닮음이다.

그러므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{IH}}}{\overline{\mathrm{IB}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$

$\overline{\mathrm{IH}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{IB}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{3 \times 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 2$

삼각형 PIH에서

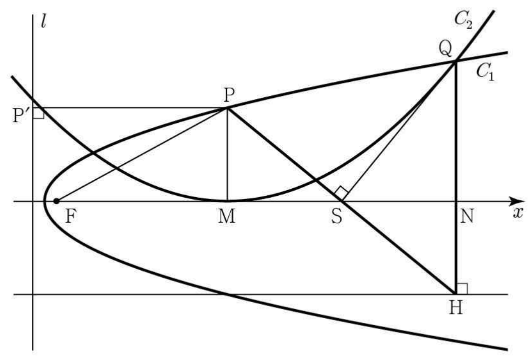
$\overline{\mathrm{PH}}^2 = \overline{\mathrm{PI}}^2 + \overline{\mathrm{IH}}^2 = (\sqrt{6})^2 + 2^2 = 10$

따라서 $\overline{\mathrm{PH}} = \sqrt{10}$

28. [출제의도] 포물선의 성질을 활용하여 문제 해결하기

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 M,

선분 QH와 x축의 교점을 N이라 하자.



점 Q가 포물선 C_2 위의 점이므로

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{QP}} = \overline{\mathrm{QH}}$

그러므로 삼각형 PHQ는

$\overline{\mathrm{QP}} = \overline{\mathrm{QH}} = 5\sqrt{6}$인 이등변삼각형이다.

점 Q에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{\mathrm{PS}} = \overline{\mathrm{HS}} = 2\sqrt{15}$

$\overline{\mathrm{QS}}^2 = \overline{\mathrm{QH}}^2 - \overline{\mathrm{HS}}^2 = (5\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{15})^2 = 90$

$\overline{\mathrm{QS}} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

삼각형 QPH의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PH}} \times \overline{\mathrm{QS}} = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{QH}} \times \overline{\mathrm{MN}}$

$\dfrac{1}{2} \times 4\sqrt{15} \times 3\sqrt{10} = \dfrac{1}{2} \times 5\sqrt{6} \times \overline{\mathrm{MN}}$

$\overline{\mathrm{MN}} = 12$ … ㉠

두 삼각형 PMS, HNS에서

$\angle\mathrm{PMS} = \angle\mathrm{HNS} = \dfrac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{PS}} = \overline{\mathrm{HS}}$,

$\angle\mathrm{PSM} = \angle\mathrm{HSN}$이므로

두 삼각형 PMS, HNS는 서로 합동이다.

$\overline{\mathrm{MS}} = \overline{\mathrm{NS}} = 6$, $\overline{\mathrm{PS}} = \overline{\mathrm{HS}} = 2\sqrt{15}$

이므로

$\overline{\mathrm{PM}}^2 = \overline{\mathrm{PS}}^2 - \overline{\mathrm{MS}}^2 = (2\sqrt{15})^2 - 6^2 = 24$

$\overline{\mathrm{PM}} = \overline{\mathrm{HN}} = 2\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{QN}} = \overline{\mathrm{QH}} - \overline{\mathrm{HN}} = 5\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

두 점 M, N의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하자.

두 점 P, Q는 포물선 C_1 위의 점이므로

$24 = 4px_1$, $54 = 4px_2$에서 $x_1 = \dfrac{6}{p}$, $x_2 = \dfrac{27}{2p}$

㉠에 의하여

$x_2 - x_1 = \dfrac{15}{2p} = 12$에서 $p = \dfrac{5}{8}$

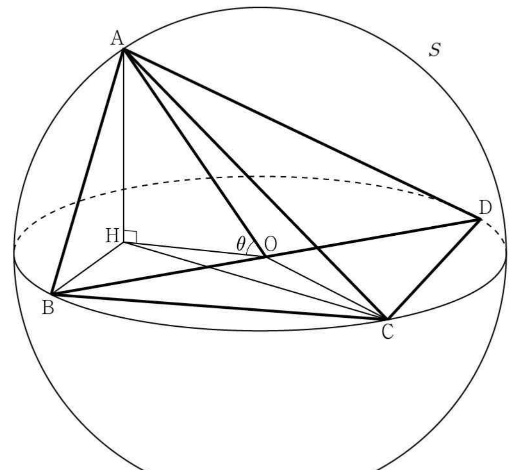
포물선 C_1의 준선을 l이라 할 때,

점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발을 P′이라 하자.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PP'}}$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PP'}} = p + x_1 = \dfrac{5}{8} + \dfrac{48}{5} = \dfrac{409}{40}$

29. [출제의도] 정사영의 성질을 활용하여 추론하기



점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABD의 평면 BCD 위로의

정사영은 삼각형 HBD이다.

