문항카드 5. 논술전형 수학 오전 1번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열1(수학, 오전)/ 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	조합
예상 소요 시간	10분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1]
100명의 학생 중 k명을 선정하여, 두 명을 회장, 다른 다섯 명을 부회장, 나머지는 위원으로 임명하는 경우의 수가 최대가 되도록 하는 모든 k의 값을 구하시오. (단, $10 \le k \le 100$) **[10점]**

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는 「수학」 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 조합에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**수학** [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2018	251-254
	수학	홍성복 외	지학사	2018	267-270
	수학	황선욱 외	미래엔	2018	270-272

5. 문항 해설

이 경우의 수를 $f(k)$라 하면,

$$f(k) = {}_{100}\mathrm{C}_k \times {}_k\mathrm{C}_2 \times {}_{k-2}\mathrm{C}_5 = \frac{100!}{k!(100-k)!} \times \frac{k!}{2!(k-2)!} \times \frac{(k-2)!}{(k-7)!5!} = \frac{100!}{2!5!(100-k)!(k-7)!}$$

$f(k)$가 $k=n$에서 최대라면 $f(n+1) \le f(n)$ 과 $f(n-1) \le f(n)$을 만족한다.

$\dfrac{f(n)}{f(n+1)} \geq 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{n-6}{100-n} \geq 1 \;\Rightarrow\; n \geq 53$

$\dfrac{f(n-1)}{f(n)} \leq 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{n-7}{101-n} \leq 1 \;\Rightarrow\; n \leq 54$

$f(53)=f(54)$이므로 $f(k)$가 최대가 되도록 하는 모든 k의 값은 53과 54가 된다.

문항카드 6. 논술전형 수학 오전 2번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열1(수학, 오전)/ 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	사인함수, 코사인함수, 주기, 치환적분법
예상 소요 시간	20분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 다음 물음에 답하시오.

(가) $g(2020)=1$
(나) 임의의 실수 a, b에 대하여 $g(a+b)+g(a-b)=2g(a)\cos b\pi$이다.

[문제 2-1] $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dx$의 값을 구하시오. [8점]

[문제 2-2] $g\left(\frac{1}{3}\right)g\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{10}$일 때, $\left\{g\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [10점]

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는 「수학Ⅰ」, 「미적분」 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 사인함수, 코사인함수, 주기, 치환적분법에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**수학Ⅰ** [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **미적분** [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	황선욱 외	미래엔	2018	77-79
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2018	92-94
	미적분	김원경 외	비상	2019	135-136
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	148-149

5. 문항 해설

[문제 2-1] $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dx$의 값을 구하시오. **[8점]**

주어진 식에 $b=\frac{1}{2}$을 대입하면

$g\left(a+\frac{1}{2}\right)+g\left(a-\frac{1}{2}\right)=2g(a)\cos\frac{\pi}{2}=0$

$g\left(a+\frac{1}{2}\right)=-g\left(a-\frac{1}{2}\right)$

a에 $a+\frac{1}{2}$를 대입하면 $g(a+1)=-g(a)$

$g(a+2)=-g(a+1)=g(a)$

따라서 $g(0)=g(2)=\cdots=g(2020)=1$

주어진 식에 $a=0$, $b=x$를 대입하면 $g(x)+g(-x)=2g(0)\cos\pi x=2\cos\pi x$

위 식을 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 에서 적분하면,

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(-x)dx=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos\pi x\,dx=\frac{4}{\pi}$

$-x=t$로 치환적분법을 이용하면 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(-x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)dt$

따라서 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dx=\frac{2}{\pi}$가 된다.

[문제 2-2] $g\left(\frac{1}{3}\right)g\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{10}$일 때, $\left\{g\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. **[10점]**

$a=0$, $b=x$를 대입하면

$g(x)+g(-x)=2\cos\pi x$ --- ①

$a=x+\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$을 대입하면

$g(x+1)+g(x)=0$ --- ②

$a=\frac{1}{2}$, $b=x+\frac{1}{2}$을 대입하면

$g(x+1)+g(-x)=2g\left(\frac{1}{2}\right)\cos\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2g\left(\frac{1}{2}\right)\sin\pi x$ --- ③

①과 ②을 더한 식에 ③을 빼면

$g(x)=\cos\pi x+g\left(\frac{1}{2}\right)\sin\pi x$

x에 각각 $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$을 대입하면

$g\left(\frac{1}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+g\left(\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}g\left(\frac{1}{2}\right)$

$g\left(-\frac{1}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}g\left(\frac{1}{2}\right)$

$g\left(\frac{1}{3}\right)g\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\left\{g\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\frac{1}{10}$

따라서, $\left\{g\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\frac{1}{5}$ 이다.

