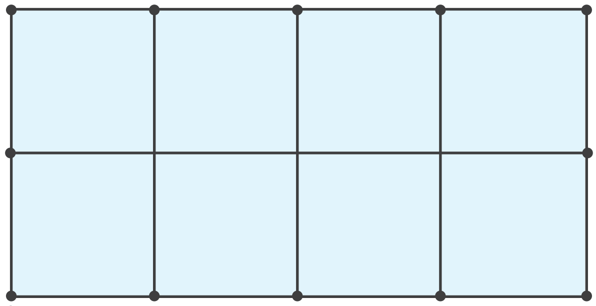
2 문항 해설

문제 1

자동차가 북쪽 경계에서 멈추는 경우는 아래 그림에서와 같이 $C1$, $C2$에서 멈추는 두 가지의 경우 밖에 없다.



(i) $C1$에서 멈추는 경우

다음 수가 적힌 공이 차례로 나오면 자동차는 $C1$에서 멈추고 시행을 종료한다.

$(1,1)$, $(1,3)$, $(1,5)$, (3), (5)

따라서 이 경우의 확률은

$$3\times\left(\frac{1}{9}\right)^2+2\times\frac{1}{9}=\frac{7}{27}$$

(ii) $C2$에서 멈추는 경우

다음 수가 적힌 공이 차례로 나오면 자동차는 $C2$에서 멈추고 시행을 종료한다.

$(1,2,1)$, $(1,2,3)$, $(1,2,5)$, $(2,1,1)$, $(2,1,3)$, $(2,1,5)$, $(2,3)$, $(2,5)$

따라서 이 경우의 확률은

$$6\times\frac{2}{9}\times\left(\frac{1}{9}\right)^2+2\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{16}{243}$$

(i), (ii)에 의하여 자동차가 북쪽 경계에 도달하여 시행을 종료하였을 확률은

$$\frac{7}{27}+\frac{16}{243}=\frac{79}{243}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

위의 시행을 두 번 하였을 때 자동차가 북쪽 경계에 도달하여 멈추는 경우는 다음 수가 적힌 공이 차례로 나온 경우이다.

$(1,1)$, $(1,3)$, $(1,5)$, $(2,3)$, $(2,5)$

따라서 이 경우의 확률은

$$3\times\left(\frac{1}{9}\right)^2+2\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{7}{81}\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡으로부터 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{7}{81}}{\frac{79}{243}}=\dfrac{21}{79}$

문제 2

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[n,\ n+2k]$에서 연속이고 열린구간 $(n,\ n+2k)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$0 < c_k < 2k$인 어떤 c_k에 대하여 $\dfrac{f(n+2k)-f(n)}{n+2k-n} = f'(n+c_k)$이다.

한편 $f'(x) = \dfrac{x^{2025}+x^{2024}+1}{x^{2025}+x^{1885}+1}$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} f'(n+c_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+c_k)^{2025}+(n+c_k)^{2024}+1}{(n+c_k)^{2025}+(n+c_k)^{1885}+1} = 1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{10}\frac{f(n+2k)-f(n)}{(k-1)k(k+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{10}\frac{2f'(n+c_k)}{(k-1)(k+1)} = \sum_{k=2}^{10}\lim_{n\to\infty}\frac{2f'(n+c_k)}{(k-1)(k+1)} = \sum_{k=2}^{10}\frac{2}{(k-1)(k+1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11} = \frac{72}{55}$$

문제 3-1

$2025 = 3^4 \times 5^2$이므로 다음과 같이 나누어 생각한다.

(i) n이 2025와 서로소인 경우

n이 2025와 서로소이면 $f(n) = f(n^2)$을 만족시킨다.

