## 2. 출제의도 및 문항해설

함수의 다양한 성질과 미적분의 기본 개념에 대한 이해도를 측정하는 문항이다. 미분가능성에 대한 이해와 극값의 정의 및 최대 · 최소 정리를 이해하고 활용하여 함수의 성질을 파악할 수 있는지, 미적분의 기본정리(적분과 미분의 관계)를 이해하고 있는지를 평가하고자 하였다.

- **문제 [1-1]** 함수의 미분가능성을 이해하고 이를 판별할 수 있는지 평가한다. 주어진 점에서 식을 변형하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 의 존재성을 조사하면 무난히 해결할 수 있는 문항이었다. 이때 좌미분계수와 우미분계수를 각각 계산하여 이 둘이 같음을 보임으로써 함수의 미분가능성을 보일 수도 있는 문항이었다.

- **문제 [1-2]** 주어진 구간에서 부등식의 해를 구할 수 있는지 평가한다. 주어진 구간의 함수를 수식으로 나타낸 후 미지수의 변화에 따른 함숫값의 부호변화를 계산하여 부등식의 해를 구할 수 있다. 또한 삼각함수의 그래프를 통하여 역수로 이루어진 식을 변형하여 해결할 수 있는 문항이었다.

- **문제 [1-3]** 주어진 구간 내의 극값의 존재성을 판별할 수 있는지 판별한다. 주어진 열린구간을 $n$개의 열린구간 $\left(\frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{(2n-1)\pi}\right)$ ($n$은 자연수)에 대하여, 구간 끝에서의 함숫값이 같다는 사실을 바탕으로 최대 · 최소 정리를 활용하여 각 구간별로 적어도 1개의 극값이 존재한다는 것을 통해 해결할 수 있다. 또한 수학적 귀납법을 통해 단계적으로 자연수인 극값의 개수를 적어도 $n$개로 증명할 수 있는 문항이었다.

- **문제 [1-4]** 미적분학의 기본정리를 이해하고 미분계수를 바탕으로 그래프에 접하는 접선을 구할 수 있는지와 두 직선이 이루는 각에 대한 정보를 구할 수 있는지 평가한다. 대부분의 교과서에서 탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 각에 대한 정보를 구하는 문제를 다루고 있다. 따라서 주어진 함수의 도함수를 통하여 주어진 점에서의 접선을 구할 수 있으며, 접선의 기울기와 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\cos 2\theta$를 $a$에 대한 식으로 나타낼 수 있는 문항이었다.

## 3. 채점기준

- **문제 [1-1]** 함수의 미분가능성 및 지수함수와 삼각함수의 극한을 이해하는지 평가한다.
- **문제 [1-2]** 지수함수의 성질을 이해하고 삼각함수를 포함하는 부등식을 주어진 구간 안에서 풀 수 있는지 평가한다.
- **문제 [1-3]** 함수의 극값 및 최대 · 최소 정리를 이해하는지 평가한다.
- **문제 [1-4]** 접선의 기울기와 미분계수, 삼각함수와의 관계, 미적분의 기본정리(적분과 미분의 관계) 및 삼각함수의 덧셈정리를 이해하는지 평가한다.



## 4. 답안사례

**[1-1]** $x\neq 0$에 대하여 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{|x|}\,(e^x-1)\cos\frac{1}{x}}{x}=\frac{e^x-1}{x}\cdot\sqrt{|x|}\cos\frac{1}{x}$ 이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$이고 $\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\cos\frac{1}{x}=0$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$이 존재한다.

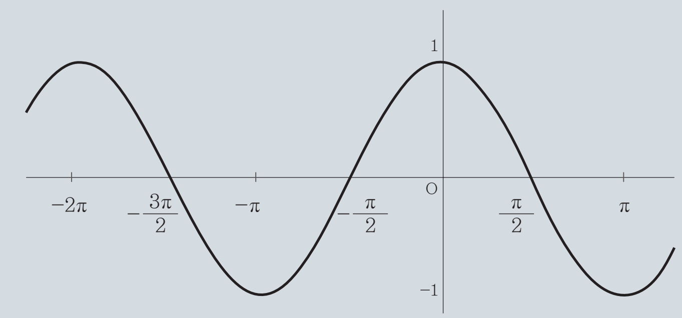
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

이때 $-\sqrt{|x|}\leq\sqrt{|x|}\cos\frac{1}{x}\leq\sqrt{|x|}$ 이고 $\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}=0$이므로 $\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\cos\frac{1}{x}=0$임을 사용하였다.

**[1-2]** $x\leq-\frac{1}{2\pi}$에 대하여 $\sqrt{|x|}>0$, $e^x-1<0$이므로 $\sqrt{|x|}\,(e^x-1)\cos\frac{1}{x}<0$이기 위해서는 $\cos\frac{1}{x}>0$이어야 한다.