$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{5} = \dfrac{3}{5}$

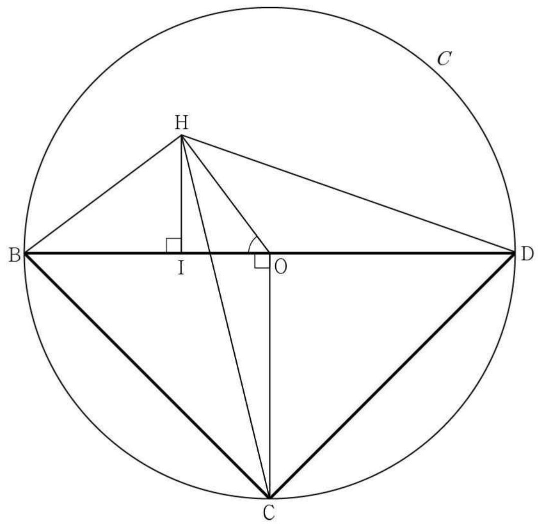
$\overline{\mathrm{OH}} = 3$, $\overline{\mathrm{AH}} = 4$

$\angle\mathrm{AHC} = \dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{AH}}^2 = (\sqrt{74})^2 - 4^2 = 58$

$\overline{\mathrm{CH}} = \sqrt{58}$

평면 BCD와 구 S의 교선을 C라 하자.



삼각형 OHC에서

$\cos(\angle\mathrm{HOC}) = \dfrac{3^2 + 5^2 - (\sqrt{58})^2}{2 \times 3 \times 5} = -\dfrac{24}{30} = -\dfrac{4}{5}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CD}}$이므로

삼각형 BCD는 직각이등변삼각형이고

$\angle\mathrm{BOC} = \dfrac{\pi}{2}$

$\angle\mathrm{HOB} = \angle\mathrm{HOC} - \dfrac{\pi}{2}$이므로

$\sin(\angle\mathrm{HOB}) = \sin\left(\angle\mathrm{HOC} - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$= -\cos(\angle\mathrm{HOC}) = \dfrac{4}{5}$

점 H에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{\mathrm{HI}} = \overline{\mathrm{OH}} \times \sin(\angle\mathrm{HOB}) = 3 \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{12}{5}$

따라서 삼각형 HBD 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{HI}=\frac{1}{2}\times10\times\frac{12}{5}=12$

30. [출제의도] 벡터의 내적을 활용하여 문제 해결하기

두 선분 AC 와 BD 의 교점을 O 라 하면

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}| &= |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}-4\overrightarrow{OP}|\\ &= |(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})-4\overrightarrow{OP}|\\ &= |-4\overrightarrow{OP}|=4|\overrightarrow{OP}|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BD}|^2 &= (\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})\\ &= |\overrightarrow{CD}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2\\ &\quad -2|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{CB}|\cos(\angle BCD)\\ &= 6^2+4^2-2\times6\times4\times\left(-\frac{1}{4}\right)\\ &= 64\end{aligned}$$

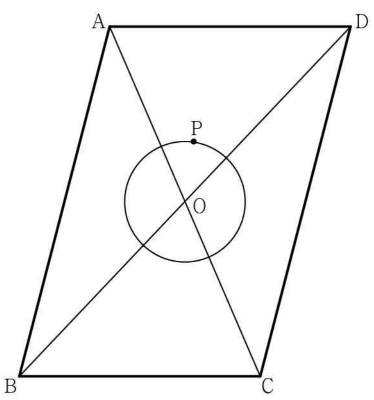
$|\overrightarrow{BD}|=8$

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$ 에서

$4|\overrightarrow{OP}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|=4$ 이므로

$|\overrightarrow{OP}|=1$

점 P 는 점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1 인 원 위의 점이다.



$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PC}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DQ} &= \overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AD})\\ &= \overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{AD})\\ &= \overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB})\\ &= \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PB}\\ &= (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})\\ &= |\overrightarrow{OB}|^2-2(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP})+|\overrightarrow{OP}|^2\\ &= 16-2(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP})+1\\ &= 17-2(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP})\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{BD}|=8$ 이므로

$|\overrightarrow{OB}|=4$

두 벡터 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DQ} &= 17-2|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta\\ &= 17-2\times4\times1\times\cos\theta\\ &= 17-8\cos\theta\end{aligned}$$

따라서

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DQ}$ 의 최댓값은 $\theta=\pi$ 일 때,

$17-8\cos\pi=25$

[참고]

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OP}$