2025이하의 자연수 중 3의 배수의 개수는 675, 5의 배수의 개수는 405, 15의 배수의 개수는 135이므로

3의 배수 또는 5의 배수인 자연수의 개수는

$675 + 405 - 135 = 945$

그러므로 (i)의 경우의 수는 $2025 - 945 = 1080$

(ii) n이 2025와 서로소가 아닌 경우

n이 2025와 서로소가 아니면 다음 경우가 $f(n) = f(n^2)$을 만족시킨다.

① n이 3^4의 배수이지만 5의 배수가 아닌 경우

$2025 = 3^4 \times 25$이고 , $1\times 3^4,\ 2\times 3^4,\ \cdots.\ 25\times 3^4$ 중 5의 배수가 아닌 수의 개수는 $25-5=20$

② n이 5^2의 배수이지만 3의 배수가 아닌 경우

$2025 = 5^2 \times 81$이고 $1\times 5^2,\ 2\times 5^2,\ \cdots.\ 81\times 5^2$ 중 3의 배수가 아닌 수의 개수는 $81-27=54$

③ n이 3^4의 배수면서 5^2의 배수인 경우

$n = 2025$이므로 개수는 1

그러므로 (ii)의 경우의 수는 $20+54+1=75$

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는 $1080+75=1155$

문제 3-2

$f(n) \leq 2025$이므로 다음과 같이 나누어 생각한다.

(i) n이 2025의 약수인 경우

n이 2025의 약수이면 $f(n)=\dfrac{2025}{n}$, $f(f(n))=f\left(\dfrac{2025}{n}\right)=n$

이므로 $f(f(n))<n$을 만족시키지 못한다.

(ii) n이 2025의 약수가 아닌 경우

$n=m\times 3^k\times 5^l$이라 하자.

(단, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ l=0,\ 1,\ 2$이고 m은 15와 서로소인 2 이상인 자연수)

$$f(n)=3^{4-k}\times 5^{2-l},\ f(f(n))=f(3^{4-k}\times 5^{2-l})=3^k\times 5^l=\frac{n}{m}<n$$

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는 $2025-(2025\text{의 약수의 개수})=2025-15=2010$

문제 4

$c_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}dx-\frac{1}{(n+1)^\alpha}$이라고 하면 $c_n=\begin{cases} a_n & (\alpha=1) \\ b_n & (\alpha\neq 1)\end{cases}$ 이 성립한다. 먼저 다음 부등식이 성립함을 보이자.

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{(n+2)^\alpha}\right\}\leq c_n\leq\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right\}$$

$f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$라고 하자. 이때 구간 $(0,\infty)$에서 함수 f는 감소하고, 아래로 볼록하다.

세 점 $(n+1, f(n+1))$, $(n+1, f(n+2))$, $(n+2, f(n+2))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}-\dfrac{1}{(n+2)^\alpha}\right\}$이다. 평균값 정리에 의하여 $0<\theta<1$인 어떤 θ에 대하여 다음이 성립한다.

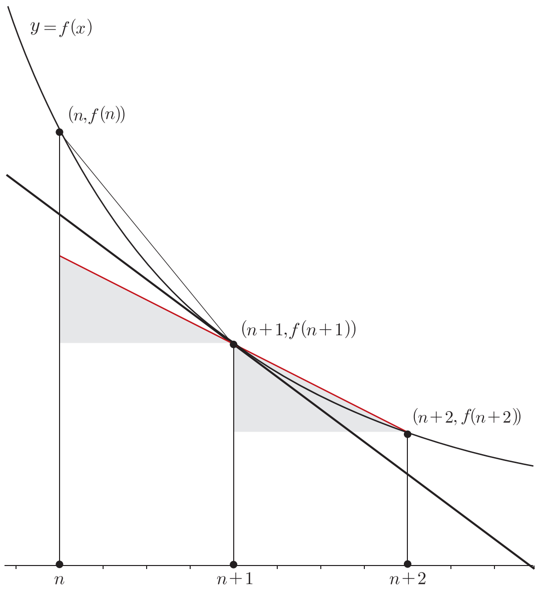
$$\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{(n+2)^\alpha}=\frac{(n+2)^\alpha-(n+1)^\alpha}{(n+1)^\alpha(n+2)^\alpha}=\frac{\alpha(n+1+\theta)^{\alpha-1}}{(n+1)^\alpha(n+2)^\alpha}\leq\frac{\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}}$$

즉, $\dfrac{1}{(n+2)^\alpha}-\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}\geq-\dfrac{\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}}=f'(n+1)$ 이므로

$\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}-\dfrac{1}{(n+2)^\alpha}\right\}\leq c_n$이다. (아래 그림 참고.)

