

문제 2	기하와 벡터 수학 I 미적분 II	· 구의 방정식 · 직선의 방정식 · 평면의 방정식 · 속력과 속도의 개념 · 직선의 방정식	· 원의 방정식 · 입체도형의 부피 · 구의 방정식 · 평면의 방정식 · 호도법
문제 3	미적분 I 미적분 II 확률과 통계	· 함수의 곱의 미분법 · 함수의 부분적분법 · 접선의 방정식 · 함수의 극한	· 삼각함수 · 조합 · 이산확률변수 · 기댓값
문제 4	기하와 벡터	· 평면의 방정식 · 법선벡터 · 공간에서 두 점사이의 거리 · 완전제곱식 구하기	· 정사영 · 역함수의 존재성 밝히기 · 삼각함수의 미분 · 역함수의 미분

3 소문항을 찾는 것이 중요하다

서강대학교 자연계열 논술시험은 소문항을 순서대로 해결하면서 문제를 풀어나가는 구성이 아닌 제시문을 이용하여 각각의 소문항들을 해결하는 구성을 갖고 있습니다. 예를 들어 아래의 2017학년도에 출제되었던 문제 3을 잘 살펴보면 각 소문항들이 직접적인 문제 해결을 매개로 연관되어 있지 않음을 알 수 있습니다. 따라서 문제 전체를 이해하지 못했다 하더라도 포기하지 말고 각각의 소문항들을 독립적으로 접근하여 해결해 나간다면 좋은 점수를 얻을 수 있을 것입니다.

- [3-1]** $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(x) + xf'(x) = \int_1^x \frac{2\ln t}{t} dt$ 를 만족하고 $f(1) = 2$ 일때 $f(x)$ 를 구하여라. (제시문 [가] 참고)
- [3-2]** 함수 $f(x) = x^n$ (n 은 1보다 큰 자연수)라 하자. 임의의 $a > 0$ 에 대해 $f(x) = x^n$ 의 그래프 위의 점 $P(a, a^n)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q , 점 P 에서의 접선에 수직인 직선이 x 축과 만나는 점을 R 이라 하자. 삼각형 PQR 의 넓이를 $A(a)$, 삼각형 PQR 에 내접하는 원의 둘레의 길이를 $B(a)$ 라 할 때, 극한값 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{A(a)}{a \cdot B(a)}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내어라.

아래 그림과 같이 점 O 를 중심으로 원의 둘레가 12등분된 원 위의 점 P 에 바둑돌이 있다. 동전을 던져서 앞면이 나오면 시계 방향으로 1칸, 뒷면이 나오면 시계 반대 방향으로 1칸 바둑돌을 이동시킨다. 한 개의 동전을 n 번 던졌을 때, 바둑돌이 위치한 점을 Q 라 하고 두 선분 OP , OQ 가 이루는 각의 크기를 θ ($\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \dots, \frac{6\pi}{6}$)라 하자.
- [3-3]** 동전을 14번 ($n=14$) 던졌을 때 $\theta=0$ 이 되는 경우의 수를 구하여라.
- [3-4]** 동전을 5번 ($n=5$) 던졌을 때, $\sin\theta$ 의 값을 확률변수 X 라 하고 확률변수 X 의 기댓값을 구하여라.

STEP 2. 기출문제를 실전처럼

1. 자연계열 논술시험 ①

1. 문항 및 제시문

제시문

[가] 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \leq f(a)$ 이면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 가진다고 한다. 또한, $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \geq f(a)$ 이면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극솟값을 가진다고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

[나] (최대·최소 정리)
함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 $f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

[다] (적분과 미분의 관계)
함수 $f(t)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,
$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$
 (단, $a < x < b$)
가 성립한다.

문제

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}(e^x - 1) \cos \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

에 대하여 제시문 [가]-[다]를 참고하여 다음 물음에 답하여라.

