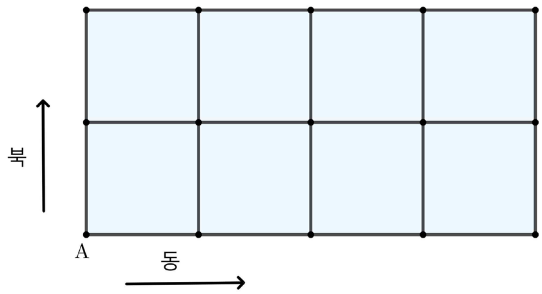
2025학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열(수학)

모집단위		수험번호		성명	

[문제 1, 단답형] 아래 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망과 하나의 주머니가 있다. 도로망의 A 지점에 자동차가 있고, 주머니에는 숫자 $1,\ 3,\ 5$가 적힌 공이 각각 1개씩, 숫자 $2,\ 4,\ 6$이 적힌 공이 각각 2개씩 들어있다. 아래 도로망과 이 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.



주머니에서 공을 꺼내서 공에 적혀있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이때, 확인한 수가 홀수이면 북쪽으로, 짝수이면 동쪽으로 자동차를 나온 수만큼 이동시킨다.

위의 시행을 반복하다가 자동차가 동쪽이나 북쪽 경계에 처음으로 도달할 경우, 그곳에서 자동차를 멈추고 시행을 종료한다. 예를 들어, 처음 시행에서 3이 적힌 공을 꺼낸 경우, 북쪽으로 2칸만 이동시킨 후 북쪽 경계에서 자동차를 멈추고 시행을 종료한다. 자동차가 북쪽 경계에 도달하여 시행을 종료하였을 때, 두 번째 시행에서 종료하였을 확률을 구하시오. **[10점]**

[문제 2, 단답형] $x \geq 1$인 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=\int_1^x \frac{t^{2025}+t^{2024}+1}{t^{2025}+t^{1885}+1}dt$라 할 때, 다음 극한값을 구하시오. **[10점]**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{10}\frac{f(n+2k)-f(n)}{(k-1)k(k+1)}$$

[문제 3, 단답형] 자연수 n에 대하여 nk가 2025의 배수가 되도록 하는 자연수 k 중에서 가장 작은 수를 $f(n)$이라 하자. 함수 $f(n)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1] $f(n)=f(n^2)$이 되도록 하는 2025 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. **[8점]**

[문제 3-2] $f(f(n))<n$이 되도록 하는 2025 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. **[7점]**

[문제 4, 단답형] 2 이상의 자연수 α에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 다음과 같다.

$$a_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\frac{1}{n+1},\qquad b_n=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}$$

다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] 다음 수열의 극한값을 구하시오. **[5점]**

$$\left\{n(3n+1)^3 a_n^{\ 2}\right\}$$

[문제 4-2] $\lim_{n\to\infty} n^p b_n = L\ (L\neq 0)$일 때, $p+L$을 α에 관한 식으로 나타내시오. **[10점]**

[문제 5, 서술형] 수열 $\{x_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오.

> (Ⅰ) $x_1 = k$(단, k는 자연수)
>
> (Ⅱ) 모든 자연수 n에 대하여 x_{n+1}은 곡선 $y = x^2$ 위의 점 $(x_n,\ {x_n}^2)$에서의 접선의 x절편이다.

[문제 5-1] $a_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$이라고 할 때, a_{2025}의 값을 구하시오. **[5점]**

[문제 5-2] [문제 5-1] 에서 주어진 a_k에 대하여 곡선 $y = x^2$ 위의 점 $(a_k,\ {a_k}^2)$에서의 접선을 l이라 하자. 점 $(a_k,\ {a_k}^2)$을 지나고 직선 l에 수직인 직선의 x절편을 b_k라고 할 때, 다음 극한값을 구하시오. **[15점]**

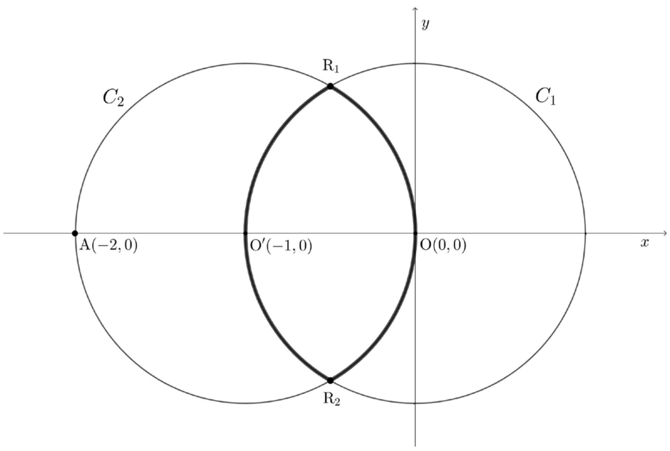
$$\lim_{m\to\infty}\left\{\left(\frac{{a_1}^3}{b_m - a_m}+1\right)^{\frac{{a_1}^2}{m^3}} \times \left(\frac{{a_2}^3}{b_m - a_m}+1\right)^{\frac{{a_2}^2}{m^3}} \times \cdots \times \left(\frac{{a_m}^3}{b_m - a_m}+1\right)^{\frac{{a_m}^2}{m^3}}\right\}$$

[문제 6, 서술형] 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(-2,0)$에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오.