한편 c_n은 세 점 $(n, f(n))$, $(n, f(n+1))$, $(n+1, f(n+1))$이 이루는 삼각형의 넓이보다 작다.

따라서 다음 부등식을 얻는다. $\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}-\dfrac{1}{(n+2)^\alpha}\right\}\leq c_n\leq\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n^\alpha}-\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}\right\}$



문제 4-1

$\alpha=1$이면

$\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq a_n \leq \dfrac{1}{2n(n+1)}$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{n(3n+1)^3}{4(n+1)^2(n+2)^2} \leq n(3n+1)^3 {a_n}^2 \leq \frac{n(3n+1)^3}{4n^2(n+1)^2}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty} n(3n+1)^3 {a_n}^2 = \frac{27}{4}$$

문제 4-2

평균값 정리에 의하여 $0<\theta<1$인 어떤 θ에 대하여 다음이 성립한다.

$\dfrac{1}{(n+1)^\alpha} - \dfrac{1}{(n+2)^\alpha} = \dfrac{\alpha(n+1+\theta)^{\alpha-1}}{(n+1)^\alpha(n+2)^\alpha} \geq \dfrac{\alpha}{(n+2)^{\alpha+1}}$ 같은 방식으로 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

따라서

$\dfrac{\alpha}{2} \dfrac{n^{p-(\alpha+1)}}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\alpha+1}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\alpha n^p}{(n+2)^{\alpha+1}} \leq n^p b_n \leq \dfrac{1}{2} \dfrac{\alpha n^p}{n^{\alpha+1}} = \dfrac{\alpha}{2} n^{p-(\alpha+1)}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

수열 $\{n^p b_n\}$의 극한이 0이 아니기 위해서는 $p=\alpha+1$이어야 하고 이때의 극한값은 $L=\dfrac{\alpha}{2}$이다.

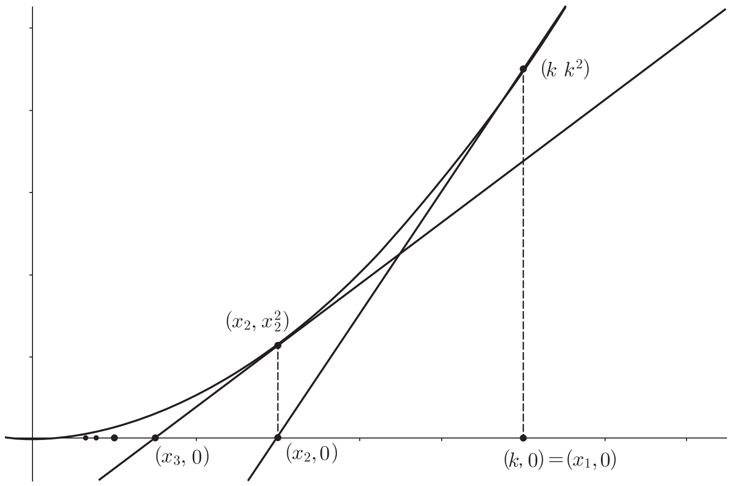
그러므로 $p+L=\dfrac{3\alpha}{2}+1$이다.

문제 5-1

$f(x)=x^2$이라 하자. $(x_n,\ x_n{}^2)$에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선의 방정식은 $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$이다.