- [1-1]** 함수 $f(x)$ 의 $x=0$ 에서의 미분가능성을 조사하여라.
- [1-2]** $x \leq -\frac{1}{2\pi}$ 일 때, 부등식 $f(x) < 0$ 을 풀어라.
- [1-3]** 함수 $f(x)$ 가 모든 자연수 n 에 대하여 열린 구간 $(\frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{\pi})$ 에 속하는 적어도 n 개의 점에서 극값을 가짐을 보여라.
- [1-4]** 두 함수 $g(x) = (x-1)e^{x-1}$ 과 $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ 의 그래프는 점 $(1, 0)$ 에서 만난다. 이 점에서 $y=g(x)$ 의 그래프에 접하는 접선과 $y=F(x)$ 의 그래프에 접하는 접선이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 라 하자. $f(1) = \alpha$ 라고 할 때, $\cos 2\theta$ 를 α 에 대한 식으로 나타내어라.

(iii) $n=3$ 인 경우

(ii)에 의하여 함수 $f(x)$ 는 열린 구간 $(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{\pi})$ 의 적어도 두 점에서 극값을 가진다.

또한 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}]$ 에서 연속이므로 최대최소 정리에 의하여 $[\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}]$ 에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 그런데, 구간의 양 끝점에서 함수값이 $f(\frac{2}{7\pi})=0=f(\frac{2}{5\pi})$ 로 같으므로 열린 구간 $(\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi})$ 에 속하는 $x=c$ 에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.

따라서 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 극값을 가지므로 $f(x)$ 는 구간 $(\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi})$ 의 적어도 한 점에서 극값을 가진다.

그러므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(\frac{2}{7\pi}, \frac{2}{\pi})$ 의 적어도 세 점에서 극값을 가진다.

위의 과정을 반복하면, 함수 $f(x)$ 는 모든 자연수 n 에 대하여 열린 구간 $(\frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{\pi})$ 의 적어도 n 개의 점에서 극값을 가진다.

[1-4] $y=g(x)$ 와 $y=F(x)$ 의 그래프 위에 있는 점 $(1,0)$ 에서의 접선과 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2 라고 하자. $g'(x)=xe^{x-1}$ 이므로 $\tan\theta_1=g'(1)=1$ 이고 적분과 미분의 관계에 의하여 $\tan\theta_2=F'(1)=f(1)=\alpha$ 이다.

따라서 $|\tan\theta|=|\tan(\theta_1-\theta_2)|=\left|\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right|=\left|\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right|$ 이다.

그러므로 $\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2}{\sec^2\theta}-1=\frac{2}{1+\tan^2\theta}-1=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$$=\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2}{1+\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2}=\frac{(1+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2+(1-\alpha)^2}=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

이다.

2.
자연계열
논술시험 ②

1. 문항 및 제시문

제시문

[가] 좌표공간에서 중심이 (a, b, c) 이고, 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 이다.

[나] 좌표공간에서 점 (x_1, y_1, z_1) 을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$ 에 수직인 평면의 방정식은 $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ 이다.

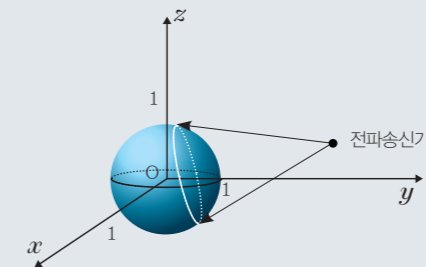
[다] xy 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 x 좌표와 y 좌표가 $x=f(t), y=g(t)$ 일 때, 속도의 x 성분과 y 성분은 $\frac{dx}{dt}=f'(t), \frac{dy}{dt}=g'(t)$ 이다.

[라] (입체도형의 부피) 닫힌 구간 $[a, b]$ 의 임의의 점 x 에서 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$ 인 입체도형의 부피 V 는

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

(단, $S(x)$ 는 구간 $[a, b]$ 에서 연속)이다.