문항카드 7. 논술전형 수학 오전 3번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열1(수학, 오전)/ 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	이차함수의 최대최소, 직선의 방정식, 평행이동
예상 소요 시간	20분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3]

함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 정수)에 대하여, 닫힌구간 $[2019, 2021]$에서 $|f(x)|$의 최댓값이 1이 되도록 하는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. [12점]

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는 「수학」 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 이차함수의 최대최소, 직선의 방정식, 평행이동에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**수학** [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	70-73, 121-125
	수학	고성은 외	좋은책신사고	2018	64-68, 118-128
	수학	권오남 외	교학사	2018	65-67, 116-126

5. 문항 해설

$ax^2+bx+c=a(x-2020)^2+(4040a+b)(x-2020)+a(2020)^2+b(2020)+c$
$b'=b+4040a$, $c'=c+2020b+4080400a$라 하자.
$t=x-2020$라 하고 $p(t)=at^2+b't+c'$ 이라 하면, 닫힌 구간 $[-1,1]$에서 $|p(t)|$의 최댓값이 1이다. 따라서, $-1\le p(-1)=a-b'+c'\le 1$, $-1\le p(1)=a+b'+c'\le 1$, $-1\le p(0)=c'\le 1$이어야 하므로 $-2\le 2a+2c'\le 2$, $-2\le 2b'\le 2$이다.
그러므로, $-2\le a\le 2$, $-1\le b'\le 1$, $-1\le c'\le 1$이 닫힌 구간 $[-1,1]$에서 $|p(t)|$의 최댓값이 1이기 위한 필요조건이다.
a, b', c'가 정수이므로, $a=-2,-1,0,1,2$, $b'=-1,0,1$, $c'=-1,0,1$이 가능한 모든 경우이다.
1. $a=-2$인 경우
$b'=-1$이면 $p(t)=-2t^2-t+c'$은 구간 $[-1,1]$에서 최댓값 $\frac{1}{8}+c'$와 최솟값 $-3+c'$를 가지므로 $|p(t)|$의 최댓값이 1일 수 없다. 마찬가지로 $b'=1$도 불가능하다.
$b'=0$이면 $p(t)=-2t^2+1$이 조건을 만족한다.
2. $a=-1$인 경우
$b'=-1$이면 $p(t)=-t^2-t+c'$는 구간 $[-1,1]$에서 최댓값 $\frac{1}{4}+c'$와 최솟값 $-2+c'$를 가지므로 $|p(t)|$의 최댓값이 1일 수 없다. 마찬가지로 $b'=1$도 불가능하다.
$b'=0$이면 $p(t)=-t^2+1$과 $p(t)=-t^2$이 조건을 만족한다.
3. $a=0$인 경우
$b'=-1$이면 $p(t)=-t$가 조건을 만족한다.
$b'=0$이면 $p(t)=-1$과 $p(t)=1$이 조건을 만족한다.
$b'=1$이면 $p(t)=t$가 조건을 만족한다.
4. $a=1$ 또는 $a=2$인 경우
1, 2의 경우와 마찬가지로, $p(t)=t^2-1$, $p(t)=2t^2-1$, $p(t)=t^2$이 각각 조건을 만족한다.
따라서 $p(t)=-2t^2+1$, $-t^2+1$, $-t^2$, $-t$, -1, 1, t, t^2-1, t^2, $2t^2-1$로 10개이고, 주어진 조건을 만족하는 함수 $f(x)$는 10개다.

