

제 2 교시

수리 영역(나형)

1. $2^{\log_2 4} \times 8^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

2. 두 행렬 A, B 에 대하여

$$A - 2B = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 A 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-n}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 실수 a 가 $\frac{2^a + 2^{-a}}{2^a - 2^{-a}} = -2$ 를 만족시킬 때, $4^a + 4^{-a}$ 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{17}{4}$ ④ $\frac{26}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

5. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값은? [3점]

$$(가) \quad 20 - \frac{1}{n} < a_n + b_n < 20 + \frac{1}{n}$$

$$(나) \quad 10 - \frac{1}{n} < a_n - b_n < 10 + \frac{1}{n}$$

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

6. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ 에 대하여

$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

7. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = \log \frac{n+1}{n}$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{10^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}$$

의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{2010} na_n$ 의 값은? [4점]

- ① -2011 ② -2010 ③ 0
④ 2010 ⑤ 2011

9. 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = f(x)$ 를 만족시키고,

$$f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right| + 1 \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \right)$$

이다.

자연수 n 에 대하여 지수함수 $y = 2^{\frac{x}{n}}$ 의 그래프와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 모든 n 의 값의 합은? [4점]

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

10. 100보다 작은 두 자연수 $a, b (a < b)$ 에 대하여 $\log a$ 의
가수와 $\log b$ 의 가수의 합이 1이 되는 순서쌍 (a, b) 의 개수는?
[4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

11. 어느 무선시스템에서 송신기와 수신기 사이의 거리 R 와
수신기의 수신 전력 S 사이에는 다음과 같은 관계식이
성립한다고 한다.

$$S = P - 20 \log \left(\frac{4\pi f R}{c} \right)$$

(단, P 는 송신기의 송신 전력, f 와 c 는 각각 주파수와 빛의
속도를 나타내는 상수이고, 거리의 단위는 m, 송·수신 전력의
단위는 dBm 이다.)

어느 실험실에서 송신기의 위치를 고정하고 송신기와 수신기
사이의 거리에 따른 수신 전력의 변화를 측정하였다. 그 결과
두 지점 A, B 에서 측정한 수신 전력이 각각 $-25, -5$ 로
나타났다. 두 지점 A, B 에서 송신기까지의 거리를 각각 $R_A,$

R_B 라 할 때, $\frac{R_A}{R_B}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{100}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ 10 ⑤ 100


12. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB 를 지름으로 하는 원을
그리고, 선분 AB 의 3등분점을 각각 P_1, P_2 라 하고 선분
 AP_1 을 지름으로 하는 원의 아래쪽 반원, 선분 AP_2 를 지름으로
하는 원의 아래쪽 반원, 선분 P_2B 를 지름으로 하는 원의 위쪽
반원, 선분 P_1B 를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원을 경계로
하여 만든  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라
하자.




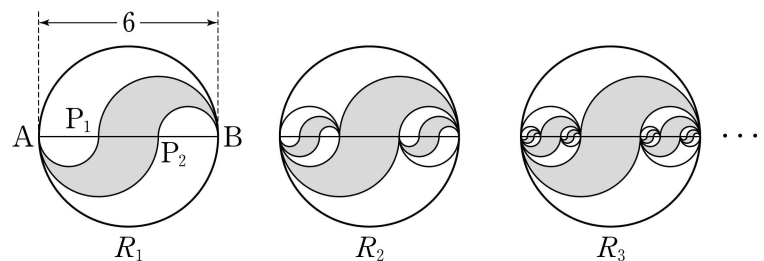
그림 R_1 에서 선분 AB 위의 색칠되지 않은 두 선분 $AP_1,$
 P_2B 를 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에
각각 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 
모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에서 두 선분 AP_1, P_2B 위의 색칠되지 않은 네
선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에
각각 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 네 
모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어
있는 모든  모양의 도형의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{25}{7}\pi$ ② $\frac{27}{7}\pi$ ③ $\frac{29}{7}\pi$ ④ $\frac{31}{7}\pi$ ⑤ $\frac{33}{7}\pi$

13. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1=1$ 이고, 자연수 n 에 대하여

$$a_n a_{n+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

이다. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

14. 행렬 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여 집합 S 가

$$S = \{A \mid A \text{는 이차정사각행렬이고, } PAP = A\}$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, O 는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

- ㄱ. $P \in S$
 ㄴ. $A \in S$ 이고 $B \in S$ 이면 $AB \in S$ 이다.
 ㄷ. $A \in S$ 이고 $A^2 = O$ 이면 $A = O$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 다음은 n 이 2 이상의 자연수일 때

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2$$

의 값을 구하는 과정이다.

두 다항식의 곱

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1})(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)$$

에서 x^{n-1} 의 계수는

$$a_0b_{n-1} + a_1b_{n-2} + \dots + a_{n-1}b_0 \quad \dots \dots (*)$$

이다.

등식 $(1+x)^{2n-1} = (1+x)^{n-1}(1+x)^n$ 의 좌변에서

x^{n-1} 의 계수는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이고, (*)을 이용하여 우변에서

x^{n-1} 의 계수를 구하면 $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \times \boxed{\text{(나)}}$ 이다.

따라서

$$\boxed{\text{(가)}} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \times \boxed{\text{(나)}}$$

이다.

한편 $1 \leq k \leq n$ 일 때 $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=1}^n (n \times \binom{n-1}{k-1} \times \boxed{\text{(나)}})$$

$$= n \times \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \times \boxed{\text{(나)}}$$

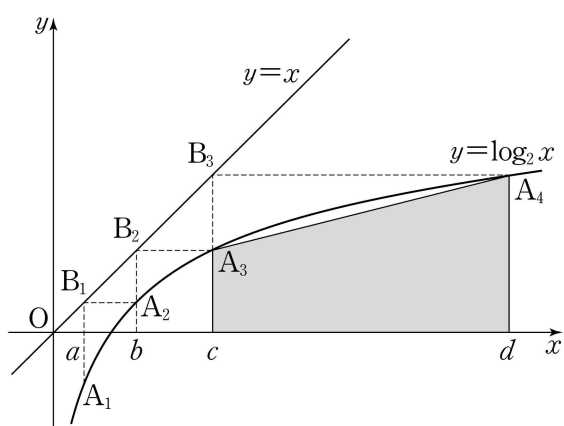
$$= \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

- | (가) | (나) | (다) |
|----------------------|-------------------|-------------------------------------|
| ① ${}_{2n}C_n$ | ${}_{n}C_{n-k+1}$ | $\frac{n}{2} \times {}_{2n}C_{n+1}$ |
| ② ${}_{2n-1}C_{n-1}$ | ${}_{n}C_{n-k+1}$ | $\frac{n}{2} \times {}_{2n}C_n$ |
| ③ ${}_{2n-1}C_{n-1}$ | ${}_{n}C_{n-k}$ | $\frac{n}{2} \times {}_{2n}C_n$ |
| ④ ${}_{2n}C_n$ | ${}_{n}C_{n-k+1}$ | $n \times {}_{2n}C_{n+1}$ |
| ⑤ ${}_{2n-1}C_{n-1}$ | ${}_{n}C_{n-k}$ | $n \times {}_{2n}C_n$ |

16. 그림과 같이 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 한 점 A_1 에서 y 축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 B_1 이라 하고, 점 B_1 에서 x 축에 평행한 직선을 그어 이 그래프와 만나는 점을 A_2 라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 점 A_2 로부터 점 B_2 와 점 A_3 을, 점 A_3 으로부터 점 B_3 과 점 A_4 를 얻는다. 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4 의 x 좌표를 차례로 a, b, c, d 라 하자. 네 점 $(c, 0), (d, 0), (d, \log_2 d), (c, \log_2 c)$ 를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 함수 $f(x) = 2^x$ 을 이용하여 a, b 로 나타낸 것과 같은 것은? [3점]