$\frac{1}{x}=t$라 놓으면 $-2\pi\leq t<0$이며 $\cos t>0$이어야 한다.

따라서, $-2\pi\leq t<-\frac{3\pi}{2}$ 또는 $-\frac{\pi}{2}<t<0$, 즉, $-\frac{2}{3\pi}<x\leq-\frac{1}{2\pi}$ 또는 $x<-\frac{2}{\pi}$ 이다.




**[1-3]** (i) $n=1$인 경우

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $\left[\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 $\left[\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 그런데, 구간의 양 끝점에서 함숫값이 $f\left(\frac{2}{3\pi}\right)=0=f\left(\frac{2}{\pi}\right)$로 같으므로 열린 구간 $\left(\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ 에 속하는 $x=c$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다. 따라서 $f(x)$는 $x=c$에서 극값을 가진다.

그러므로 함수 $f(x)$는 열린 구간 $\left(\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$의 적어도 한 점에서 극값을 가진다.

(ii) $n=2$인 경우

(i)에 의하여 함수 $f(x)$는 열린 구간 $\left(\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ 의 적어도 한 점에서 극값을 가진다.

또한 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $\left[\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}\right]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 $\left[\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 그런데, 구간의 양 끝점에서 함숫값이 $f\left(\frac{2}{5\pi}\right)=0=f\left(\frac{2}{3\pi}\right)$로 같으므로 열린 구간 $\left(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}\right)$ 에 속하는 $x=c$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다. 따라서 $f(x)$는 $x=c$에서 극값을 가지므로 $f(x)$는 열린 구간 $\left(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}\right)$ 의 적어도 한 점에서 극값을 가진다.

그러므로 함수 $f(x)$는 구간 $\left(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ 의 적어도 두 점에서 극값을 가진다.

(ⅲ) $n=3$인 경우

(ⅱ)에 의하여 함수 $f(x)$는 열린 구간 $\left(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$의 적어도 두 점에서 극값을 가진다.

또한 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $\left[\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}\right]$에서 연속이므로 최대최소 정리에 의하여 $\left[\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}\right]$에서

최댓값과 최솟값을 가진다. 그런데, 구간의 양 끝점에서 함숫값이 $f\left(\frac{2}{7\pi}\right)=0=f\left(\frac{2}{5\pi}\right)$로 같으므로

열린 구간 $\left(\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}\right)$ 에 속하는 $x=c$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.

따라서 $f(x)$는 $x=c$에서 극값을 가지므로 $f(x)$는 구간 $\left(\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}\right)$의 적어도 한 점에서 극값을 가진다.

그러므로 함수 $f(x)$는 구간 $\left(\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ 의 적어도 세 점에서 극값을 가진다.

위의 과정을 반복하면, 함수 $f(x)$는 모든 자연수 $n$에 대하여 열린 구간 $\left(\frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$의

적어도 $n$개의 점에서 극값을 가진다.

[1-4] $y=g(x)$와 $y=F(x)$의 그래프 위에 있는 점 (1,0)에서의 접선과 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\theta_1$, $\theta_2$라고 하자. $g'(x)=xe^{x-1}$이므로 $\tan\theta_1=g'(1)=1$이고 적분과 미분의 관계에 의하여 $\tan\theta_2=F'(1)=f(1)=\alpha$이다.

따라서 $|\tan\theta|=|\tan(\theta_1-\theta_2)|=\left|\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right|=\left|\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right|$이다.

그러므로 $\cos2\theta=\cos(\theta+\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2}{\sec^2\theta}-1=\frac{2}{1+\tan^2\theta}-1=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2}{1+\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2}=\frac{(1+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2+(1-\alpha)^2}=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ 이다.



## 2. 자연계열 논술시험 ❷

### 1. 문항 및 제시문

**제시문**

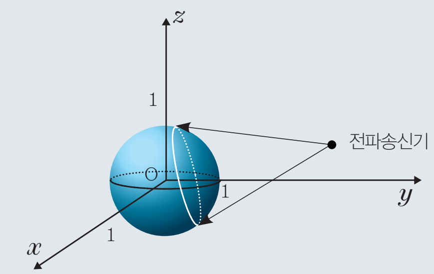
[가] 좌표공간에서 중심이 $(a, b, c)$이고, 반지름의 길이가 $r$인 구의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 이다.

[나] 좌표공간에서 점 $(x_1, y_1, z_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$에 수직인 평면의 방정식은
$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ 이다.

[다] $xy$평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 $x$좌표와 $y$좌표가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때,
속도의 $x$성분과 $y$성분은 $\frac{dx}{dt}=f'(t)$, $\frac{dy}{dt}=g'(t)$이다.