[마] 아래 그림과 같이 원점을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 구가 있다. 구의 외부에 있는 전파송신기가 송출하는 전파는 3차원 공간에서 모든 방향을 향해 직선으로 전송되며, 전파의 전송 소요시간은 무시할 수 있을 정도로 매우 빠르다고 가정한다. (단, 전파송신기는 반지름이 충분히 작아 크기를 무시할 수 있는 구라고 가정하며, 아래 문항 [2-1]과 [2-2]의 전파방해물도 전파송신기와 크기 및 모양이 동일하다고 가정한다. 따라서 전파송신기에서 송출된 전파가 전파방해물에 가로막히면 더 이상 전송되지 않는다.)



문제

제시문 [가]-[마]를 참고하여 다음 물음에 답하여라.

[2-1] 전파송신기의 위치가 $(0, 3, 0)$ 이고, $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ 에 전파방해물이 있다고 하자. 이 전파방해물에 의해 전파가 도달하지 못하는 구 위의 점을 A라 할 때, 점 A에서 구에 접하는 평면의 방정식을 구하여라.

[2-2] yz 평면에서 전파송신기의 위치가 시각 $t=0$ 일 때 $(0, 3, 0)$ 에서 출발하여 z 축의 양의 방향으로 매초 1의 속력으로 등속운동을 한다. 이에 따라 $(0, 2, 0)$ 에 고정된 전파방해물에 의해 전파가 도달하지 못하는 구 위의 점이 이동한다. 시각 t 초에서 이 구 위의 점의 이동 속도의 y 성분을 $v_y(t)$ 라고 할 때, $v_y(\frac{1}{2})$ 의 값을 구하여라.

[2-3] 전파송신기의 위치가 시간 $t=0$ 일 때 $(0, 3, 0)$ 에서 출발하여 y 축의 양의 방향으로 매초 1의 속력으로 등속운동을 한다. 시간 $t(t \geq 0)$ 초에서 전파가 도달하는 구의 표면을 α , 전파송신기로부터 전파가 가장 멀리 도달하는 구 위의 점들을 포함하는 평면을 β 라 할 때, α 와 β 로 둘러싸인 입체의 부피를 t 에 대한 식으로 나타내어라.

[2-4] 전파송신기의 위치가 $(2, 0, 0)$ 에 고정되어 있다. $x=0, y=z$ 를 방정식으로 갖는 직선을 l 이라 하고, 구가 직선 l 을 중심으로 등속 회전한다. 점 B는 시간 $t=0$ 일 때 구 위의 점 $(0, 0, 1)$ 에 위치하고, 이 구의 움직임에 따라 점 B도 움직인다. 구가 한 바퀴 회전할 때, 좌표공간에서 B가 지나는 점들로 이루어진 곡선에서 전파송신기로부터 전파를 받을 수 있는 부분의 길이를 구하여라.

2. 출제의도 및 문항해설

좌표공간에서 정의된 도형과 평면 위의 운동하는 물체의 해석 능력을 평가하고자 하는 문제이다. 공간에 위치한 구, 평면, 직선의 방정식 설정 능력과 매개변수로 표현된 함수의 미분 이해도, 벡터를 이용한 평면 운동의 해석 능력 등을 평가하고자 하였다.