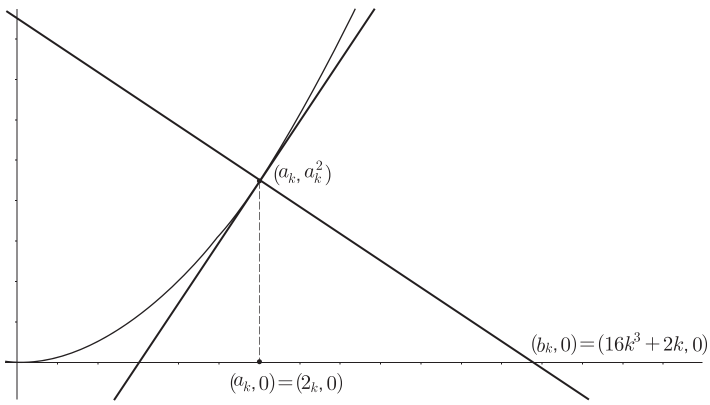
$f'(x)=2x$이므로 $x_{n+1}=-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}+x_n$에서 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n$이다. 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 k이고

공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로 $a_k=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}k\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{k}{1-\frac{1}{2}}=2k$이다. 따라서 $a_{2025}=4050$



문제 5-2

주어진 l에 수직인 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{4k}(x-2k)+4k^2$이므로 $b_k=16k^3+2k$이다.



$$c_m=\left(\frac{a_1{}^3}{b_m-a_m}+1\right)^{\frac{a_1{}^2}{m^3}}\times\left(\frac{a_2{}^3}{b_m-a_m}+1\right)^{\frac{a_2{}^2}{m^3}}\times\cdots\times\left(\frac{a_m{}^3}{b_m-a_m}+1\right)^{\frac{a_m{}^2}{m^3}}$$ 이라 하자.

$b_m-a_m=16m^3$이므로

$$c_m=\left(\frac{1^3}{2\times m^3}+1\right)^{\frac{4\times1^2}{m^3}}\times\left(\frac{2^3}{2\times m^3}+1\right)^{\frac{4\times2^2}{m^3}}\times\left(\frac{3^3}{2\times m^3}+1\right)^{\frac{4\times3^2}{m^3}}\times\cdots\times\left(\frac{m^3}{2\times m^3}+1\right)^{\frac{4\times m^2}{m^3}}$$

$\lim_{m\to\infty} c_m = \alpha$라 하자.

$\ln c_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{4k^2}{m^3} ln\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^3 + 1\right\}$이므로

$\lim_{m\to\infty} \ln c_m$

$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{4k^2}{m^3} ln\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^3 + 1\right\}$

$= \int_0^1 4x^2 \ln\left(\frac{x^3}{2}+1\right)dx = 4\ln\frac{3}{2} - \frac{4}{3}$

$\ln\alpha = 4\ln\frac{3}{2} - \frac{4}{3}$이므로 $\alpha = e^{4\ln\frac{3}{2}-\frac{4}{3}} = \frac{81}{16}e^{-\frac{4}{3}}$

문제 6-1

P가 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때 Q가 나타내는 도형을 생각해보자.

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$라고 하면 직선 AP의 방정식은 $y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta+2}(x+2)$이다.

두 조건 (Ⅰ), (Ⅱ)에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$는 방향이 같은 벡터이므로 점 Q의 x좌표를 $t(t \geq -2)$라 하면

$\mathrm{Q}\left(t,\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta+2}(t+2)\right)$에 대하여 다음을 구할 수 있다.

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \sqrt{(\cos\theta+2)^2+(\sin\theta)^2},$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| = \sqrt{(t+2)^2+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+2}\right)^2(t+2)^2} = (t+2)\times\frac{\sqrt{(\cos\theta+2)^2+(\sin\theta)^2}}{\cos\theta+2}$$

조건 (Ⅱ)에서 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (t+2)\times\frac{(\cos\theta+2)^2+(\sin\theta)^2}{\cos\theta+2} = 9$이고

$t = \frac{9(\cos\theta+2)}{(\cos\theta+2)^2+(\sin\theta)^2} - 2 = \frac{8+\cos\theta}{5+4\cos\theta}$이므로

$\mathrm{Q}\left(\frac{8+\cos\theta}{5+4\cos\theta},\ \frac{9\sin\theta}{5+4\cos\theta}\right)$이다.