문항카드 8. 논술전형 수학 오전 4번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열1(수학, 오전)/ 4번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	합의 법칙, 조건부확률
예상 소요 시간	40분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

2 이상의 자연수 n에 대하여, n을 소인수분해하여 거듭제곱을 사용하여 나타냈을 때, 모든 지수의 합을 $f(n)$, 모든 지수의 곱을 $g(n)$이라 하자. 예를 들어, $n=12=2^2\times3^1$ 이면 $f(12)=2+1=3$ 이고 $g(12)=2\times1=2$이다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] 2부터 20까지의 자연수 중에서 임의로 한 개의 수를 택하여 이를 n이라 할 때, n이 $f(n)=g(n)$을 만족시킬 확률을 구하시오. [5점]

[문제 4-2] 2부터 2021까지의 자연수 중에서 임의로 한 개의 수를 택하여 이를 n이라 하자. n이 $f(n)=g(n)$을 만족시킬 때, n이 소수일 확률을 구하시오. (단, 2021 이하의 자연수 중 소수의 개수는 306이다.) [15점]

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는 「수학」, 「확률과 통계」 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 합의 법칙, 조건부확률에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**수학** [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. **확률과 통계** [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2018	243-244
	수학	홍성복 외	지학사	2018	259-262
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	58-61
	확률과 통계	김원경 외	비상	2019	52-56

5. 문항 해설

[문제 4-1] 2부터 20까지의 자연수 중에서 임의로 한 개의 수를 택하여 이를 n이라 할 때, n이 $f(n)=g(n)$을 만족시킬 확률을 구하시오. [5점]

표로 작성하면 다음과 같다.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	1	1	2	1	2	1	3	2	2	1	3	1	2	2	4	1	3	1	3
$g(n)$	1	1	2	1	1	1	3	2	1	1	2	1	1	1	4	1	2	1	2

따라서 답은 $\frac{12}{19}$이다.

[문제 4-2] 2부터 2021까지의 자연수 중에서 임의로 한 개의 수를 택하여 이를 n이라 하자. n이 $f(n)=g(n)$을 만족시킬 때, n이 소수일 확률을 구하시오. (단, 2021 이하의 자연수 중 소수의 개수는 306이다.) [15점]

1. 소인수의 개수가 1일 때, 즉 n이 소수의 거듭제곱일 때, $f(n)=g(n)$은 항상 성립한다.
소수의 제곱이면서 2021 이하인 수는 2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2, 43^2으로 모두 14개다.
소수의 세제곱이면서 2021 이하인 수는 2^3, 3^3, 5^3, 7^3, 11^3으로 모두 5개다.
소수의 네제곱이면서 2021 이하인 수는 2^4, 3^4, 5^4으로 모두 3개다.
소수의 다섯제곱 또는 여섯제곱이면서 2021 이하인 수는 2와 3의 거듭제곱으로 $2+2=4$개다.
소수의 일곱제곱, 여덟제곱, 아홉제곱, 열제곱이면서 2021 이하인 수는 2의 거듭제곱으로 $1+1+1+1=4$개다.
따라서 $f(n)=g(n)$을 만족하는 n의 개수는 $14+5+3+4+4=30$이다.

2. 소인수의 개수가 2일 때, $f(n)=g(n)$이 성립하려면, $n=p_1^{n_1}p_2^{n_2}(p_1<p_2)$일 때 $n_1+n_2=n_1n_2$을 만족하여야 한다. 따라서, $n_1=n_2=2$이다.
따라서 $n=p_1^2p_2^2$의 형태로 서로 다른 소수의 곱의 제곱수이다.
$p_1p_2 \le \sqrt{2021} < 45$이어야 하므로 $p_1=2,3,5$이다. (p_1,p_2)의 순서쌍을 구하면
$(2,3)$, $(2,5)$, $(2,7)$, $(2,11)$, $(2,13)$, $(2,17)$, $(2,19)$, $(3,5)$, $(3,7)$, $(3,11)$, $(3,13)$, $(5,7)$로 12개이다.

3. 소인수의 개수가 3일 때, $f(n)=g(n)$이 성립하려면, $n=p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}(p_1<p_2<p_3)$일 때 $n_1+n_2+n_3=n_1n_2n_3$을 만족하여야 하므로 n_1, n_2, n_3은 1, 2, 3의 순열로 총 6개다.