- **문제 [2-1]** 제시문 [마]에서 전파송신기와 전파방해물이 정지해있는 경우를 해석할 수 있는지 평가한다. 전파송신기와 전파 방해물을 지나는 직선의 방정식을 매개변수로 표현한 후 이를 구의 방정식에 대입하여 점 A를 구할 수 있으며 점 A의 위치 벡터가 평면의 법선벡터라는 것을 이용하여 평면의 방정식을 구할 수 있다.
- **문제 [2-2]** 평면 위의 점의 운동을 해석할 수 있는지를 평가한다. yz 평면 위에서 전파송신기의 위치를 시간에 따른 매개변수의 형태로 설정한 후 전파송신기와 고정된 전파방해물을 지나는 직선의 방정식과 구의 방정식의 교점을 매개변수를 이용한 형태로 구한 후 이를 미분하여 점의 이동 속도의 y 성분을 계산할 수 있다. 이 때, 평면 위의 원과 직선의 관계를 쉽게 풀이할 수 있다.
- **문제 [2-3]** 주어진 입체도형의 부피를 정적분을 통해 계산할 수 있는지를 평가한다. 운동하는 전파송신기의 좌표를 시간에 따른 매개변수의 형태로 설정한 후, 문제 상황을 바탕으로 입체도형이 y 축에 수직으로 자른 단면이 원인 입체도형인 것을 판단하여 정적분을 통해 t 에 대한 식으로 표현할 수 있다.
- **문제 [2-4]** 문제에서 제시된 점들의 자취와 위치관계를 복합적으로 파악할 수 있는지 평가한다. 주어진 직선의 방향벡터가 B가 지나는 점들이 놓이는 평면의 법선벡터임을 알 수 있고 B가 지나는 점들이 원을 이루는 것도 알 수 있다. 또한 전파송신기에서 발사된 전파가 구에 닿는 영역을 문제 [2-3]에서와 같이 구한 후 이 영역에 포함되는 원의 일부인 호의 길이를 구하면 된다는 것을 알 수 있다. 또한 호도법을 이용하여 호의 길이를 구하는 공식을 통하여 구하고자 하는 부분의 길이를 쉽게 구할 수 있다.

3. 채점기준

- **문제 [2-1]** 두 점을 지나는 직선의 방정식, 직선과 구의 교점 및 구 위의 점에 접하는 평면의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
- **문제 [2-2]** 두 점을 지나는 직선의 방정식 및 직선과 원의 교점을 구하고 미분을 이용하여 속도를 구할 수 있는지 평가한다.
- **문제 [2-3]** 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가한다.
- **문제 [2-4]** 구, 직선, 원의 관계 및 호도법을 이해하여 부채꼴의 호의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 답안사례

[2-1] 먼저 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구와 두 점 $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ 과 $(0, 3, 0)$ 을 지나는

직선의 교점을 구하자. 직선의 방정식은 $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{-\frac{1}{2}}$ 이므로 $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{-\frac{1}{2}} = k$ 라 놓으면

직선 위의 점은 $x = \frac{k}{2}, y = -2k+3, z = -\frac{k}{2}$ 로 나타내어진다. 이를 구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=1$ 에

대입하면 $(\frac{k}{2})^2 + (-2k+3)^2 + (-\frac{k}{2})^2 = 1$ 이 되어 $k = \frac{4}{3}$ 이다.

따라서 점 A의 좌표는 $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ 이 되고 점 A에서 구에 접하는 평면의 방정식은

$\frac{2}{3}(x-\frac{2}{3}) + \frac{1}{3}(y-\frac{1}{3}) - \frac{2}{3}(z+\frac{2}{3}) = 0$ 즉, $2x+y-2z=3$ 이다.

[2-2] 시간 t 초에서 전파송신기의 위치는 $(0, 3, t)$ 이므로 전파가 도달하지 못하는 구 위의 점은 구와 두 점 $(0, 2, 0)$ 과 $(0, 3, t)$ 을 지나는 직선의 교점 중 y 좌표가 큰 것이다. (그림 1 참고)

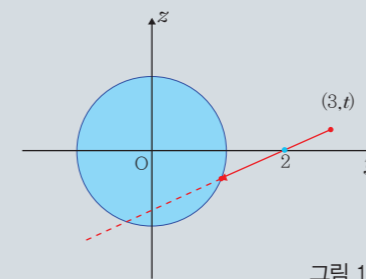


그림 1

$(0, 2, 0)$ 과 $(0, 3, t)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $x=0, \frac{y-2}{1} = \frac{z}{t}$ 이므로 $\frac{y-2}{1} = \frac{z}{t} = k$ 라 놓으면

직선 위의 점은 $x=0, y=k+2, z=tk$ 로 나타내어진다. 이를 구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=1$ 에 대입하면,

$(k+2)^2 + t^2k^2 = 1$, 즉, $(t^2+1)k^2 + 4k + 3 = 0$ 을 얻는다.