[라] (입체도형의 부피) 닫힌 구간 $[a, b]$의 임의의 점 $x$에서 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 $V$는
$V=\int_a^b S(x)dx$ (단, $S(x)$는 구간 $[a, b]$에서 연속)
이다.

[마] 아래 그림과 같이 원점을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 구가 있다. 구의 외부에 있는 전파송신기가 송출하는 전파는 3차원 공간에서 모든 방향을 향해 직선으로 전송되며, 전파의 전송 소요시간은 무시할 수 있을 정도로 매우 빠르다고 가정한다. (단, 전파송신기는 반지름이 충분히 작아 크기를 무시할 수 있는 구라고 가정하며, 아래 문항 [2-1]과 [2-2]의 전파방해물도 전파송신기와 크기 및 모양이 동일하다고 가정한다. 따라서 전파송신기에서 송출된 전파가 전파방해물에 가로막히면 더 이상 전송되지 않는다.)




**문제**

**제시문 [가]-[마]를 참고하여 다음 물음에 답하여라.**

[2-1] 전파송신기의 위치가 (0, 3, 0)이고, $\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$에 전파방해물이 있다고 하자. 이 전파방해물에 의해 전파가 도달하지 못하는 구 위의 점을 A라 할 때, 점 A에서 구에 접하는 평면의 방정식을 구하여라.

[2-2] $yz$평면에서 전파송신기의 위치가 시각 $t=0$일 때 (0, 3, 0)에서 출발하여 $z$축의 양의 방향으로 매초 1의 속력으로 등속운동을 한다. 이에 따라 (0, 2, 0)에 고정된 전파방해물에 의해 전파가 도달하지 못하는 구 위의 점이 이동한다. 시각 $t$초에서 이 구 위의 점의 이동 속도의 $y$성분을 $v_y(t)$라고 할 때, $v_y\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하여라.

[2-3] 전파송신기의 위치가 시각 $t=0$일 때 (0, 3, 0)에서 출발하여 $y$축의 양의 방향으로 매초 1의 속력으로 등속운동을 한다. 시각 $t(t\geq 0)$초에서 전파가 도달하는 구의 표면을 α, 전파송신기로부터 전파가 가장 멀리 도달하는 구 위의 점들을 포함하는 평면을 β라 할 때, α와 β로 둘러싸인 입체의 부피를 $t$에 대한 식으로 나타내어라.

[2-4] 전파송신기의 위치가 (2, 0, 0)에 고정되어 있다. $x=0$, $y=z$를 방정식으로 갖는 직선을 $l$이라 하고, 구가 직선 $l$을 중심으로 등속 회전한다. 점 B는 시각 $t=0$일 때 구 위의 점(0, 0, 1)에 위치하고, 이 구의 움직임에 따라 점 B도 움직인다. 구가 한 바퀴 회전할 때, 좌표공간에서 B가 지나는 점들로 이루어진 곡선에서 전파송신기로부터 전파를 받을 수 있는 부분의 길이를 구하여라.

## 2. 출제의도 및 문항해설

좌표공간에서 정의된 도형과 평면 위를 운동하는 물체의 해석 능력을 평가하고자 하는 문제이다. 공간에 위치한 구, 평면, 직선의 방정식 설정 능력과 매개변수로 표현된 함수의 미분 이해도, 벡터를 이용한 평면 운동의 해석 능력 등을 평가하고자 하였다.

- **문제 [2-1]** 제시문 **[마]**에서 전파송신기와 전파방해물이 정지해있는 경우를 해석할 수 있는지 평가한다. 전파송신기와 전파방해물을 지나는 직선의 방정식을 매개변수로 표현한 후 이를 구의 방정식에 대입하여 점 A를 구할 수 있으며 점 A의 위치벡터가 평면의 법선벡터라는 것을 이용하여 평면의 방정식을 구할 수 있다.

- **문제 [2-2]** 평면 위의 점의 운동을 해석할 수 있는지를 평가한다. $yz$평면 위에서 전파송신기의 위치를 시간에 따른 매개변수의 형태로 설정한 후 전파송신기와 고정된 전파방해물을 지나는 직선의 방정식과 구의 방정식의 교점을 매개변수를 이용한 형태로 구한 후 이를 미분하여 점의 이동 속도의 $y$성분을 계산할 수 있다. 이 때, 평면 위의 원과 직선의 관계를 쉽게 풀이할 수 있다.

- **문제 [2-3]** 주어진 입체도형의 부피를 정적분을 통해 계산할 수 있는지를 평가한다. 운동하는 전파송신기의 좌표를 시간에 따른 매개변수의 형태로 설정한 후, 문제 상황을 바탕으로 입체도형이 $y$축에 수직으로 자른 단면이 원인 입체도형인 것을 판단하여 정적분을 통해 $t$에 대한 식으로 표현할 수 있다.