점 Q의 좌표를 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$라고 하면 $X = \frac{8+\cos\theta}{5+4\cos\theta},\quad Y = \frac{9\sin\theta}{5+4\cos\theta}$이고

$\cos\theta = \frac{8-5X}{4X-1},\qquad \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{72X-63-9X^2}}{4X-1}$

$Y = \frac{9\sin\theta}{5+4\cos\theta} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{72X-63-9X^2}$이므로 $(X-4)^2 + Y^2 = 9$이다.

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 식은 $(x-4)^2 + y^2 = 9$이다.

문제 6-2

(i) 점 P가 호 $\mathrm{R_1OR_2}$ 위의 점인 경우

$-\dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$인 θ에 대하여 $\mathrm{P}(\cos\theta-1,\ \sin\theta)$라고 하면 [문제 6–1]의 풀이와 같이 $\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\times(t+2)\right)$에 대해 주어진 조건 (Ⅱ)를 이용하여 다음을 얻는다.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\sqrt{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta}\times(t+2)\times\frac{\sqrt{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta}}{\cos\theta+1}=2(t+2)=9$$

$t=\dfrac{5}{2}$이므로 원 $C_3: (x-4)^2+y^2=9$와 직선 $x=\dfrac{5}{2}$의 두 교점을 M, N이라 할 때,

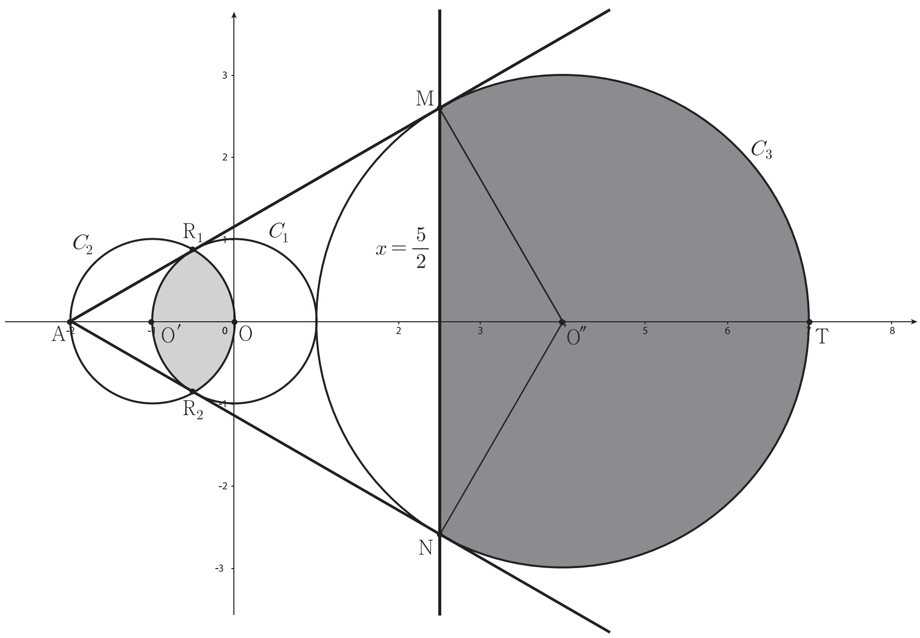
점 Q가 나타내는 도형은 선분 MN이다.

(ii) 점 P가 호 $\mathrm{R_1O'R_2}$ 위의 점인 경우

[문제 6–1]의 풀이와 같이 생각하면 점 $\mathrm{T}(7,\ 0)$에 대하여 [문제 6–2]의 조건을 만족하는 점 Q가 나타내는 도형은 중심각의 크기가 $\dfrac{4}{3}\pi$이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴의 호 MTN이다.

