2021학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연1 (수학)

모집단위		수험번호		성 명	

[문제 1]
100명의 학생 중 k명을 선정하여, 두 명을 회장, 다른 다섯 명을 부회장, 나머지는 위원으로 임명하는 경우의 수가 최대가 되도록 하는 모든 k의 값을 구하시오. (단, $10 \le k \le 100$) **[10점]**

[제시문]
실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 다음 물음에 답하시오.

(가) $g(2020)=1$
(나) 임의의 실수 a, b에 대하여 $g(a+b)+g(a-b)=2g(a)\cos b\pi$ 이다.

[문제 2-1] $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dx$ 의 값을 구하시오. **[8점]**

[문제 2-2] $g\left(\frac{1}{3}\right)g\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{10}$일 때, $\left\{g\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2$ 의 값을 구하시오. **[10점]**

[문제 3]
함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 정수)에 대하여, 닫힌구간 $[2019, 2021]$에서 $|f(x)|$의 최댓값이 1이 되도록 하는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. **[12점]**

[제시문]
2 이상의 자연수 n에 대하여 n을 소인수분해하여 거듭제곱을 사용하여 나타냈을 때, 모든 지수의 합을 $f(n)$, 모든 지수의 곱을 $g(n)$이라 하자. 예를 들어, $n=12=2^2\times3^1$ 이면 $f(12)=2+1=3$ 이고 $g(12)=2\times1=2$이다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] 2부터 20까지의 자연수 중에서 임의로 한 개의 수를 택하여 이를 n이라 할 때, n이 $f(n)=g(n)$을 만족시킬 확률을 구하시오. **[5점]**

[문제 4-2] 2부터 2021까지의 자연수 중에서 임의로 한 개의 수를 택하여 이를 n이라 하자. n이 $f(n)=g(n)$을 만족시킬 때, n이 소수일 확률을 구하시오. (단, 2021 이하의 자연수 중 소수의 개수는 306이다.) **[15점]**

연세대학교

2021학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연2 (수학)

모집단위		수험번호		성 명	

[문제 1]

한 개의 주사위를 3번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c라 하자. 이차방정식 $x^2+y^2+ax+by+6=0$이 원을 나타낼 때, 방정식 $x+2y+c=0$이 나타내는 직선이 이 원의 넓이를 이등분할 확률을 구하시오. **[10점]**

[문제 2]

방정식 $x_1+x_2+x_3=5$를 만족시키는 양의 정수해를 <표 1>과 같이 나타냈을 때, 숫자 2가 나오는 횟수는 6이다. 자연수 n에 대하여 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$을 만족시키는 양의 정수해를 <표 2>와 같이 나열하였을 때, 자연수 $r\,(1\le r\le n-k+1)$가 나오는 횟수를 n, k, r를 이용하여 나타내시오. (단, k는 $2\le k\le n$인 자연수이다.) **[12점]**

x_1	x_2	x_3
3	1	1
1	3	1
1	1	3
2	2	1
2	1	2
1	2	2

<표 1>

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k

<표 2>

[제시문]

어떤 삼각형 ABC가 있을 때, 사각형 PQRS가 직사각형이 되도록 삼각형 ABC의 세 변 위의 네 점 P, Q, R, S를 선택한다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1] 사각형 PQRS의 넓이가 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이와 사각형 PQRS의 넓이의 차가 43이라 하자. 이 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. **[5점]**

[문제 3-2] 사각형 P′Q′R′S′가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. **[15점]**

(가) 사각형 P′Q′R′S′는 직사각형이고 네 꼭짓점은 삼각형 ABC와 사각형 PQRS의 변 위에 있다. 그리고 두 사각형 PQRS와 P′Q′R′S′의 내부가 서로 겹치는 부분은 없다.
(나) 두 사각형 PQRS와 P′Q′R′S′의 넓이의 합이 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이에서 두 사각형 PQRS와 P′Q′R′S′의 넓이의 합을 뺀 값은 47이다.

[제시문]

좌표평면에서 네 직선 $x=-\frac{1}{3}$, $x+y=2$, $y=\frac{1}{5}$, $y=\frac{4}{3}$로 이루어지는 사각형을 D라 하자. 자연수 n에 대하여, 네 변이 좌표축에 평행한 정사각형 중에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2^n}$이고 각 꼭짓점의 x좌표와 y좌표에 2^n을 곱하여 각각 정수가 되는 정사각형들의 모임을 집합 S_n이라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] S_n의 원소 중에서 사각형 D의 둘레 및 내부에 포함되는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하고, 실수 α에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=\alpha n+\ln f(n)$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 α의 값을 구하고, 이때 극한값 $\lim_{n\to\infty} b_n$을 구하시오. **[8점]**

[문제 4-2] S_n의 원소 중에서 사각형 D의 둘레와 두 점 이상에서 만나는 모든 정사각형의 개수를 $g(n)$이라 하고, 실수 β에 대하여 수열 $\{c_n\}$을 $c_n=\beta n+\ln g(n)$이라 하자. 수열 $\{c_n\}$이 수렴하도록 하는 β의 값을 구하고, 이때 극한값 $\lim_{n\to\infty} c_n$을 구하시오. **[10점]**