- **문제 [2-4]** 문제에서 제시된 점들의 자취와 위치관계를 복합적으로 파악할 수 있는지 평가한다. 주어진 직선의 방향벡터가 B가 지나는 점들이 놓이는 평면의 법선벡터임을 알 수 있고 B가 지나는 점들이 원을 이루는 것도 알 수 있다. 또한 전파송신기에서 발사된 전파가 구에 닿는 영역을 문제 [2-3]에서와 같이 구한 후 이 영역에 포함되는 원의 일부인 호의 길이를 구하면 된다는 것을 알 수 있다. 또한 호도법을 이용하여 호의 길이를 구하는 공식을 통하여 구하고자 하는 부분의 길이를 쉽게 구할 수 있다.

## 3. 채점기준

- **문제 [2-1]** 두 점을 지나는 직선의 방정식, 직선과 구의 교점 및 구 위의 점에 접하는 평면의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
- **문제 [2-2]** 두 점을 지나는 직선의 방정식 및 직선과 원의 교점을 구하고 미분을 이용하여 속도를 구할 수 있는지 평가한다.
- **문제 [2-3]** 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가한다.
- **문제 [2-4]** 구, 직선, 원의 관계 및 호도법을 이해하여 부채꼴의 호의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.



## 4. 답안사례

[2-1] 먼저 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구와 두 점 $\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$과 (0, 3, 0)을 지나는 직선의 교점을 구하자. 직선의 방정식은 $\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{-\frac{1}{2}}$이므로 $\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{-\frac{1}{2}}=k$라 놓으면

직선 위의 점은 $x=\frac{k}{2}, y=-2k+3, z=-\frac{k}{2}$ 로 나타내어진다. 이를 구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=1$에 대입하면 $\left(\frac{k}{2}\right)^2+(-2k+3)^2+\left(-\frac{k}{2}\right)^2=1$이 되어 $k=\frac{4}{3}$ 이다.

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ 이 되고 점 A에서 구에 접하는 평면의 방정식은

$\frac{2}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(y-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(z+\frac{2}{3}\right)=0$ 즉, $2x+y-2z=3$이다.

[2-2] 시각 $t$초에서 전파송신기의 위치는 (0, 3, $t$)이므로 전파가 도달하지 못하는 구 위의 점은 구와 두 점 (0, 2, 0)과 (0, 3, $t$)를 지나는 직선의 교점 중 $y$좌표가 큰 것이다. (그림 1 참고)

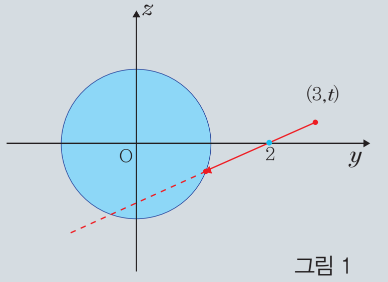


그림 1

(0, 2, 0)과 (0, 3, $t$)를 지나는 직선의 방정식은 $x=0, \frac{y-2}{1}=\frac{z}{t}$ 이므로 $\frac{y-2}{1}=\frac{z}{t}=k$라 놓으면

직선 위의 점은 $x=0, y=k+2, z=tk$로 나타내어진다. 이를 구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=1$에 대입하면,

$(k+2)^2+t^2k^2=1$, 즉, $(t^2+1)k^2+4k+3=0$을 얻는다.

따라서 $k=\frac{-2\pm\sqrt{-3t^2+1}}{t^2+1}$ 인데 구와 직선의 두 교점 중 $y$좌표가 큰 것이

우리가 구하고자 하는 점이므로 $y=k+2$로부터 $k=\frac{-2+\sqrt{-3t^2+1}}{t^2+1}$ 임을 알 수 있다.

그러므로 $v_y(t)=\frac{dy}{dt}=\frac{dk}{dt}=\frac{\left(\frac{-6t}{2\sqrt{-3t^2+1}}\right)(t^2+1)-(-2+\sqrt{-3t^2+1})\cdot 2t}{(t^2+1)^2}$가 되어 $v_y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{36}{25}$이다.

[2–3] 시각 $t$초에서 전파송신기가 위치하는 점 P의 좌표는 $(0,\ t+3,\ 0)$이다. 원점과 평면 β의 거리 $d$를 구하기 위하여 그림 2와 같이 $yz$평면 위에서 생각하자.

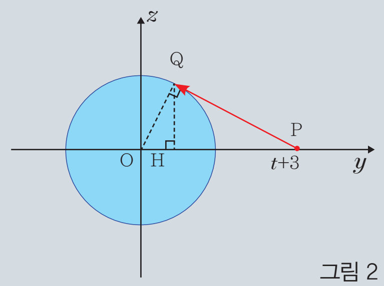



그림 2

점 P를 지나면서 원에 접하는 한 점을 Q라 하고 점 Q에서 $y$축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $d=\overline{OH}$이다. 이때 삼각형 OHQ와 OQP는 서로 닮은 삼각형이므로 $d:1=1:(t+3)$이 되어 $d=\frac{1}{t+3}$이다.

