Ⅱ. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

포물선의 기본적인 성질들의 이해여부를 확인하는 문제이다. 이를 통하여 포물선의 접선, 선분의 내분점, 매개화된 곡선의 접선 등을 구하는 법에 관한 응용력 측정을 하고자 하였고, 기본적인 곡선의 방정식에 관한 정리의 이해도와 연산능력을 확인하고자 하였다.

2. 채점기준

[1-1] 포물선의 접선의 방정식을 구하고 이를 근의 공식을 이용하여 풀이하는 과정을 평가한다.

[1-2] 포물선의 성질과 두 점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 해당 직선이 초점을 지남을 보이는 과정을 평가한다. 또한, 직선과 포물선이 만나는 두 점을 이용한 삼각형의 닮은꼴과 내분점 공식을 이용하여 해당 직선의 x절편이 초점과 동일함을 보이는 것으로 풀이할 수도 있음을 밝힌다.

[1-3] 선분의 내분점을 이용하여 식을 전개해 나가는 과정을 평가한다.

[1-4] 문제의 조건을 통하여 점 R의 좌표를 표현하고 해당 좌표가 포물선 위에 있음을 보인다. 또한 해당 좌표에서의 접선의 기울기가 직선 PQ의 기울기와 동일함을 계산하는 과정을 평가한다.

3. 고등학교 교육과정과의 연계성

문제1은 수학교과서의 기하와 벡터 과정에 나오는 이차곡선에서 포물선 단원과 「수학 II」과정에 나오는 여러 가지 함수의 미분법에서 매개화된 함수의 미분법을 활용하였다.

제시문 [가]와 [나]는 자연계열 학생들이 이수하는 <기하와 벡터> 과목 중 이차곡선 단원에 해당하는 내용이다. 교육과정에 나타나는 이차곡선은 원, 포물선, 타원, 쌍곡선 등이 있으며 이 중 제시문 [가]와 [나]는 포물선의 성질에 대하여 설명하고 있다. 또한, 제시문 [나]에 제시된 내분점의 개념은 고등학교 1학년 과정에서 다루는 <고등학교 수학> 과목 중 평면좌표 단원에 해당하는 내용이다.

문제 [1-1]~[1-4]는 각각 포물선과 직선의 위치 관계, 포물선의 초점과 준선에 대한 성질, 선분의 내분점 벡터, 포물선의 접선의 방정식에 해당하는 내용을 묻고 있다. 이는 자연계열 학생들이 이수하는 ‘기하와 벡터’ 과목 중 이차곡선에 해당하는 내용이며, 여러 가지 이차곡선 중 가장 먼저 소개되는 포물선의 성질을 이용하여 문제가 출제되었다.

Ⅲ. 제시문 분석 및 답안 사례

1. 제시문 분석

제시문 [가]는 평면 위의 한 정점 F와 그 점 F를 지나지 않는 한 정직선 l이 주어졌을 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점 P들의 집합을 포물선이라고 하는 포물선의 정의에 대하여 설명하고 있다. 또한, 포물선의 정의로부터 얻을 수 있는 가장 기본적인 형태의 포물선의 방정식인 $y^2=4px$에 대하여 설명하고 있다. 제시문 [나]는 포물선의 접선과 선분의 내분점의 개념을 결

합하여 제시한 것으로 제시문에 주어진 상황이 [그림 2]로 구체화되어 있다. 기하와 벡터에서 다루는 내분점 벡터의 예시에 해당하는 내용이다.

2. 답안 사례

문제 [1-1]은 한 점에서 포물선에 접선을 그을 때 생기는 접점을 구할 수 있는지를 묻는 문제로 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식에 대한 이해가 필요하다. 문제 [1-2]는 포물선의 두 접점을 지나는 직선이 언제 초점을 지나게 되는지 그 조건을 구하는 문제로 준선의 방정식이 $x=-p$임을 이용하면 해결할 수 있다. 문제 [1-3]은 선분의 내분점 벡터를 구하여 연립하는 문제이며, 문제 [1-4]는 주어진 점이 포물선 위에 있는지를 보이고, 어떤 직선이 포물선의 접선이 되는지를 묻는 문제이다. 선분의 내분점 벡터를 구하는 방법, 직선의 방향벡터를 구하는 방법, 매개변수로 주어진 곡선의 속도벡터를 구하는 방법 등 단원에 대한 종합적인 이해가 필요하다.