(i), (ii)에 의하여 점 Q가 나타내는 도형은 선분 MN과 호 MTN으로 이루어진 도형이다.

점 M, N을 구하면 $\mathrm{M}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathrm{N}\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$이 된다. 따라서 점 Q가 이루는 도형의 길이는 선분 MN의 길이와 호 MTN의 길이의 합이므로 $2\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+3\times\dfrac{4}{3}\pi=3\sqrt{3}+4\pi$이다.



2 문항 해설

문제 1-1

$$\int_1^e \{m-n(\ln x)^2\}dx = m(e-1)-n\int_1^e (\ln x)^2 dx$$
$$= m(e-1)-n\left[x(\ln x)^2\right]_1^e + 2n\int_1^e \ln x\, dx$$
$$= m(e-1)-n(e-2)$$

이고, 30 이하의 두 자연수 $m,\ n$의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수가 $30\times 29=870$이므로 $\mathrm{E}(X)$는

두 자연수 $m,\ n$의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$에 대응하는 $m(e-1)-n(e-2)$의 값을 모두 더한 뒤 870으로 나눈 값과 같다.

따라서 $\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{870}\left\{(e-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{30}29k-(e-2)\sum_{k=1}^{30}29k\right\}=\dfrac{1}{870}\times\displaystyle\sum_{k=1}^{30}29k=\dfrac{31}{2}$

(30 이하의 두 자연수 $m,\ n$의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 870이고, m과 n이 취할 수 있는 값은 30 이하의 자연수 30개이므로 m의 자리에 30 이하의 각 자연수는 $870\div 30=29$번씩 사용되었고, n 또한 마찬가지이다.)

문제 1-2

m과 n은 서로 다른 30 이하의 자연수이므로 $\dfrac{30!}{mn}$은 자연수이다. $\dfrac{30!}{mn}$을 소인수분해하면

$\dfrac{30!}{mn}=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$(단, k는 자연수이고, k 이하의 자연수 i에 대하여 p_i는 소수이며, i와 다른 k 이하의 자연수 j에 대하여 $p_i\neq p_j$이고 a_i는 자연수)라 하자.

자연수 순서쌍들로 이루어진 두 집합 $A,\ B$를 각각

$A=\left\{(x,\ y,\ z)\ \middle|\ x>y>z\text{이고 } xyz=\dfrac{30!}{mn}\text{이며 } x\text{와 } y,\ y\text{와 } z,\ z\text{와 } x\text{는 각각 서로소}\right\}$

$B=\left\{(x,\ y,\ z)\ \middle|\ xyz=\dfrac{30!}{mn}\text{이며 } x\text{와 } y,\ y\text{와 } z,\ z\text{와 } x\text{는 각각 서로소}\right\}$ 라 하면

$(x,\ y,\ z)\in B$이고 p_i가 x의 약수인 경우, x와 $y,\ z$와 x는 각각 서로소이므로 p_i는 나머지 두 수 $y,\ z$의 약수가 될 수 없으므로 $p_i^{a_i}$는 x의 약수가 된다.

따라서 k 이하의 각 자연수 i에 대하여 $p_i^{a_i}$는 세 수 $x,\ y,\ z$ 중 단 하나의 수의 약수가 되므로 $n(B)=3^k$이다.