$\frac{1}{t+3}\le y\le 1$에 대하여 구를 $y$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이는 $\pi(1-y^2)$이므로 α와 β로 둘러싸인 입체의 부피는

$$\int_{\frac{1}{t+3}}^{1}\pi(1-y^2)dy=\pi\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{1}{t+3}}^{1}=\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{t+3}+\frac{1}{3(t+3)^3}\right)$$

이다. (그림 3 참고)

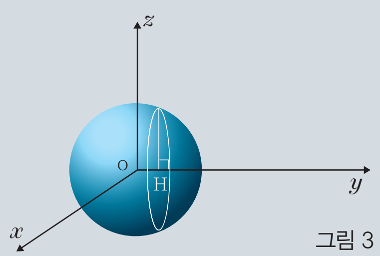



그림 3

[2–4] B가 지나는 점들은 직선 $l$로부터 거리가 일정한 구 위의 점이므로 원을 이룬다. $t=0$일 때 B의 위치가 $(0,\ 0,\ 1)$이고 직선 $l$의 방정식이 $x=0,\ y=z$이기 때문에 이 원은 그림 4와 같이 두 점 $(0,\ 0,\ 1)$과 $(0,\ 1,\ 0)$을 잇는 선분을 지름으로 하고 벡터 $(0,\ 1,\ 1)$에 수직인 평면 γ위에 놓이고 원의 중심 C의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 이며 반지름의 길이는 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

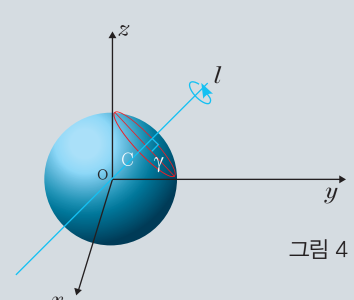



그림 4

한편, 전파송신기의 위치가 $(2,\ 0,\ 0)$이므로 문제 [2–3]에서와 같은 방법으로 계산하면 H의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$ 이다. (그림 5 참고)

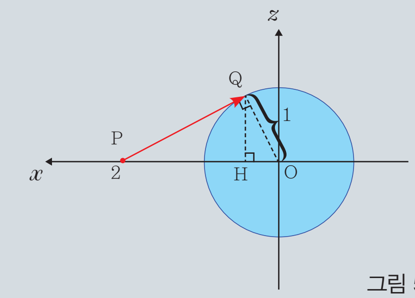



그림 5

따라서 구하고자 하는 곡선의 부분은 원 C를 평면 $x=\frac{1}{2}$ 로 잘랐을 때 $x\ge\frac{1}{2}$ 인 부분이다. 이를 평면 γ위에 그려보면 그림 6과 같으며 빗금 친 부채꼴의 호가 구하고자 하는 곡선의 부분이다.

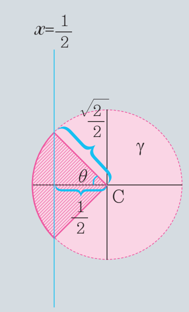



그림 6

따라서 부채꼴의 중심각을 $2\theta$라 놓으면 $\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$가 되어 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로 호의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$이다.

# 3. 자연계열 논술시험 ❸

## 1. 문항 및 제시문

### 제시문

**[가]** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $[f(x), g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이다.

**[나]** 서로 다른 $n$개에서 순서를 생각하지 않고 $r(0\le r\le n)$개를 택하는 것을, $n$개에서 $r$개를 택하는 조합이라 하며, 이 조합의 수를 기호로 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ 와 같이 나타낸다.

**[다]** 이산확률변수 $X$의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i(i=1, 2, \cdots, n)$에 대하여
$\sum_{i=1}^{n} x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$를 확률변수 $X$의 기댓값이라고 한다.

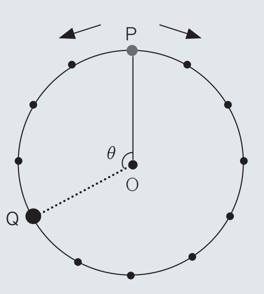
### 문제

**제시문을 참고하여 다음 물음에 답하여라.**

**[3–1]** $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)$가
$$f(x)+xf'(x)=\int_1^x \frac{2\ln t}{t}dt$$
를 만족하고 $f(1)=2$일 때 $f(x)$를 구하여라.
(제시문 [가] 참고)

**[3–2]** 함수 $f(x)=x^n$($n$은 1보다 큰 자연수)라 하자. 임의의 $a>0$에 대해 $f(x)=x^n$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a, a^n)$에서의 접선이 $x$축과 만나는 점을 Q, 점 P에서의 접선에 수직인 직선이 $x$축과 만나는 점을 R이라 하자.
삼각형 PQR의 넓이를 $A(a)$, 삼각형 PQR에 내접하는 원의 둘레의 길이를 $B(a)$라 할 때,
극한값 $\lim_{a\to 0+}\frac{A(a)}{a\cdot B(a)}$ 을 $n$에 대한 식으로 나타내어라.