<문제1 답안 사례>

【1-1】 점 $(\frac{u^2}{4p},u)$에서 포물선 $y^2=4px$ 과 접하는 직선의 방정식은 $y-u=\frac{2p}{u}(x-\frac{u^2}{4p})$,

즉 $y=\frac{2p}{u}x+\frac{u}{2}$ 이다. 이 직선이 점 (α,β)를 지나면 $\beta=\frac{2p}{u}\alpha+\frac{u}{2}$ 이다.

이 식을 정리하면 $u^2-2\beta u+p\alpha=0$ 이므로 $u=\beta\pm\sqrt{\beta^2+4p\alpha}$ 이다.

그러므로 $y_0=\beta+\sqrt{\beta^2-4p\alpha}$ 이고 $y_1=\beta-\sqrt{\beta^2-4p\alpha}$ 이다.

【1-2】 $\alpha=-p$ 인 경우 【1-1】의 답안에 의해 $y_0=\beta+\sqrt{\beta^2+4p^2}$ 이고 $y_1=\beta-\sqrt{\beta^2+4p^2}$ 이므로

$x_1-x_0=\frac{y_1^2-y_0^2}{4p}=\frac{(y_1-y_0)(y_1+y_0)}{4p}=-\frac{\beta\sqrt{\beta^2+4p^2}}{p}$ 이다.

$\beta=0$이면 $(x_0,y_0)=(p,2p)$이고 $(x_1,y_1)=(p,-2p)$ 이므로 두 점을 지나는 직선은 초점 $\mathrm{F}(p,0)$ 을 지난다. $\beta\neq 0$이면 $x_1-x_0\neq 0$ 이고 점 (x_0,y_0)과 점 (x_1,y_1)을 지나는 $y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$ 이다.

그런데 $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{4p}{y_1+y_0}=\frac{2p}{\beta}$ 이므로 이 직선의 방정식은 $y=\frac{2p}{\beta}x-\frac{2p}{\beta}x_0+y_0$ 을 얻는다.

$x=p$를 대입하면 우변은 $\frac{2p^2}{\beta}-\frac{2p}{\beta}x_0+y_0$ 이다.

여기에 $x_0=\frac{y_0^2}{4p}=\frac{\beta^2+(\beta^2+4p^2)+2\beta\sqrt{\beta^2+4p^2}}{4p}=\frac{4p^2+2\beta y_0}{4p}=p+\frac{\beta}{2p}y_0$ ----------(1)

을 대입하면 $\frac{2p^2}{\beta}-\frac{2p}{\beta_0}(p+\frac{\beta}{2p}y_0)+y_0=0$ 이므로 이 직선은 $(p,0)$ 을 지난다.

【1-3】 내분점 공식에 의해 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 이다.

그런데 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 로 나타낼 수 있다.

【1-4】 (i) 점 R은 포물선 $y^2=4px$ 위에 있다.

[1-3]에 의하여 $\overrightarrow{OR} = ((1-t)^2 x_0 + 2t(1-t)\alpha + t^2 x_1, (1-t)^2 y_0 + 2t(1-t)\beta + t^2 y_1)$ 이다.

(1)과 같은 방법으로 계산하면 $x_0 = -\alpha + \dfrac{\beta y_0}{2p}$, $x_1 = -\alpha + \dfrac{\beta y_1}{2p}$ 이고, 이 값을 위의 식에 대입하면 $\overrightarrow{OR}$ 의 x좌표는 $(-4t^2+4t-1)\alpha + (1-t)^2 \dfrac{\beta y_0}{2p} + t^2 \dfrac{\beta y_1}{2p}$ 이다.