그런데 $p_1 \geq 3$인 경우 $n \geq 3^3 5^2 7^1 = 4725$이므로 $p_1 = 2$ 만 가능하다.
1) $n_1 = 1$인 경우
$2^1 p_2^5 < 2^1 p_2^{n_2} p_3^{n_3} = n \leq 2021$을 만족하는 p_2는 3뿐이다. $n_2 = 2$, $n_3 = 3$이면 $n \geq 2^1 3^2 5^3 = 2250$이고 $n_2 = 3$, $n_3 = 2$이면 $n = 2^1 3^3 5^2 = 1350$이다.
$p_3 \geq 7$이면 $n \geq 2^1 3^3 7^2 = 2646$
따라서 2021이하인 수는 1350으로 1개이다.
2) $n_1 = 2$인 경우
$2^2 p_2^4 < 2^2 p_2^{n_2} p_3^{n_3} = n \leq 2021$을 만족하는 p_2는 3뿐이다. $n_2 = 1$, $n_3 = 3$이면 $n = 2^2 3^1 5^3 = 1500$
$p_3 \geq 7$이면 $n \geq 2^2 3^1 7^3 = 4116$
$n_2 = 3$, $n_3 = 1$ 이면 $n = 2^2 3^3 p_3$ 이므로 $p_3 = 5, 7, 11, 13, 17$이 가능하다.
따라서 2021이하인 수는 1500, $2^2 3^3 5$, $2^2 3^3 7$, $2^2 3^3 11$, $2^2 3^3 13$, $2^2 3^3 17$으로 6개이다.
3) $n_1 = 3$인 경우
$2^3 p_2^3 < 2^3 p_2^{n_2} p_3^{n_3} = n \leq 2021$을 만족하는 p_2는 3과 5가 있다.
① $p_2 = 3$일 때, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$이면 $n = 2^3 3^1 p_3^2$이므로 $p_3 = 5, 7$이 가능하다.
$n_2 = 2$, $n_3 = 1$ 이면 $n = 2^3 3^2 p_3$이므로 $p_3 = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$이 가능하다. (총 9개)
② $p_2 = 5$ 일 때, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$이면 $n = 2^3 5^1 p_3^2$이므로 $p_3 = 7$이 가능하다.
$n_2 = 2$, $n_3 = 1$이면 $n = 2^3 5^2 p_3$이므로 $p_3 = 7$만 가능하다. (총 2개)
따라서 1), 2), 3)에 의해 $f(n) = g(n)$을 만족하는 n의 개수는 $1 + 6 + 11 = 18$개다.

4. 소인수의 개수가 4일 때, $f(n) = g(n)$을 만족하려면 $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} p_4^{n_4} (p_1 < p_2 < p_3 < p_4)$일 때, $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_1 n_2 n_3 n_4$ 이어야 하므로 n_1, n_2, n_3, n_4는 $1, 1, 2, 4$의 순열이다. 그러나, 이 경우 $n \geq 2^4 3^2 5^1 7^1 = 5040$이므로 불가능하다.

5. 소인수의 개수가 5 이상이면 $n \geq 2^1 3^1 5^1 7^1 11^1 = 2310$이므로 불가능하다.

따라서 $f(n) = g(n)$을 만족시키는 2021이하의 수는 소수 306개와 $30 + 12 + 18 = 60$개이므로 366개이므로, 답은 $\frac{306}{306 + 60} = \frac{306}{366} = \frac{51}{61}$이다.

문항카드 9. 논술전형 수학 오후 1번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	직선의 방정식, 원의 방정식, 조건부확률
예상 소요 시간	10분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1]
한 개의 주사위를 3번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b,c라 하자.
이차방정식 $x^2+y^2+ax+by+6=0$이 원을 나타낼 때, 방정식 $x+2y+c=0$이 나타내는 직선이 이 원의 넓이를 이등분할 확률을 구하시오. [10점]

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는「수학」,「확률과 통계」과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 직선의 방정식, 원의 방정식, 조건부확률에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**수학** [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. **확률과 통계** [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2018	122-150
	수학	배종숙 외	금성출판사	2018	126-150
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	58-61
	확률과 통계	김원경 외	비상	2019	52-56

5. 문항 해설

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-24}{4}$

이차방정식이 원을 나타내려면 $\frac{a^2+b^2-24}{4}>0$, $a^2+b^2>24$를 만족해야 한다.

