

2015학년도 수시모집 논술전형 자연계열 논술고사

자연과학부

문제 1

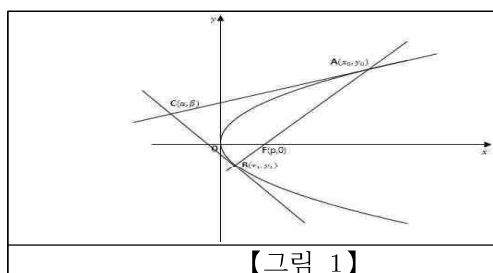
I. 문제

<문제 1>

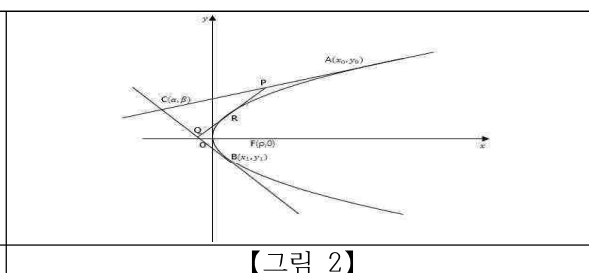
[가] 평면 위에 한 점 F 와 그 점을 지나지 않는 한 직선 l 이 있을 때, 점 F 와 직선 l 로부터의 거리가 각각 서로 같은 점의 집합을 포물선이라고 한다. 이 때 점 F 를 포물선의 초점, 직선 l 을 포물선의 준선이라고 한다.

점 $F(p,0)$ (단, $p > 0$)를 초점으로 하고 y 축에 평행한 직선 $x = -p$ 를 준선으로 하는 포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$ 이다. 임의의 음의 실수 α , 임의의 실수 β 에 대하여 좌표평면 위의 점 $C(\alpha, \beta)$ 를 지나면서 포물선 $y^2 = 4px$ 에 접하는 직선은 항상 두 개 존재한다. 이 두 직선이 포물선과 접하는 점을 각각 $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ (단, $y_0 > 0$ 이고 $y_1 < 0$)라고 하자(【그림 1】참고).

[나] 제시문 [가]에서 $0 < t < 1$ 인 실수 t 에 대하여 선분 AC 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점을 P , 선분 BC 를 $(1-t):t$ 로 내분하는 점을 Q , 선분 PQ 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점을 R 이라고 하자(【그림 2】참고).



【그림 1】



【그림 2】

【1-1】 제시문 [가]에서 두 접점의 y 좌표 y_0, y_1 을 α, β 에 관한 식으로 나타내시오.

【1-2】 제시문 [가]에서 점 $C(\alpha, \beta)$ 가 준선 위에 있으면 점 $A(x_0, y_0)$ 와 점 $B(x_1, y_1)$ 을 지나가는 직선은 초점 $F(p, 0)$ 를 지남을 보이시오.

【1-3】 제시문 [나]에서 점 R 의 좌표를 $t, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 를 이용하여 나타내시오(단, $\overrightarrow{OA} = (x_0, y_0), \overrightarrow{OB} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OC} = (\alpha, \beta)$).

【1-4】 제시문 [나]에서 점 R 은 포물선 $y^2 = 4px$ 위에 있고, 점 R 에서의 접선은 직선 PQ 임을 보이시오.

문제 2

I. 문제

<문제 2>

[가] (중간값의 정리) 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k 에 대하여 $f(c) = k$ 를 만족하는 c 가 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

[나] 좌표평면 위의 일차변환 $f: (x, y) \rightarrow (x', y')$ 는 아래와 같이

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

로 주어진다. 즉, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 이다. 이 때 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 를 f 를 나타내는 행렬이라고 한다. 자연수 n 에 대하여 f 를 n 번 합성한 함수를 f^n 이라고 나타낸다.

【2-1】 함수 $f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$ 이라고 하자. 제시문 [가]를 참고하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근 α, β, γ (단, $\alpha < \beta < \gamma$)를 가짐을 보이시오. 또한 각각의 근이 유리수가 아님을 보이시오.

【2-2】 점 $A(\alpha, 0), B(\beta, 0), C(\gamma, 0)$ 는 $y = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$ 위에 있다(단, $\alpha < \beta < \gamma$). 점 $P_n(n, 0)$ (n 은 자연수)에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_n = \overline{AP_n} \times \overline{BP_n} \times \overline{CP_n}$ 라고 하자. 이 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 를 구하시오.

【2-3】 행렬 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (단, $ad - bc \neq 0$)가 나타내는 일차변환 f 에 의하여 곡선 $y = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$ 이 $y = \frac{2}{27}x^3 + 1$ 로 옮겨진다고 하자. 이 때 행렬 M 을 구하시오.

【2-4】 자연수 n 에 대하여 문제 **【2-3】**에서 구한 일차변환 f 를 n 번 합성한 함수 f^n 에 의하여 $y = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$ 이 옮겨지는 곡선을 구하시오.

II. 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

삼차함수와 근과의 관계 및 중간값 정리의 이해도를 측정하기 위한 문제이다. 특정한 삼차 함수