그런데 $y_0 + y_1 = 2\beta$ 이므로 이 식은 $(-4t^2+4t-1)\alpha + \dfrac{(1-2t)\beta y_0}{2p} + \dfrac{t^2\beta^2}{p}$ --------(2) 이다.

이 값을 X라 하자. 같은 방법으로 $\overrightarrow{OR}$의 y좌표는 $(1-2t)y_0 + 2t\beta$ 임을 보일 수 있다.

이 값을 Y라고 하자. 이제 $Y^2 = 4pX$ 임을 보이자.

$\dfrac{1}{4p}Y^2 = \dfrac{1}{4p}((1-2t)^2 y_0^2 + 4t^2\beta^2 + 2t(1-2t)y_0\beta) =$

$-(1-2t)^2\alpha + \dfrac{(1-2t)^2\beta y_0}{2p} + \dfrac{t^2\beta^2}{p} + \dfrac{t(1-2t)y_0\beta}{2p}$ 이므로 (2)에 의해 $Y^2 = 4pX$ 이다.

(ii) 점 R에서의 접선은 직선 PQ이다. 점 R은 선분 PQ의 내분점이므로 직선 PQ 위에 있다. 그러므로 직선 PQ가 접선임을 보이기 위해서는 직선 PQ의 (크기가 1인) 방향벡터와 접선의 (크기가 1인) 방향벡터가 같음을 보이면 된다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= ((1-t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OB}) - ((1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC}) \\ &= t(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) + (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \quad \text{--------(3) 이다.}\end{aligned}$$

t가 0과 1 사이를 움직일 때 점 R이 움직이는 자취는 t로 매개화된 곡선이다.

벡터 $\overrightarrow{OR}$ 을 $(f(t), g(t))$ 라고 하면 $\overrightarrow{OR} = (1-t)^2\overrightarrow{OA} + 2t(1-t)\overrightarrow{OC} + t^2\overrightarrow{OB}$ 이므로

점 R에서 속도벡터는
$$\begin{aligned}(f'(t), g'(t)) &= -2(1-t)\overrightarrow{OA} + 2(1-2t)\overrightarrow{OC} + 2t\overrightarrow{OB} \\ &= 2(t(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) + (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})) \\ &= 2\overrightarrow{PQ}\end{aligned}$$

이다. 그러므로 두 직선은 점 R을 지나고 같은 방향벡터를 가지므로 서로 일치한다.

$y=f(x)$가 주어져 있을 때, 방정식 $f(x)=0$이 세 개의 실근을 가짐을 중간값의 정리를 이용하여 보이고, 이 근들이 무리수임을 보일 수 있는지 측정하고자 하였고, 이 근들로 이루어진 수열의 합을 추론할 수 있는지 알아보고자 출제하였다. 또한, 곡선이 일차변환에 의해 옮겨지는 경우 구체적으로 찾을 수 있는지 확인하고자 하였다.

2. 채점기준

[2-1] 중간값의 정리를 이해하고 값의 대입이나 그래프를 통하여 세 근의 존재를 평가한다. 또한 귀류법을 통하여 각각의 근이 유리수가 아님을 보이는 것을 평가한다.

[2-2] 수열의 성질과 수열의 합의 공식을 이용하여 주어진 식을 수립하고 전개하는 것을 평가한다.

[2-3] 제시문 [나]의 내용을 이용하여 역행렬을 구하고 대입하고 정리해나가는 과정을 평가한다. 또한, 역행렬을 구하지 않고 식을 대입하여 결과값과 계수 비교를 함으로써 원하는 행렬을 구할 수도 있다.

[2-4] 일차변환을 차례대로 합성해 나가면서 함수가 변화된 곡선의 식을 정리해 나감으로써 일반화된 곡선식을 구해가는 과정을 평가한다. 행렬을 수학적 귀납법으로 증명하거나 점화식을 이용하여 풀 수도 있다.

3. 고등학교 교육과정과의 연계성

문제2는「수학 II」과정에 나오는 중간값의 정리를 활용하고,「기하와 벡터」에 나오는 일차변환의 정의를 소개함으로써 이를 응용한 문제를 풀 수 있도록 하였다.