따라서 $k = \frac{-2 \pm \sqrt{-3t^2+1}}{t^2+1}$ 인데 구와 직선의 두 교점 중 y 좌표가 큰 것이

우리가 구하고자 하는 점이므로 $y=k+2$ 로부터 $k = \frac{-2 + \sqrt{-3t^2+1}}{t^2+1}$ 임을 알 수 있다.

그러므로 $v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dk}{dt} = \frac{(-6t)}{2\sqrt{-3t^2+1}}(t^2+1) - (-2 + \sqrt{-3t^2+1}) \cdot 2t$ 가 되어 $v_y(\frac{1}{2}) = -\frac{36}{25}$ 이다.

3. 자연계열
논술시험 ③

1. 문항 및 제시문

제시문

[가] 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때, $[f(x), g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이다.

[나] 서로 다른 n 개에서 순서를 생각하지 않고 $r(0 \leq r \leq n)$ 개를 택하는 것을, n 개에서 r 개를 택하는 조합이라 하며, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 와 같이 나타낸다.

[다] 이산확률변수 X 의 확률질량함수 $P(X=x_i) = p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 에 대하여 $\sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$ 를 확률변수 X 의 기댓값이라고 한다.

문제

제시문을 참고하여 다음 물음에 답하여라.

[3-1] $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) + x f'(x) = \int_1^x \frac{2 \ln t}{t} dt$$

를 만족하고 $f(1) = 2$ 일 때 $f(x)$ 를 구하여라.

(제시문 [가] 참고)

[3-2] 함수 $f(x) = x^n$ (n 은 1보다 큰 자연수)라 하자. 임의의 $a > 0$ 에 대해 $f(x) = x^n$ 의 그래프 위의 점 $P(a, a^n)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q , 점 P 에서의 접선에 수직인 직선이 x 축과 만나는 점을 R 이라 하자.

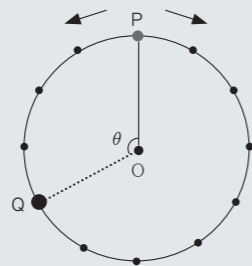
삼각형 PQR 의 넓이를 $A(a)$, 삼각형 PQR 에 내접하는 원의 둘레의 길이를 $B(a)$ 라 할 때,

극한값 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{A(a)}{a \cdot B(a)}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내어라.

아래 그림과 같이 점 O 를 중심으로 원의 둘레가 12등분된 원 위의 점 P 에 바둑돌이 있다.

동전을 던져서 앞면이 나오면 시계 방향으로 1칸, 뒷면이 나오면 시계 반대 방향으로 1칸 바둑돌을 이동시킨다. 한 개의 동전을 n 번 던졌을 때, 바둑돌이 위치한 점을 Q 라 하고 두 선분 OP, OQ 가 이루는 각의 크기를

θ ($\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \dots, \frac{6\pi}{6}$)라 하자.



[3-3] 동전을 14번 ($n=14$) 던졌을 때 $\theta=0$ 이 되는 경우의 수를 구하여라.

[3-4] 동전을 5번 ($n=5$) 던졌을 때, $\sin \theta$ 의 값을 확률변수 X 라 하고 확률변수 X 의 기댓값을 구하여라.

2. 출제의도 및 문항해설

미적분 및 확률·통계의 기본 개념과 그 활용에 대한 이해도를 측정하는 문제이다. 여러 가지 미분법 및 적분법, 부정적분, 미분계수와 접선의 기울기의 관계를 이해하고 함수의 극한을 계산할 수 있으며 조합의 뜻과 확률변수를 이해하고 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는지 평가하고자 하였다.