$a=1$일 때, $b=5,6$
$a=2$일 때, $b=5,6$
$a=3$일 때, $b=4,5,6$
$a=4$일 때, $b=3,4,5,6$
$a=5$일 때, $b=1,2,3,4,5,6$
$a=6$일 때, $b=1,2,3,4,5,6$
(a,b)의 순서쌍의 개수는 총 23가지이다.
이때 c는 모든 수가 가능하므로 전체 경우의 수는 $23\times 6=138$이다.

직선이 이 원의 넓이를 이등분하는 경우는 직선이 원의 중심 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$를 지나야 한다.

따라서, $c=\frac{a}{2}+b$을 만족해야 하고, 이를 만족하면서 동시에 $a^2+b^2>24$를 만족하는 경우는

$a=2$일 때, (b,c)가 $(5,6)$
$a=4$일 때, (b,c)가 $(3,5),(4,6)$
$a=6$일 때, (b,c)가 $(1,4),(2,5),(3,6)$
으로 총 6가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{138}=\frac{1}{23}$가 된다.

문항카드 10. 논술전형 수학 오후 2번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	중복조합
예상 소요 시간	25분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2]

방정식 $x_1+x_2+x_3=5$를 만족시키는 양의 정수해를 <표 1>과 같이 나타냈을 때, 숫자 2가 나오는 횟수는 6이다. 자연수 n에 대하여 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$을 만족시키는 양의 정수해를 <표 2>와 같이 나열하였을 때, 자연수 $r\ (1\le r\le n-k+1)$가 나오는 횟수를 n,k,r를 이용하여 나타내시오. (단, k는 $2\le k\le n$인 자연수이다.) [12점]

x_1	x_2	x_3
3	1	1
1	3	1
1	1	3
2	2	1
2	1	2
1	2	2

<표 1>

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k

<표 2>

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는「확률과 통계」과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 중복조합에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**확률과 통계** [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	18-21
	확률과 통계	김원경 외	비상	2019	17-19
	확률과 통계	권오남 외	교학사	2019	19-21

5. 문항 해설

$x_1 = r$이 되는 양의 정수해의 개수는 $x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n - r$를 만족하는 양의 정수해의 개수이다.
$x_2{}' = x_2 - 1$, $x_3{}' = x_3 - 1$, $\cdots$, $x_k{}' = x_k - 1$이라 하면
$x_2{}' + x_3{}' + \cdots + x_k{}' = n - r - k + 1$이고 이 방정식의 해의 개수는 ${}_{k-1}\mathrm{H}_{n-r-k+1}$이다.
따라서, x_1 중 r가 나오는 횟수는 ${}_{k-1}\mathrm{H}_{n-r-k+1}$이다.
이는 x_2, x_3, $\cdots$, x_k의 경우에도 마찬가지이므로 자연수 r가 나오는 횟수는 다음과 같다.

$$k \times {}_{k-1}\mathrm{H}_{n-r-k+1} = k \times {}_{n-r-1}\mathrm{C}_{n-r-k+1} = k \times {}_{n-r-1}\mathrm{C}_{k-2} = \frac{k \times (n-r-1)!}{(k-2)!(n-r-k+1)!}$$

문항카드 11. 논술전형 수학 오후 3번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	함수의 최대최소
예상 소요 시간	30분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

어떤 삼각형 ABC가 있을 때, 사각형 PQRS가 직사각형이 되도록 삼각형 ABC의 세 변 위의 네 점 P, Q, R, S를 선택한다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1]

사각형 PQRS의 넓이가 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이와 사각형 PQRS의 넓이의 차가 43이라 하자. 이 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [5점]

[문제 3-2]

사각형 P′Q′R′S′이 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [15점]

(가) 사각형 P′Q′R′S′은 직사각형이고 네 꼭짓점은 삼각형 ABC와 사각형 PQRS의 변 위에 있다. 그리고 두 사각형 PQRS와 P′Q′R′S′의 내부가 서로 겹치는 부분은 없다.

(나) 두 사각형 PQRS와 P′Q′R′S′의 넓이의 합이 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이에서 두 사각형 PQRS와 P′Q′R′S′의 넓이의 합을 뺀 값은 47이다.