한편, $B'=B-\left\{\left(1,\ 1,\ \dfrac{30!}{mn}\right),\ \left(1,\ \dfrac{30!}{mn},\ 1\right),\ \left(\dfrac{30!}{mn},\ 1,\ 1\right)\right\}$이라 하면 $(a,\ b,\ c)\in B'$일 때

$a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a$이고 집합 A의 각 원소 $(x,\ y,\ z)$에 대하여 세 수 $x,\ y,\ z$를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$이므로

$n(A)=\dfrac{n(B')}{3!}=\dfrac{n(B)-3}{6}=\dfrac{3^k-3}{6}$ (단, k는 $\dfrac{30!}{mn}$의 서로 다른 소인수의 개수)……(*)

30!을 소인수분해하면

$30! = 2^{26}\times3^{14}\times5^{7}\times7^{4}\times11^{2}\times13^{2}\times17\times19\times23\times29$이므로

30!의 서로 다른 소인수의 개수는 10개다. 따라서 위의 (*)에 의하여

① $\dfrac{30!}{mn}$의 서로 다른 소인수의 개수가 8개일 확률은 $\dfrac{4\times3}{30\times29}=\dfrac{6}{435}$

② $\dfrac{30!}{mn}$의 서로 다른 소인수의 개수가 9개일 확률은 $\dfrac{2\times4\times26+2\times2}{30\times29}=\dfrac{106}{435}$

③ $\dfrac{30!}{mn}$의 서로 다른 소인수의 개수가 10개일 확률은 $1-\dfrac{6}{435}-\dfrac{106}{435}=\dfrac{323}{435}$

①, ②, ③에 의하여 $\mathrm{P}\left(Y=\dfrac{3^8-3}{6}\right)=\dfrac{6}{435}$, $\mathrm{P}\left(Y=\dfrac{3^9-3}{6}\right)=\dfrac{106}{435}$, $\mathrm{P}\left(Y=\dfrac{3^{10}-3}{6}\right)=\dfrac{323}{435}$이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{2Y+1}{3^7}=1\right)=\dfrac{6}{435}$, $\mathrm{P}\left(\dfrac{2Y+1}{3^7}=3\right)=\dfrac{106}{435}$, $\mathrm{P}\left(\dfrac{2Y+1}{3^7}=3^2\right)=\dfrac{323}{435}$

따라서 $\mathrm{E}\left(\dfrac{2Y+1}{2187}\right)=\dfrac{1\times6+3\times106+3^2\times323}{435}=\dfrac{3231}{435}=\dfrac{1077}{145}$

문제 2-1

P를 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선은 $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$이며

점 A의 x좌표는 $-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}+\alpha$, 점 B의 y좌표는 $-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$에서 $X=-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $Y=-\alpha f'(\alpha)$이며 $XY=\alpha f(\alpha)$이다.

$f(x)=\sqrt{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}$이므로 $F(x)=xf(x)=x\sqrt{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}=bx\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$라 하면

$$F'(x)=\frac{b}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{2x^2}{a^2}\right)$$

따라서 $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$일 때, $F'(x)=0$이고 이때 $F(x)$가 최댓값을 갖는다.

따라서 XY는 최댓값 $F\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{ab}{2}$를 갖는다.

문제 2-2

$\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$에서의 접선은 $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$이며

점 A의 x좌표는 $-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}+\alpha$, 점 B의 y좌표는 $-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$이다.

따라서 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$에서 $X=-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $Y=-\alpha f'(\alpha)$이고

$XY=\alpha f(\alpha)$는 α의 값과 무관하게 상수 c가 되는데, $XY=1\times f(1)=3$이므로 $c=3$이다.

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{x}\,(x>0)$

$h(x)=\{f(x)\}^2+\dfrac{1}{f(x)}$로 놓으면, $h(x)=\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{x}{3}$, $h'(x)=\dfrac{x^3-54}{3x^3}$이고,

$h(x)$는 $x=\sqrt[3]{54}$에서 최솟값을 가지므로 $k=\sqrt[3]{54}$이다.

문제 3-1

$\overrightarrow{OP}=(t,\ 4-2t)$, $\overrightarrow{OP'}=(1,\ -2)$

$a=2$이므로 조건 (Ⅰ)에서 $\overrightarrow{PQ}=-2\overrightarrow{OP}=(-2t,\ 4t-8)$

조건 (Ⅱ)에서 $\overrightarrow{PR}=\alpha(2,\ 1)$ (α는 실수)이므로 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=-8\alpha>0$이므로 $\alpha<0$이다.