- 문제 [3-1] 정적분으로 표시된 함수의 결정과 부분적분법을 활용하면 어렵지 않게 문제해결에 접근할 수 있는 문제이다.
- 문제 [3-2] 삼각형 PQR 의 넓이 $A(a)$ 와 삼각형 PQR 에 내접하는 원의 둘레의 길이 $B(a)$ 를 a 를 이용하여 잘 표현하는 것이 핵심인 문제로 이를 잘 해결한다면 극한값은 비교적 쉽게 구할 수 있을 것이다.
[미적분 1] 다항함수의 미분법 중 도함수의 활용에서 접선의 방정식, [수학 1]의 직선의 방정식을 이용하여 세 점의 좌표를 구한 다음, 중학교 때 배운 삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 관계를 이용하여 식을 정리한 후 함수의 극한 계산을 하면 해결할 수 있는 문제이다.
- 문제 [3-3] 동전의 앞면이 나오는 수와 뒷면이 나오는 수의 관계를 이용하고 $\theta=0$ 이 되기 위한 경우를 잘 파악한다면 문제를 잘 해결 할 수 있을 것이다. 경우의 수를 조합으로 표현하고 계산하면 해결할 수 있는 문제이다. “동전을 n 번 던질 때, 동전의 앞이 a 번 뒤가 b 번이라면 문제에서 원하는 경우는 이들 중 하나이다.”를 구하고 구한 바와 같이 원 위에서 바둑돌을 이동 후 각이 $\theta=0$ 인 것을 찾으면 된다. 여기서 n 은 원위에서 방향을 바꾸는 횟수이다. 수험생들이 이 문제를 자연수의 분할과의 연관성을 찾을 수 있다면 접근이 가능하다고 생각하고 자연수의 분할을 생각하지 않더라도 단순히 카운팅을 하여 구할 수도 있다고 본다.
- 문제 [3-4] 이산확률분포의 기댓값을 구하는 문제이다. 문제 [3-3]을 조금 확장하여 경우의 수를 구할 수 있고, 기댓값에 대한 제시문 [다]를 활용하여 구할 수 있다.

3. 채점기준

- 문제 [3-1] 함수의 곱의 미분법, 치환적분법 및 부분적분법을 이해하는지 평가한다.
- 문제 [3-2] 미분계수와 접선의 기울기의 관계를 이해하고 함수의 극한을 구할 수 있는지 평가한다.
- 문제 [3-3] 조합의 뜻을 이해하고 조합의 수를 구할 수 있는지 평가한다.
- 문제 [3-4] 확률변수를 이해하고 조합을 이용한 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 자연계열
논술시험 ④

1. 문항 및 제시문

제시문

[가] 점 $P(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$ 에 수직인 평면의 방정식은 $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ 이다.

[나] 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A'B'이라 하고, 직선 AB와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 라고 하면 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos\theta$ 이다.

[다] 함수 $f(x)$ 가 미분가능하고 $f(x) \neq 0$ 일때, 로그함수의 미분법을 이용하여 여러 함수의 곱 또는 몫의 미분을 간단하게 계산할 수 있다. 예를 들어,

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)w(x)}$$

의 도함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

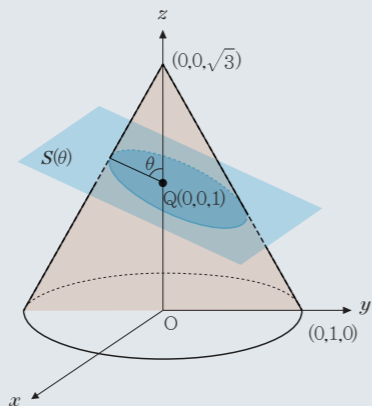
$$\ln|f(x)| = \ln|u(x)| - \ln|v(x)| - \ln|w(x)| \text{이다.}$$

양변을 x 에 대하여 미분한 후 정리하면 $f'(x)$ 를 구할 수 있다.

문제

제시문을 참고하여 다음 물음에 답하여라.

아래 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 1이고 높이가 $\sqrt{3}$ 인 원뿔이 xy 평면 위에 밑면의 중심이 원점 O에 오도록 놓여 있다. 원뿔 안의 점 $Q(0, 0, 1)$ 을 지나고 yz 평면에 수직이며, xz 평면과 이루는 각의 크기가 θ ($\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$)인 평면을 $S(\theta)$ 라 하자.



[4-1] 평면 $S(\theta)$ 의 방정식은 $(\cot\theta)y+z=1$ 임을 보여라.