제시문 [가]는 자연계열 학생들이 수강하는 <수학II> 과목 중 함수의 연속 단원에 해당하는 내용이다. 제시문 [나]는 자연계열 학생들이 수강하는 <기하와 벡터> 과목 중 행렬과 일차변환 단원에 해당하는 내용이다. 문제 [2-1]~[2-4]는 각각 중간값의 정리, 수열, 일차변환, 합성변환에 해당하는 내용을 묻고 있다.

Ⅲ. 제시문 분석 및 답안 사례

1. 제시문 분석

제시문 [가]는 중간값의 정리를 서술하고 있으며, 중간값의 정리는 주로 방정식의 해의 존재성을 보이는 데 사용된다. 제시문 [나]는 행렬의 일차변환에 대하여 설명하고 있으며, 행렬의 일차변환을 설명할 때 출발점이 되는 내용이다.

2. 답안 사례

문제 [2-1]에서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가짐을 보이는 것은 중간값의 정리를 이용하면 쉽게 보일 수 있다. 또한 각각의 근이 유리수가 아니라는 것은 중학교 교육과정에서 다룬 $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 증명하는 것과 유사한 방법으로 증명할 수 있다. 문제 [2-2]는 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 점 사이의 거리를 구하는 문제이다. 문제에 주어진 수열의 합 S_n을 구하기 위해서는 자연수의 거듭제곱의 합 공식에 대한 이해가 필요하다. 문제

[2-3]은 주어진 곡선이 일차변환에 의하여 어떤 곡선으로 옮겨지는 지를 묻는 문제이며, 문제 [2-4]는 [2-3]에서 얻은 일차변환을 반복해서 적용하는 합성변환에 대한 문제로 <수학I>에서 다루는 점화식에 대한 이해가 필요하다.

<문제2 답안 사례>

【2-1】 $f(-2)=-8+4+1/2<0,\ f(-1)=-1+2+1/2>0,\ f(0)=1/2>0,$
$f(1)=1-2+1/2<0,\ f(2)=8-4+1/2>0$
이므로 제시문 [나]에 의하여 세 개의 근 α, β, γ가 존재하며 $-2<\alpha<1, 0<\beta<1, 1<\gamma<2$임을 알 수 있다.
이제는 이 근들이 유리수가 아님을 보이자. 근 $x=a/b$ (단 a,b는 서로소인 정수)라고 두자.

그러면 $f(a/b)=(a/b)^3-2(a/b)+\frac{1}{2}=0$
$\Leftrightarrow 2a^3-4ab^2+b^3=0 \Leftrightarrow b^3=4ab^2-2a^3=2(2ab^2-a^3)$
마지막 식의 우변의 식 $2(2ab^2-a^3)$이 짝수이므로 좌변의 식 b^3도 짝수이어야 한다. 그러면 b도 짝수이어야 한다.
이제 $b=2k$라고 두면
$2a^3-16ak^2+8k^3=0 \Leftrightarrow a^3-8ak^2+4k^3=0 \Leftrightarrow a^3=8ak^2-4k^3=2(4ak^2-2k^3)$
마지막 식의 우변의 식 $2(4ak^2-2k^3)$이 짝수이므로 좌변의 식 a^3도 짝수이다. 따라서 a도 짝수이다. a,b가 모두 짝수인 것은 서로소라는 가정에 위배되므로, x는 유리수가 아니다.

【2-2】 $k=1$일 때 $a_1=(1-\alpha)(1-\beta)(\gamma-1)$ (왜냐하면 $\alpha,\beta<1, \gamma>1$). $k\ge 2$일 때,
$a_k=(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)$가 된다.
따라서

$$S_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)=-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+\sum_{k=2}^{n}(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)$$
$$=-2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+\sum_{k=1}^{n}(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)$$
$$=-2(1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma)+\sum_{k=1}^{n}(k^3-(\alpha+\beta+\gamma)k^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)k-\alpha\beta\gamma)$$
$$=-2(1-0-2+1/2)+\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-0+(-2)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}n$$
$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-n(n+1)+\frac{n}{2}+1$$
$$=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}-\frac{3}{4}n^2-\frac{n}{2}+1$$

【2-3】 M의 역행렬을 구해보면 $M^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (단, $D=ad-bc$)가 된다.