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PR}|$이므로 $2\sqrt{5t^2-16t+16}=-\alpha\sqrt{5}$에서 $\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5t^2-16t+16}$

조건 (Ⅲ)에서 $\overrightarrow{PS}=-5\overrightarrow{PR}=-5\alpha(2,\ 1)$

따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PS}=-20\alpha$, $(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PS})^2=320(5t^2-16t+16)$이므로

$\displaystyle\int_0^2(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PS})^2dt=320\int_0^2(5t^2-16t+16)\,dt=\frac{12800}{3}$이다.

문제 3-2

$\overrightarrow{OP}=(2\cos t,\ \sin t)$, $\overrightarrow{OP'}=(-2\sin t,\ \cos t)$, $\overrightarrow{OT}=(0,\ 1)$

$a=5$이므로 조건 (Ⅰ)에서 $\overrightarrow{PQ}=-5\overrightarrow{OP}=(-10\cos t,\ -5\sin t)$

조건 (Ⅱ)에서 $\overrightarrow{PR}=\alpha(\cos t,\ 2\sin t)$($\alpha$는 실수)이므로 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=-10\alpha>0$이므로 $\alpha<0$이다.

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PR}|$이므로 $5\sqrt{4\cos^2t+\sin^2t}=-\alpha\sqrt{\cos^2t+4\sin^2t}$에서 $\alpha=-5\sqrt{\dfrac{4-3\sin^2t}{1+3\sin^2t}}$

따라서 $\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{PR}=\alpha(0,\ 1)\cdot(\cos t,\ 2\sin t)=2\alpha\sin t$, $(\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{PR})^2=4\alpha^2\sin^2t=100\times\dfrac{4\sin^2t-3\sin^4t}{1+3\sin^2t}$

$\sin^2t=s\ (0\le s\le 1)$, $h(s)=\dfrac{4s-3s^2}{1+3s}$이라 하면 $h'(s)=-\dfrac{9s^2+6s-4}{(3s+1)^2}$이므로

$h(s)$는 $s=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{3}$에서 최댓값을 갖고, $h\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{3}\right)=\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{3}=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{3}$이다.

따라서 $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $(\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{PR})^2$의 최댓값은 $\dfrac{200}{3}(3-\sqrt{5})$이다.

문제 3-3

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(f(t),\ g(t)),\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}'=(f'(t),\ g'(t))$이고 $g(t)=\dfrac{1}{f(t)},\ g'(t)=-\dfrac{f'(t)}{\{f(t)\}^2}$

$a>2$이므로 조건 (Ⅰ)에서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-a\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-af(t),\ -ag(t))$

조건 (Ⅱ)에서 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\alpha(g'(t),\ -f'(t))$ (α는 실수)

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=a\alpha\{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)\}=2a\alpha\dfrac{f'(t)}{f(t)}>0$이므로 $\alpha>0$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$이므로 $a\sqrt{\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2}=\alpha\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$에서

$$\alpha=a\sqrt{\frac{\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2}{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}}=a\sqrt{\frac{\{f(t)\}^2\left(1+\dfrac{1}{\{f(t)\}^4}\right)}{\{f'(t)\}^2\left(1+\dfrac{1}{\{f(t)\}^4}\right)}}=a\frac{f(t)}{f'(t)}$$

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+\alpha\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}\\&=\{f(t)\}^2+\frac{1}{\{f(t)\}^2}-2\alpha\frac{f'(t)}{f(t)}\\&=\{f(t)\}^2+\frac{1}{\{f(t)\}^2}-2a\\&>\{f(t)\}^2-2a>a^2-2a>0\quad(\because\ f(t)>a>2)\end{aligned}$$

이므로 모든 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}>0$이다.

논술전형

면접전형

2025학년도 대입선발결과