[4-2] 좌표공간에 두 점 $A(0, 1, 2)$ 와 $B(0, 3, 3)$ 이 주어졌다. 평면 $S(\frac{\pi}{3})$ 위의 점 $P(x, y, z)$ 에 대하여

$$D = 2\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 \text{의 최솟값과 이 때의 점 P의 좌표를 구하여라.}$$

[4-3] 원뿔과 yz 평면 그리고 평면 $S(\theta)$ 의 교점 R_1 과 R_2 를 잇는 선분의 길이 $l(\theta)$ 를 구하여라.

[4-4] $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $l(\theta)$ 의 역함수가 존재함을 보이고, $l^{-1}(\alpha) = \frac{\pi}{3}$ 를 만족하는 α 에 대하여

$$(l^{-1})'(\alpha) \text{의 값을 구하여라.}$$

2. 출제의도 및 문항해설

기하와 벡터 및 미적분의 기본 개념과 그 활용에 대한 이해도를 측정하는 문제이다. 평면의 방정식, 직선의 방정식, 두 점 사이의 거리 및 삼각함수의 성질과 역함수를 이해하고 정사영과 역함수의 미분법, 로그함수의 미분법을 활용할 수 있는지 평가하고자 하였다.

- **문제 [4-1]** 공간에서의 각의 관계를 파악하여 법선 벡터를 θ 를 구한 후 제시문 [가]를 이용하면 해결할 수 있는 문제이다. 다만 지나는 점이 주어지지 않으나 법선 벡터의 경우는 축과 이루는 각이 θ 임을 이용하여 성분벡터를 구해내야 한다. θ 에 관한 삼각함수식으로 성분을 구하는데, 약간 어려움을 느낄 수 있다고 보이나 제시문 [나]의 정사영의 길이를 활용하여 문제를 쉽게 해결할 수 있다.
- **문제 [4-2]** [기하와 벡터]에서 '두 점사이의 거리'를 이용해 D의 식을 구하여 문제 [4-1]에서 구한 평면의 방정식을 바탕으로 식을 해석하면 [기하와 벡터]의 '점과 평면사이의 거리'를 구하는 문제로 바뀌며, 이로써 D의 최솟값을 구할 수 있다. 최솟값을 가지는 점 P는 $(0, -1, 1)$ 에서 평면 $S(\pi/3)$ 에 내린 수선의 발이므로, 직선과 평면의 교점을 구하여 답을 구할 수 있다. 이 과정에서 부등식 영역의 최대, 최소 문제로 해석하여 완전제곱식을 이용하면 문제를 해결할 수 있다.
- **문제 [4-3]** 문제 [4-1]에서 구한 관계식을 활용하고 yz 평면상에서 직선과의 교점의 y 좌표의 차와 정사영의 성질을 이용하여 해결할 수 있는 문제로 전체를 통찰할 수 있는 능력을 요구한다. 다양한 풀이가 존재할 수 있으며, 가장 기본적인 풀이로 직선의 방정식과 평면의 방정식을 연립하여 두 점의 좌표를 구하고 길이를 구하는 방법이 있다.
- **문제 [4-4]** [미적분]의 로그미분법을 활용한 음함수의 미분법을 문제 [4-3]의 결과에 적용하여 구하는 문제이다. 문제 [4-3]에서 얻은 식의 범위에서 증감의 부호를 판단하여 역함수의 존재여부를 보인다. 이후 역함수의 미분법을 이용하여 답을 구한다.

3. 채점기준

- **문제 [4-1]** 평면의 법선벡터를 이해하고 이를 이용하여 평면의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
- **문제 [4-2]** 두 점 사이의 거리를 이해하고 이차식의 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.
- **문제 [4-3]** 직선의 방정식, 두 직선의 교점 및 두 점 사이의 거리를 구할 수 있으며 선분의 정사영을 이해하는지 평가한다.
- **문제 [4-4]** 삼각함수의 성질, 역함수의 존재성, 역함수의 미분법 및 로그함수의 미분법을 이해하는지 평가한다.