아래 그림과 같이 점 O를 중심으로 원의 둘레가 12등분된 원 위의 점 P에 바둑돌이 있다.
동전을 던져서 앞면이 나오면 시계 방향으로 1칸, 뒷면이 나오면 시계 반대 방향으로 1칸 바둑돌을 이동시킨다. 한 개의 동전을 $n$번 던졌을 때, 바둑돌이 위치한 점을 Q라 하고 두 선분 OP, OQ가 이루는 각의 크기를 $\theta$ $\left(\theta=0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \cdots, \frac{6\pi}{6}\right)$ 라 하자.




**[3–3]** 동전을 14번 ($n$=14) 던졌을 때 $\theta=0$이 되는 경우의 수를 구하여라.

**[3–4]** 동전을 5번 ($n$=5) 던졌을 때, $\sin\theta$의 값을 확률변수 $X$라 하고 확률변수 $X$의 기댓값을 구하여라.



## 2. 출제의도 및 문항해설

미적분 및 확률 · 통계의 기본 개념과 그 활용에 대한 이해도를 측정하는 문제이다. 여러 가지 미분법 및 적분법, 부정적분, 미분계수와 접선의 기울기의 관계를 이해하고 함수의 극한을 계산할 수 있으며 조합의 뜻과 확률변수를 이해하고 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는지 평가하고자 하였다.

- **문제 [3–1]** 정적분으로 표시된 함수의 결정과 부분적분법을 활용하면 어렵지 않게 문제해결에 접근할 수 있는 문제이다.

- **문제 [3–2]** 삼각형 PQR의 넓이 $A(a)$와 삼각형 PQR에 내접하는 원의 둘레의 길이 $B(a)$를 $a$를 이용하여 잘 표현하는 것이 핵심인 문제로 이를 잘 해결한다면 극한값은 비교적 쉽게 구할 수 있을 것이다.
  [미적분 I ] 다항함수의 미분법 중 도함수의 활용에서 접선의 방정식, [수학 I ]의 직선의 방정식을 이용하여 세 점의 좌표를 구한 다음, 중학교 때 배운 삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 관계를 이용하여 식을 정리한 후 함수의 극한 계산을 하면 해결할 수 있는 문제이다.

- **문제 [3–3]** 동전의 앞면이 나오는 수와 뒷면이 나오는 수의 관계를 이용하고 $\theta$=0이기 위한 경우를 잘 파악한다면 문제를 잘 해결 할 수 있을 것이다. 경우의 수를 조합으로 표현하고 계산하면 해결할 수 있는 문제이다. “동전을 $n$번 던질 때, 동전의 앞이 $a$번 뒤가 $b$번이라면 문제에서 원하는 경우는 이들 중 하나이다.”를 구하고 구한 바와 같이 원 위에서 바둑돌을 이동 후 각이 $\theta$=0인 것을 찾으면 된다. 여기서 $n$은 원위에서 방향을 바꾸는 횟수이다. 수험생들이 이 문제를 자연수의 분할과의 연관성을 찾을 수 있다면 접근이 가능하다고 생각하고 자연수의 분할을 생각하지 않더라도 단순히 카운팅을 하여 구할 수도 있다고 본다.

- **문제 [3–4]** 이산확률분포의 기댓값을 구하는 문제이다. 문제 [3–3]을 조금 확장하여 경우의 수를 구할 수 있고, 기댓값에 대한 제시문 **[다]**를 활용하여 구할 수 있다.

## 3. 채점기준

- **문제 [3–1]** 함수의 곱의 미분법, 치환적분법 및 부분적분법을 이해하는지 평가한다.
- **문제 [3–2]** 미분계수와 접선의 기울기의 관계를 이해하고 함수의 극한을 구할 수 있는지 평가한다.
- **문제 [3–3]** 조합의 뜻을 이해하고 조합의 수를 구할 수 있는지 평가한다.
- **문제 [3–4]** 확률변수를 이해하고 조합을 이용한 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

## 4. 답안사례

[3-1] $f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'$이고 $\int_1^x \frac{2\ln t}{t}dt=\int_0^{\ln x}2k\,dk=k^2\Big|_0^{\ln x}=(\ln x)^2$ 이다. 이때 $\ln t=k$로 치환하였다.