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는「수학Ⅱ」과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 함수의 최대최소에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**수학Ⅱ** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	김원경 외	비상	2018	78-85
	수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2018	88-95
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2018	82-88

5. 문항 해설

[문제 3-1]

사각형 PQRS의 넓이가 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이와 사각형 PQRS의 넓이의 차가 43이라 하자. 이 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [5점]

꼭지점 A에서 밑변 BC에 수선의 발을 내릴 수 없으면 사각형이 내접할 수 없으므로 일반성을 잃지 않고 삼각형 ABC와 사각형 PQRS가 다음 그림과 같이 내접한다고 가정하자. (각ABC나 ACB가 직각인 경우도 포함하여 생각한다.)

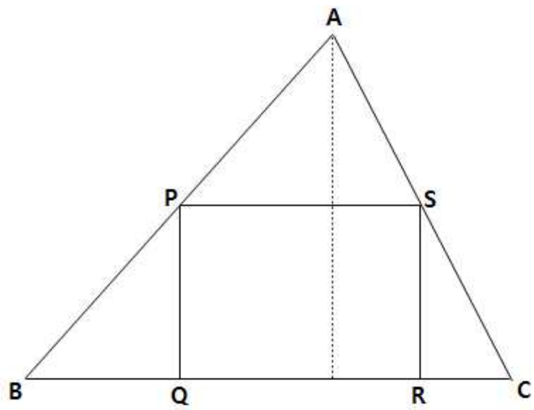

그림 : **[문제 3-1]** 에 관한 보충자료

삼각형 ABC의 밑변의 길이를 a, 높이를 h라 하자.
그림과 같이 삼각형 ABC와 삼각형 APS는 닮음이므로, 닮음비를 $1:t$라고 하자. (단, $0<t<1$)
이때 닮음에 의해 사각형 PQRS의 가로의 길이는 ta, 세로의 길이는 $(1-t)h$가 된다.
사각형PQRS의 넓이는 $S=S(t)=ta\times(1-t)h = t(1-t)ah$ 이고 $t=\dfrac{1}{2}$에서 최대값 $\dfrac{1}{4}ah$를 갖는다. 이 때 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $\dfrac{a}{2},\dfrac{h}{2}$이다.

따라서 최대가 되는 직사각형의 넓이는 삼각형 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이므로 삼각형의 넓이는 $43\times2=86$가 된다.

[문제 3-2]

사각형 $\mathrm{P'Q'R'S'}$이 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [15점]

(가) 사각형 $P'Q'R'S'$은 직사각형이고 네 꼭짓점은 삼각형 ABC와 사각형 PQRS의 변 위에 있다. 그리고 두 사각형 PQRS와 $P'Q'R'S'$의 내부가 서로 겹치는 부분은 없다.
(나) 두 사각형 PQRS와 $P'Q'R'S'$의 넓이의 합이 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이에서 두 사각형 PQRS와 $P'Q'R'S'$의 넓이의 합을 뺀 값은 47이다.

일반성을 잃지 않고 삼각형 ABC와 사각형 PQRS, $P'Q'R'S'$가 다음 그림과 같이 내접한다고 가정할 수 있다.