따라서 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} dx'-by' \\ -cx'+ay' \end{pmatrix}$,
즉 $x=\frac{1}{D}(dx'-by'),\ y=\frac{1}{D}(-cx'+ay')$

을 $y=x^3-2x+\frac{1}{2}$에 대입하면 $\frac{1}{D}(-cx'+ay')=\left(\frac{1}{D}(dx'-by')\right)^3-2\left(\frac{1}{D}(dx'-by')\right)+\frac{1}{2}$.

$y' = \frac{2}{27}(x')^3 + 1$에는 $(y')^3$이 없으므로, 위 식에서 $b=0$이어야 한다.
이를 이용하여 위 식을 간단히 정리하면
$y' = \frac{1}{D^2}\frac{1}{a}d^3(x')^3 + \frac{1}{a}(c-2d)x' + \frac{1}{2a}D$ (여기서 $a \neq 0$ 왜냐하면 $D \neq 0$).
$y' = \frac{2}{27}(x')^3 + 1$과 각각의 계수를 비교하면 $c = 2d$, $\frac{d}{2} = 1$, 즉 $d = 2, c = 4$가 된다.
또한 $\frac{2}{27} = \frac{1}{a^2d^2}\frac{1}{a}d^3 = \frac{d}{a^3}$, 즉 $a = 3$이 된다. 따라서 $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

【2-4】 $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$라고 할 때, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2x' \\ -4x' + 3y' \end{pmatrix}$ 즉 $x = \frac{1}{3}x'$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{2}y'$이 된다. 이 식을 연속해서 n번 적용하면 된다. 즉, 이 식을 한 번 적용했을 때 $(n=1)$, $y = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$이 $y = \frac{2}{27}(x)^3 + 1$로 된다(문제 [1-3]).
$n=2$인 경우를 구하기 위해, $y = \frac{2}{27}(x)^3 + 1$에 $x = \frac{1}{3}x'$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{2}y'$을 적용하면
$y' = \frac{2^2}{27^2}(x')^3 + 2(\frac{2}{3}x') + 2$이고 x', y'를 x, y로 변경하면 $y = \frac{2^2}{27^2}(x)^3 + 2(\frac{2}{3}x) + 2$가 된다.
$n=3$인 경우를 구하기 위해, $y = \frac{2^2}{27^2}(x)^3 + 2(\frac{2}{3}x) + 2$에 $x = \frac{1}{3}x'$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{2}y'$을 적용하면
$y = \frac{2^3}{27^3}(x)^3 + \left(2^2(\frac{2}{3}\frac{1}{3}) + 2(\frac{2}{3})\right)x + 2^2.$
$n=4$인 경우를 구하기 위해, 바로 위식에 다시 $x = \frac{1}{3}x'$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{2}y'$을 적용하면
$y = \frac{2^4}{27^4}(x)^3 + \left(2^3(\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}) + 2^2(\frac{2}{3}\frac{1}{3}) + 2(\frac{2}{3})\right)x + 2^3 = \frac{2^4}{27^4}(x)^3 + 2^2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right)x + 2^3$
$n=5$인 경우를 구하기 위해, 바로 위식에 다시 $x = \frac{1}{3}x'$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{2}y'$을 적용하면
$y = \frac{2^5}{27^5}(x)^3 + \left(2^4(\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}) + 2^3(\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}) + 2^2(\frac{2}{3}\frac{1}{3}) + 2(\frac{2}{3})\right)x + 2^4$
$= \frac{2^5}{27^5}(x)^3 + 2^2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4\right)x + 2^4$
따라서 이런 패턴을 임의의 n에 대하여 표현하면 다음의 곡선이 얻어진다.
$y = \left(\frac{2}{27}\right)^5 x^3 + 2^2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)x + 2^{n-1}$