- ① $\frac{1}{2} \{f(b) + f(a)\} \{(f \circ f)(b) - (f \circ f)(a)\}$
- ② $\frac{1}{2} \{f(b) - f(a)\} \{(f \circ f)(b) + (f \circ f)(a)\}$
- ③ $\{f(b) + f(a)\} \{(f \circ f)(b) + (f \circ f)(a)\}$
- ④ $\{f(b) + f(a)\} \{(f \circ f)(b) - (f \circ f)(a)\}$
- ⑤ $\{f(b) - f(a)\} \{(f \circ f)(b) + (f \circ f)(a)\}$

17. 집합 S 가 $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 집합 S 에 속하는 서로 다른 두 행렬 A, B 에 대하여 행렬 $A+B$ 의 성분은 모두 짝수이다.

ㄴ. 집합 S 에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 m 개의 행렬 A_1, A_2, \dots, A_m 을 선택하였을 때,

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

가 되도록 하는 m 이 존재한다.

ㄷ. 집합 S 에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 n 개의 행렬 A_1, A_2, \dots, A_n 을 선택하였을 때, 행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

의 성분이 모두 짝수가 되도록 하는 n 의 최솟값은 4이다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

18. 지수방정식 $9^x - 3^{x+2} + 8 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $3^{2\alpha} + 3^{2\beta}$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. 네 수 $1, x, y, z$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $6x+z=5y$ 를 만족시킨다. $x+y+z$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 두 상수 a, b 에 대하여 방정식 $\begin{pmatrix} 1 & a-2 \\ 2a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ b \end{pmatrix}$ 의 해가 무수히 많을 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

21. 부등식

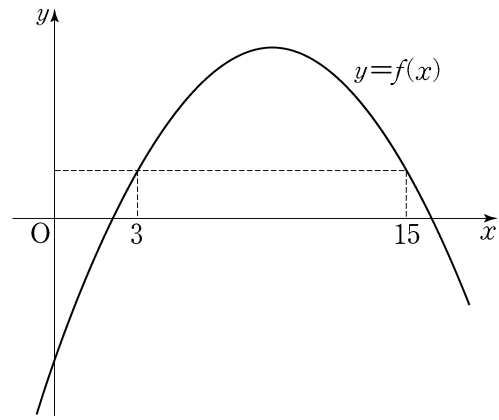
$$1 + \log_{\frac{1}{2}} x^2 > \log_{\frac{1}{2}} (5x-8)$$

의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하시오. [3점]

22. 함수 $y=f(x)$ 는 $f(3)=f(15)$ 를 만족하고, 그 그래프는 그림과 같다. 모든 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \sum_{k=1}^n a_k$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. m 이 15보다 작은 자연수일 때,

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{15} < 0$$

을 만족시키는 m 의 최솟값을 구하시오. [4점]



23. 50 이하의 자연수 n 중에서 $\sum_{k=1}^n {}_n C_k$ 의 값이 3의 배수가 되도록 하는 n 의 개수를 구하시오. [4점]

24. 자연수 n 에 대하여 $\log n$ 의 지표와 가수를 각각 $f(n)$ 과 $g(n)$ 이라 하자. $f(n)-g(n)$ 의 최솟값이 $\log \frac{b}{a}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

25. 좌표평면 위의 점들의 집합 $S = \{(x, y) \mid x \text{와 } y \text{는 정수}\}$ 가 있다. 집합 S 에 속하는 한 점에서 S 에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

점 P 에서 한 번의 '점프'로 점 Q 로 이동할 때, 선분 PQ 의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$ 이다.