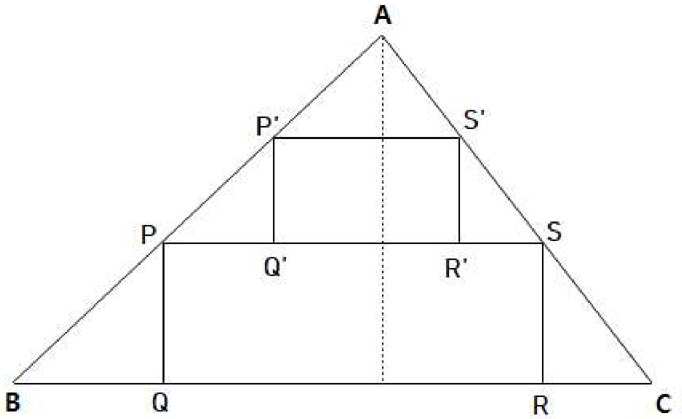

그림 : **[문제 4-2]** 에 관한 보충 자료

삼각형 ABC의 밑변의 길이를 a, 높이를 h라 하자.
그림과 같이 삼각형 ABC와 삼각형 APS는 닮음이므로, 닮음비를 $1:t$라고 하자. (단, $0<t<1$)
이때 닮음에 의해 사각형PQRS의 가로의 길이는 ta, 세로의 길이는 $(1-t)h$가 된다.
사각형 $P'Q'R'S'$는 그림과 같이 삼각형 APS에 내접해야 한다. 이때 사각형 $P'Q'R'S'$의 넓이가 최대가 되도록 하면, 그 넓이는 [문제 3-1] 에 의해 $\frac{1}{2}\left(\frac{ta\times th}{2}\right)=\frac{aht^2}{4}$이다.
따라서 두 사각형의 넓이의 합은 $S=S(t)=aht(1-t)+\frac{aht^2}{4}=ah\,(t-\frac{3}{4}t^2)$ 이고 $t=\frac{2}{3}$ 일 때 최대값 $\frac{ah}{3}$을 갖는다. 이 때, 삼각형 ABC에서 사각형 PQRS 와 사각형 $P'Q'R'S'$를 제외한 부분의 넓이는 $\frac{ah}{2}-\frac{ah}{3}=\frac{ah}{6}=47$이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{ah}{2}=\frac{6\times 47}{2}=141$이다.

문항카드 12. 논술전형 수학 오후 4번

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">수시모집 논술전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열2(수학, 오후)/ 4번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>수열의 극한</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">25분/전체 90분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[제시문]

좌표평면에서 네 직선 $x=-\frac{1}{3}$, $x+y=2$, $y=\frac{1}{5}$, $y=\frac{4}{3}$로 이루어지는 사각형을 D라 하자. 자연수 n에 대하여, 네 변이 좌표축에 평행한 정사각형 중에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2^n}$이고 각 꼭짓점의 x좌표와 y좌표에 2^n을 곱하여 각각 정수가 되는 정사각형들의 모임을 집합 S_n이라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] S_n의 원소 중에서 사각형 D의 둘레 및 내부에 포함되는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하고, 실수 α에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=\alpha n+\ln f(n)$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 α의 값을 구하고, 이때 극한값 $\lim_{n\to\infty} b_n$을 구하시오. **[8점]**

[문제 4-2] S_n의 원소 중에서 사각형 D의 둘레와 두 점 이상에서 만나는 모든 정사각형의 개수를 $g(n)$이라 하고, 실수 β에 대하여 수열 $\{c_n\}$을 $c_n=\beta n+\ln g(n)$이라 하자. 수열 $\{c_n\}$이 수렴하도록 하는 β의 값을 구하고, 이때 극한값 $\lim_{n\to\infty} c_n$을 구하시오. **[10점]**

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는「미적분」과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 수열의 극한에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**미적분** [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	이준열 외	천재교육	2019	11-24
	미적분	권오남 외	교학사	2019	11-28
	미적분	홍성복 외	지학사	2019	11-26

5. 문항 해설

[문제 4-1] S_n의 원소 중에서 사각형 D의 둘레 및 내부에 포함되는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하고, 실수 α에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=\alpha n+\ln f(n)$ 이라 하자. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 α의 값을 구하고, 이때 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 을 구하시오. **[8점]**

S_n의 원소 중에서 D의 둘레 및 내부와 만나는 모든 정사각형의 개수를 $h(n)$이라 하자.
사각형 D의 넓이를 A라 하면, $f(n)$과 $h(n)$의 정의에 따라

$$\text{식1 : } 4^{-n}f(n)\le A\le 4^{-n}h(n)$$

사각형 D의 네 변의 길이는 $\frac{32}{15}$, $\frac{17}{15}$, 1, $\frac{17}{15}\sqrt{2}$ 이다.

$$2^{-n}(h(n)-f(n))\le \frac{32}{15}+\frac{17}{15}+1+\frac{17\sqrt{2}}{15}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+4<10$$

$$\text{식2 : } 4^{-n}(h(n)-f(n))<10\times 2^{-n}$$

식1, 식2와 수열의 극한에 대한 성질에 의해 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}\{A-4^{-n}f(n)\}\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{2^n}=0$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}4^{-n}f(n)=A$ 이다.

$b_n=\alpha n+\ln f(n)=\ln\{f(n)e^{\alpha n}\}$이 수렴하려면 $f(n)e^{\alpha n}$은 0이 아닌 양의 실수 m으로 수렴해야한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^{-n}f(n)}{f(n)e^{\alpha n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4e^{\alpha}}\right)^n=\frac{A}{m}\left(\frac{A}{m}\ne 0\right)$이므로 $\frac{A}{m}=1$이고, $4e^{\alpha}=1$, $\alpha=-\ln 4$이다.