따라서 $\{xf(x)\}'=(\ln x)^2$이므로 양변을 적분하면 $xf(x)=\int(\ln x)^2dx$이다.

부분적분을 두 번 이용하여 우변을 적분하면

$$xf(x)=\int(\ln x)^2dx=x(\ln x)^2-\int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx=x(\ln x)^2-2\left(x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)$$
$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$$

이므로 $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x+2+\frac{C}{x}$ 이다. 또한 $f(1)=2+C=2$이므로 $C=0$이다.

그러므로 $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x+2$이다.

[3-2] 함수 $f(x)=x^n$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,a^n)$에서의 접선의 방정식은 $y=na^{n-1}(x-a)+a^n$이므로 $\mathrm{Q}\left(a-\frac{a}{n},0\right)$ 이다. 한편, 접선에 수직인 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{na^{n-1}}(x-a)+a^n$이므로 $R(a+na^{2n-1},0)$이다. 따라서

$l_1=\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\frac{a^2}{n^2}+a^{2n}}$, $l_2=\overline{\mathrm{QR}}=na^{2n-1}+\frac{a}{n}$, $l_3=\overline{\mathrm{RP}}=\sqrt{n^2a^{4n-2}+a^{2n}}$ 이다.

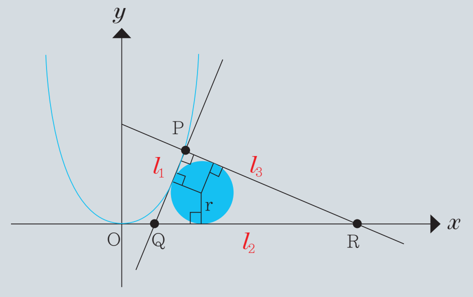
삼각형 PQR의 넓이는 $\frac{l_1l_3}{2}=A(a)=\frac{r(l_1+l_2+l_3)}{2}$ 이므로 $r=\frac{l_1l_3}{l_1+l_2+l_3}=\frac{2A(a)}{l_1+l_2+l_3}$ 이다.

따라서 내접원의 둘레의 길이 $\mathrm{B}(a)=2\pi r=\frac{4\pi A(a)}{l_1+l_2+l_3}$ 이므로

$\frac{A(a)}{a\cdot B(a)}=\frac{l_1+l_2+l_3}{4\pi a}$ 이다.

한편, $l_1+l_2+l_3=\sqrt{a^2n^{-2}+a^{2n}}+na^{2n-1}+an^{-1}+\sqrt{n^2a^{4n-2}+a^{2n}}$

$=a\left[\sqrt{n^{-2}+a^{2(n-1)}}+na^{2(n-1)}+n^{-1}+\sqrt{n^2a^{4(n-1)}+a^{2(n-1)}}\right]$이고 $n>1$ 이므로




$$\lim_{a\to0+}\frac{A(a)}{a\cdot B(a)}=\frac{1}{4\pi}\lim_{a\to0+}\left[\sqrt{n^{-2}+a^{2(n-1)}}+na^{2(n-1)}+n^{-1}+\sqrt{n^2a^{4(n-1)}+a^{2(n-1)}}\right]$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left(\sqrt{n^{-2}}+n^{-1}\right)=\frac{1}{2\pi n}$$ 이다.



[3-3] 동전을 14번 던졌을 때 앞면이 나온 회수를 $a$, 뒷면이 나온 회수를 $b$라 하자.

당연히 $a+b=14$를 만족해야 한다. $\theta=0$이기 위해서는 $a=b$이거나 $|a-b|=12$이어야 한다.

따라서

i) $a=b=7$인 경우: ${}_{14}C_7=3432$

ii) $a$, $b$가 하나는 13, 나머지 하나는 1인 경우: $2\cdot{}_{14}C_{13}=2\cdot14=28$

그러므로 $\theta=0$이 되는 경우의 수는 3432+28=3460이다.

[3-4]

| 앞면의 횟수 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
| $X=\sin\theta$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 경우의 수 | ${}_5C_0$ | ${}_5C_1$ | ${}_5C_2$ | ${}_5C_3$ | ${}_5C_4$ | ${}_5C_5$ |

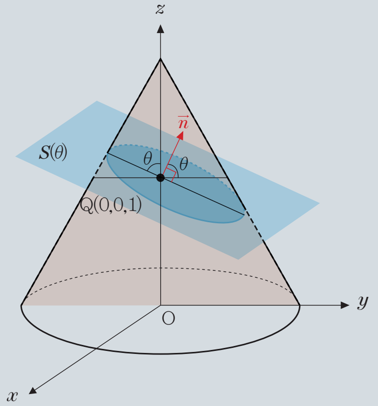
따라서 $X=\frac{1}{2}$일 확률 $\mathrm{P}\left(X=\frac{1}{2}\right)=\frac{{}_5C_0+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_5}{2^5}=\frac{22}{32}$ 이고

$X=1$일 확률 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5C_4+{}_5C_1}{2^5}=\frac{10}{32}$이다.