> (Ⅰ) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$는 서로 평행하다.
>
> (Ⅱ) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 9$

[문제 6-1] 점 P가 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직이는 점일 때, 점 Q가 나타내는 도형의 식을 구하시오. **[15점]**

[문제 6-2] 아래 그림과 같이 두 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$, $C_2 : (x+1)^2 + y^2 = 1$의 서로 다른 두 교점을 R_1, R_2라 하자. 원 C_1에서 점 $\mathrm{O}'(-1,\ 0)$을 포함하는 호 $\mathrm{R}_1\mathrm{O}'\mathrm{R}_2$와 원 C_2에서 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$을 포함하는 호 $\mathrm{R}_1\mathrm{O}\mathrm{R}_2$로 이루어진 도형을 R (아래 그림에서 굵게 표시된 도형)이라 하자. 점 P가 도형 R 위를 움직이는 점일 때, 점 Q가 나타내는 도형의 길이를 구하시오. **[15점]**



2025학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열(수학)

모집단위		수험번호		성명	

[문제 1] 1부터 30까지의 자연수가 하나씩 적힌 30장의 카드가 들어 있는 주머니가 하나 있다. 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후, 꺼낸 카드를 넣지 않고 주머니에서 다시 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한다. 첫 번째로 꺼낸 카드에 적힌 수를 m, 두 번째로 꺼낸 카드에 적힌 수를 n이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] 확률변수 $X=\int_1^e \{m-n(\ln x)^2\}dx$에 대하여 $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하시오. **[10점]**

[문제 1-2] 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 확률변수 Y라 할 때, $\mathrm{E}\left(\dfrac{2Y+1}{3^7}\right)$의 값을 구하시오. **[20점]**

(Ⅰ) $xyz=\dfrac{30!}{mn}$
(Ⅱ) $x>y>z$
(Ⅲ) x와 y, y와 z, z와 x는 각각 서로소이다.

[문제 2] 아래의 **[문제 2-1]**, **[문제 2-2]**에서 주어진 함수 $f(x)$는 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하고 $f'(x)\neq 0$이다. 이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 점 Q의 x좌표, y좌표를 각각 X, Y라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, O는 원점이다.)

[문제 2-1] 두 양수 a, b에 대하여 $f(x)=\sqrt{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}\ (0<x<a)$일 때, XY의 최댓값을 구하시오. **[15점]**

[문제 2-2] 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다. (단, 구간 $(0, \infty)$에서 $f(x)>0$이다.)

(Ⅰ) $f(1)=3$
(Ⅱ) 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 P에 대하여 $XY=c$ (c는 상수)이다.

함수 $\{f(x)\}^2+\dfrac{1}{f(x)}$이 $x=k$에서 최솟값을 가질 때, 실수 k의 값을 구하시오. **[15점]**

[문제 3] 아래의 **[문제 3-1]**, **[문제 3-2]**, **[문제 3-3]**에서 주어진 함수 $f(t)$, $g(t)$는 각각 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수이다. 실수 t에 대하여 점 P를 $\mathrm{P}(f(t), g(t))$, 점 P'을 $\mathrm{P}'(f'(t), g'(t))$라 할 때, 세 점 Q, R, S가 다음 조건을 만족시킨다. (단, O는 원점이다.)

(Ⅰ) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}<0$, $a\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert=\lvert\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\rvert$ (단, a는 1보다 큰 실수이다.)
(Ⅱ) $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}>0$, $\lvert\overrightarrow{\mathrm{PR}}\rvert=\lvert\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\rvert$
(Ⅲ) $\overrightarrow{\mathrm{PR}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{PS}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}}<0$, $b\lvert\overrightarrow{\mathrm{PR}}\rvert=\lvert\overrightarrow{\mathrm{PS}}\rvert$ (단, b는 양의 실수이다.)

다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1] $a=2$, $b=5$이고 $f(t)=t$, $g(t)=4-2t$일 때, $\int_0^2 (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}})^2\,dt$의 값을 구하시오. **[10점]**

[문제 3-2] $a=5$이고 $f(t)=2\cos t$, $g(t)=\sin t$일 때, 점 $\mathrm{T}(0, 1)$에 대하여 $0\le t\le \dfrac{\pi}{2}$에서 $(\overrightarrow{\mathrm{OT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2$의 최댓값을 구하시오. **[15점]**

[문제 3-3] $a>2$이고 모든 실수 t에 대하여 $f(t)g(t)=1$, $f(t)>a$, $f'(t)>0$일 때, 모든 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}>0$임을 보이시오. **[15점]**