이때 수열 $\{b_n\}$의 극한값은 $\ln A$이고 $A=\frac{799}{450}$이므로, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\ln\frac{799}{450}$이다.

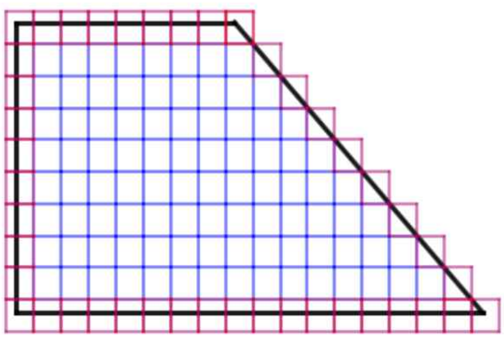

그림 : **[문제4-1]** 및 **[문제4-2]**에 관한 보충 자료

[문제 4-2] S_n의 원소 중에서 사각형 D의 둘레와 두 점 이상에서 만나는 모든 정사각형의 개수를 $g(n)$이라 하고, 실수 β에 대하여 수열 $\{c_n\}$을 $c_n=\beta n+\ln g(n)$ 이라 하자. 수열 $\{c_n\}$이 수렴하도록 하는 β

의 값을 구하고, 이때 극한값 $\lim_{n\to\infty} c_n$을 구하시오. **[10점]**

사각형 D의 네 변의 길이는 $\frac{32}{15}$, $\frac{17}{15}$, 1, $\frac{17}{15}\sqrt{2}$ 이다.

$L_1 = 1+\frac{32}{15}+\frac{17}{15}=\frac{64}{15}$, $L_2=\frac{17}{15}\sqrt{2}$, $L=L_1+\frac{L_2}{\sqrt{2}}=\frac{81}{15}$라고 하자.

사각형 D의 x축 또는 y축과 평행한 세 변과 만나는 S_n의 원소의 개수를 $g_1(n)$, 비스듬한 변과 만나는 S_n의 원소의 개수를 $g_2(n)$이라 하면, $L_1 \le 2^{-n}(g_1(n)+2)$, $\frac{L_2}{\sqrt{2}} \le 2^{-n}g_2(n)$이고

$L_1+\frac{L_2}{\sqrt{2}}-2^{-n+1} \le 2^{-n}(g_1(n)+g_2(n))$ 을 만족한다.

$2^{-n}(g_1(n)-4)\le L_1$, $2^{-n}(g_2(n)-2)\le \frac{L_2}{\sqrt{2}}$ 이므로 $2^{-n}(g_1(n)+g_2(n))\le L_1+\frac{L_2}{\sqrt{2}}+6\times 2^{-n}$ 이다.

수열의 극한의 성질에 의해 $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}(g_1(n)+g_2(n))= L_1+\frac{L_2}{\sqrt{2}}=L$

그리고 $g(n)$, $g_1(n)$, $g_2(n)$의 정의에 의해 $g_1(n)+g_2(n)-4 \le g(n) \le g_1(n)+g_2(n)$이고

$2^{-n}(g_1(n)+g_2(n)-4)\le 2^{-n}g(n) \le 2^{-n}(g_1(n)+g_2(n))$이다.

수열의 극한의 성질에 의해 $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}g(n)=\lim_{n\to\infty} 2^{-n}(g_1(n)+g_2(n))=L$이다.

$c_n=\beta n+\ln g(n)=\ln\{g(n)e^{\beta n}\}$이 수렴하려면 $g(n)e^{\beta n}$은 0이 아닌 양의 실수 c로 수렴해야한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}g(n)}{g(n)e^{\beta n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2e^{\beta}}\right)^n=\frac{L}{c}\left(\frac{L}{c}\ne 0\right)$이므로 $\frac{L}{c}=1$이고, $2e^{\beta}=1$, $\beta=-\ln 2$이다.

이때 수열 $\{c_n\}$의 극한값은 $\ln L$이므로, $\lim_{n\to\infty} c_n=\ln\frac{81}{15}$ 이다.