그러므로 기댓값 $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{2}\cdot\frac{22}{32}+1\cdot\frac{10}{32}=\frac{21}{32}$ 이다.

## 4. 답안사례

**[4-1]** 평면 $S(\theta)$는 점 (0, 0, 1)을 지나고 그림과 같이 법선벡터 $\vec{n}=(0,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$이므로 평면 $S(\theta)$의 방정식은 $(\cos\theta)y+(\sin\theta)(z-1)=0$이다. $\sin\theta\neq0\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 이므로 양변을 $\sin\theta$로 나누면 $(\cot\theta)y+(z-1)=0$, 즉, $(\cot\theta)y+z=1$을 얻는다.




**[4-2]** $D=2\ \overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{BP}}^2$

$=2[x^2+(y-1)^2+(z-2)^2]-[x^2+(y-3)^2+(z-3)^2]$

$=x^2+y^2+z^2+2y-2z-8$

$=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2-10$

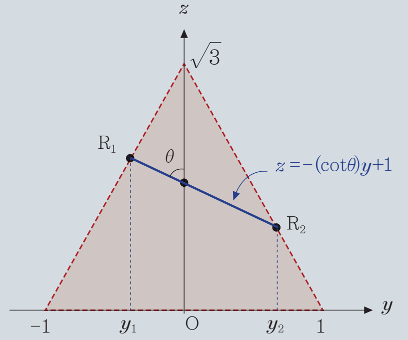
이다. 그런데 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$가 평면 $S\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 위의 점이므로 [4-1]에 의하여 $\left(\cot\frac{\pi}{3}\right)y+z=1$,

즉, $\frac{y}{\sqrt{3}}+z=1$을 만족한다. 따라서

$D=x^2+(y+1)^2+\frac{y^2}{3}-10=x^2+\frac{4}{3}\left(y+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{39}{4}$이 되어

$D$의 최솟값은 $-\frac{39}{4}$이고 이 때의 점 P의 좌표는 $\left(0,\ -\frac{3}{4},\ 1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 이다.

**[4-3]** 두 교점 $\mathrm{R}_1$, $\mathrm{R}_2$가 $yz$ 평면 위에 있으므로 $\mathrm{R}_1(y_1,\ z_1)$, $\mathrm{R}_2(y_2,\ z_2)$라 하자(단, $y_1<y_2$).




$\mathrm{R}_1$은 $z=-(\cot\theta)y+1$과 $z=\sqrt{3}y+\sqrt{3}$ 의 교점이므로 $y_1=-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+\cot\theta}$ 이다.

한편 $\mathrm{R}_2$는 $z=-(\cot\theta)y+1$과 $z=-\sqrt{3}\,y+\sqrt{3}$ 의 교점이므로 $y_2=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-\cot\theta}$ 이다.

따라서 $y_2-y_1=\frac{2(3-\sqrt{3})}{3-\cot^2\theta}$ 이다.

제시문 [나]의 정사영의 정의를 활용하면 $l(\theta)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=y_2-y_1$ 이므로

$l(\theta)=\frac{y_2-y_1}{\sin\theta}=\frac{2(3-\sqrt{3})}{(3-\cot^2\theta)\sin\theta}$ 이다.

**[4-4]** $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 에서 $y=\cot\theta$는 감소함수, $y=\sin\theta$는 증가함수이므로

$l(\theta)=\frac{2(3-\sqrt{3})}{(3-\cot^2\theta)\sin\theta}$는 감소함수가 되어 일대일대응이다. 따라서 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 에서 $l(\theta)$의

역함수가 존재한다. $l^{-1}(\alpha)=\frac{\pi}{3}$이므로 $l\left(\frac{\pi}{3}\right)=\alpha$ 이다. 따라서 역함수의 미분법에 의하여

$(l^{-1})'(\alpha)=\frac{1}{l'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ 이다. 이제 $l'\left(\frac{\pi}{3}\right)$를 구해보자.

제시문 [다]를 사용하여, 양변에 자연로그를 취하면

$\ln l(\theta)=\ln(2(3-\sqrt{3}))-\ln(3-\cot^2\theta)-\ln(\sin\theta)$이고 이 식의 양변을 미분하면

$\frac{l'(\theta)}{l(\theta)}=\frac{-2\cot\theta\csc^2\theta}{3-\cot^2\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta\left(\frac{2\csc^2\theta}{3-\cot^2\theta}+1\right)$ 이다.

따라서 $l'\left(\frac{\pi}{3}\right)=l\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}-3$ 이고

$(l^{-1})'(\alpha)=\frac{1}{l'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}-3}$ 이다.