점 $A(-2, 0)$ 에서 점 $B(2, 0)$ 까지 4번만 '점프'하여 이동하는 경우의 수를 구하시오. (단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.) [4점]

5지선다형

26. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 6, a_5 = 162$ 일 때,

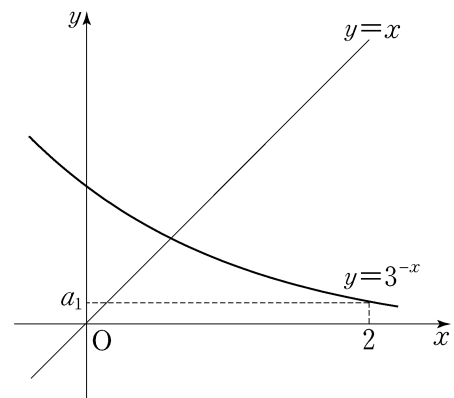
$\sum_{k=1}^n a_k \geq 1000$ 을 만족시키는 n 의 최솟값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

27. 지수함수 $f(x) = 3^{-x}$ 에 대하여

$a_1 = f(2), a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3)$

일 때, a_2, a_3, a_4 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [3점]



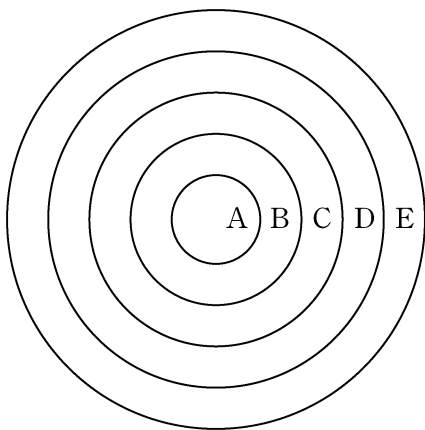
- ① $a_2 < a_3 < a_4$ ② $a_4 < a_3 < a_2$
 ③ $a_2 < a_4 < a_3$ ④ $a_3 < a_2 < a_4$
 ⑤ $a_3 < a_4 < a_2$

28. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n a_n}{3^{n+1}}$ 이 0이 아닌 상수일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

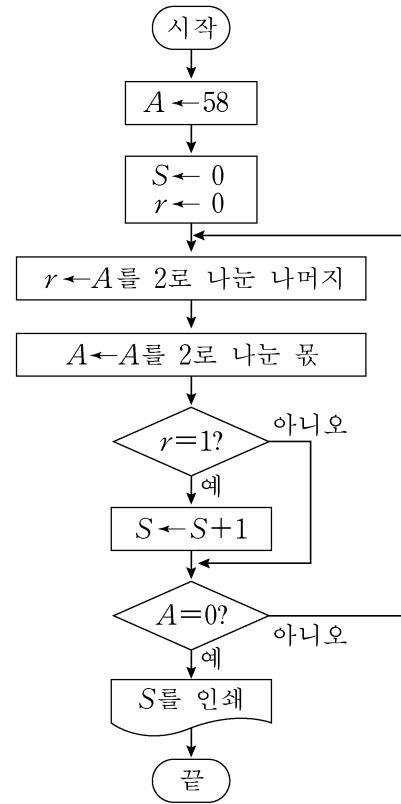
29. 그림과 같이 중심이 같고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, 4, 5인 다섯 개의 원이 있다. 이 다섯 개의 원을 경계로 하여 안에서부터 다섯 개의 영역 A, B, C, D, E로 나누고, 서로 다른 3가지 색의 물감을 칠하여 색칠된 문양을 만들려고 한다. 각 영역은 1가지 색으로만 칠하고, 이웃한 영역은 서로 다른 색을 칠한다. 3가지 색의 물감은 각각 10통 이하만 사용할 수 있고 물감 1통으로는 영역 A의 넓이만큼만 칠할 수 있을 때, 만들 수 있는 서로 다르게 색칠된 문양의 개수는? [4점]



- ① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

단답형

30. 다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값을 구하시오. [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.